Som en verschil van functies

Bij 'rekenen' denken we in eerste instantie aan 'rekenen met getallen', maar je kan echter ook 'rekenen met functies'. We beschouwen hier eerst de som en het verschil van *functies*, later volgen product en quotiënt. Er bestaan ook complexe operaties die geen veralgemeningen meer zijn voor operaties op getallen, zoals functies samenstellen, inverteren, afleiden en integreren.

We bestuderen in wat volgt reële functies $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, waarbij we meestal de korte schrijfwijze $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ gebruiken voor de functie $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ met het grootst mogelijke domein.

Definitie 1 (Som, verschil en tegengestelde van reële functies)**.**

Voor reële functies f en g geldt:

$$\begin{aligned} f+g &: x \mapsto (f+g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)+g(x) \\ f-g &: x \mapsto (f-g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)-g(x) \\ -f &: x \mapsto (-f)(x) \overset{\text{def}}{=} -f(x) \end{aligned}$$

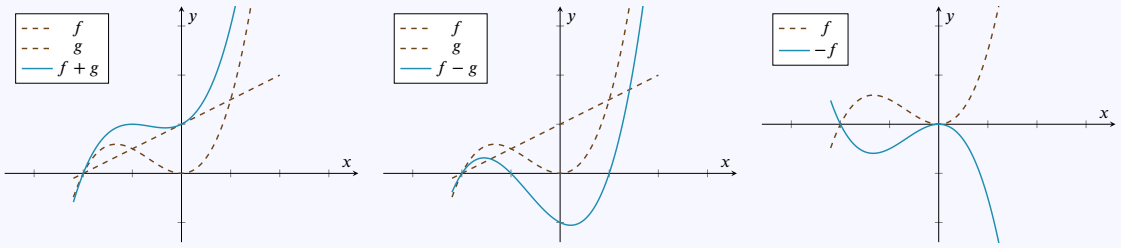
De som en het verschil van twee functies zijn enkel gedefinieerd waar *beide functies* gedefinieerd zijn.

De	**som**	$f+g$	beeldt x af op de	som	$f(x)+g(x)$.
Het	**verschil**	$f-g$	beeldt x af op het	verschil	$f(x)-g(x)$.
De	**tegengestelde**	$-f$	beeldt x af op het	tegengestelde	$-f(x)$.

Voorbeeld 1.

Voor de functies $f : x \mapsto x^3+2x^2$ en $g : x \mapsto x+2$ is

- de som $f+g$ gelijk aan de functie $f+g : x \mapsto x^3+2x^2+x+2$
- het verschil $f-g$ gelijk aan de functie $f-g : x \mapsto x^3+2x^2-x-2$
- de tegengestelde $-f$ gelijk aan de functie $-f : x \mapsto -x^3-2x^2$

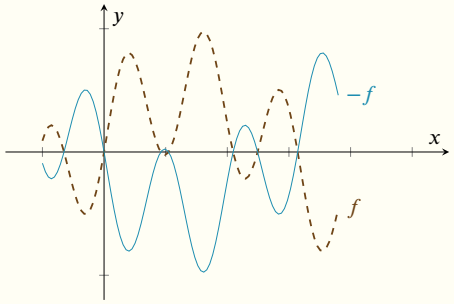


Opmerking 1.

(a) De functies $f+g$ en $f-g$ zijn enkel gedefinieerd voor x-waarden waarvoor zowel f als g gedefinieerd is. Dit betekent dat het domein van de som (en van het verschil) gelijk is aan de doorsnede van het domein van f en het domein van g.

(b) De grafiek van $-f$ is de spiegeling van de grafiek van f over de x-as.

CC BY-NC-SA 4.0



(c) De *nulpunten* van $f - g$ zijn precies de snijpunten van de grafieken van f en g.

Voorbeeld 2 (Som van veeltermfuncties)**.**

Als f een veeltermfunctie is van graad n, en g een veeltermfunctie is van graad m, dan is $f+g$ opnieuw een veeltermfunctie. In het algemeen geldt dat de graad van $f+g$ gelijk is aan het maximum van de getallen m en n, tenzij $m = n$ en de leidende coëfficiënten van f en g tegengesteld zijn. In dat geval is de graad van $f+g$ strikt kleiner dan n.

We noteren het maximum van m en n met $\max(m, n)$.

- Beschouw de volgende veeltermfuncties:

$$f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 1 \text{ van graad } 3$$

$$g : x \mapsto 2x^4 - x^3 + x - 3 \text{ van graad } 4$$

  De som is gelijk aan de veeltermfunctie

$$f + g : x \mapsto 2x^4 - 2x^2 + x - 2$$

  De graad van $f+g$ is inderdaad gelijk aan $\max(3, 4)$.

- Beschouw de volgende veeltermfuncties, beide van graad 4:

$$f : x \mapsto x^4 + x^2 - 1$$

$$g : x \mapsto -x^4 + 2x^2 + x - 1$$

  De som is gelijk aan de veeltermfunctie

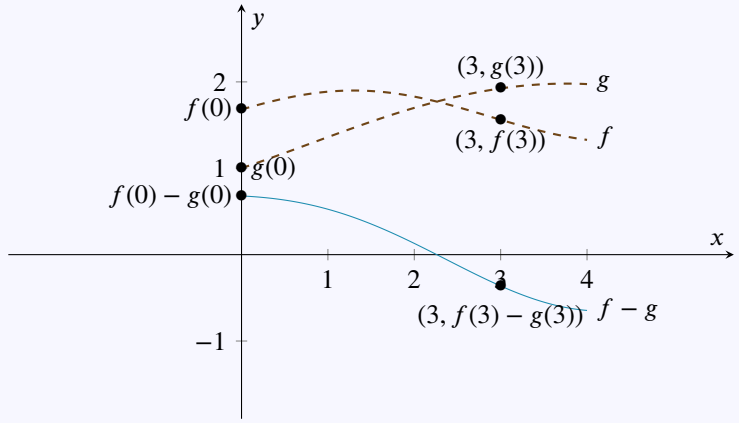
$$f + g : x \mapsto 3x^2 + x - 2$$

  De graad van f en g is beide gelijk aan 4, maar de leidende coëfficiënten zijn tegengesteld, dus de graad van $f+g$ is strikt kleiner dan 4. In dit voorbeeld is de graad van $f+g$ gelijk aan 2.

Voorbeeld 3 (Grafiek van een verschil)**.** De volgende figuur toont de grafiek van twee functies f en g en hun verschil. Voor elke waarde van x vinden we de functiewaarden $f(x)$ en $g(x)$ terug op de grafieken van f en g en het verschil van deze functiewaarden $f(x) - g(x)$ op de grafiek van $f - g$.

CC BY-NC-SA 4.0

Som en verschil van functies

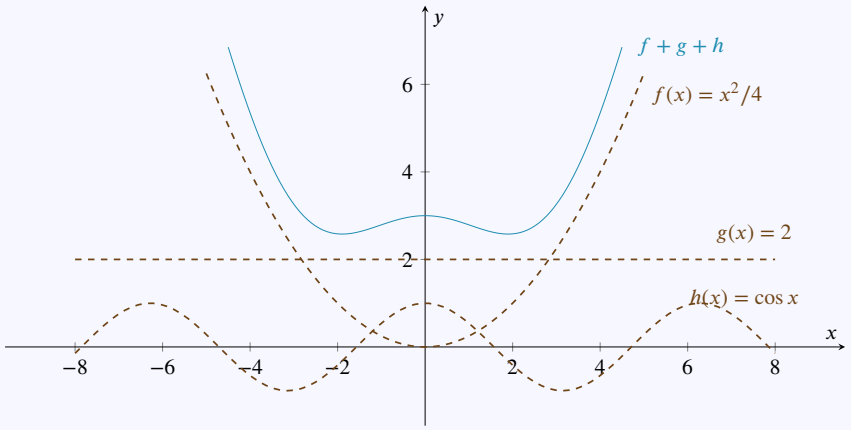


Merk op dat de grafieken van f en g elkaar snijden boven de punten waar de grafiek van $f-g$ de x-as snijdt: in die punten is inderdaad $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 0$.

Uitweiding 1 (Voorbeeld som van drie functies)**.**

Voorbeeld 4.

$$f : x \mapsto x^2/4, \quad g : x \mapsto 2, \quad h : x \mapsto \cos(x)$$
$$f + g + h : x \mapsto x^2 + 2 + \cos(x).$$



CC BY-NC-SA 4.0