Samenstellen van functies

Bewerkingen zoals $a+b$, $a-b$ en $a\cdot b$ met twee reële getallen a en b kan je makkelijk uitbreiden tot bewerkingen met reële functies f en g, en dat levert dan de *functies* $f+g$, $f-g$ en $f\cdot g$ op. Je kan deze operaties voor functies dus beschouwen als veralgemeningen van die voor getallen. Er is echter ook een fundamenteel andere manier om een nieuwe functie te maken van twee bestaande functies, die geen analoog heeft voor reële getallen. Je kan sommige functies namelijk *samenstellen*, dat betekent ze *na elkaar* toepassen: *eerst* neem je $g(x)$, en dan pas je f toe *op het resultaat* $g(x)$ van g. Dat geeft als eindresultaat $f(g(x))$.

Definitie 1 (Samenstelling van twee functies)**.**

De **samengestelde functie** van twee reële functies f en g, genoteerd met $f\circ g$ en gelezen als 'f *na* g' (of soms ook 'f van g'), is per definitie de functie die *eerst* g toepast, en dan f, dus

$$f\circ g : x \mapsto (f\circ g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(g(x)).$$

De samengestelde functie $f\circ g$ is enkel gedefinieerd waar de uitdrukking $f(g(x))$ betekenis heeft. Dat is voor die x waarvoor $g(x)$ bestaat en bovendien ook $f(g(x))$ bestaat.

Voorbeeld 1.

Beschouw de functies $f : x \mapsto x^2$ en $g : x \mapsto x+2$. Dan is

1. $f(g(3)) = 25$
2. $g(f(3)) = 11$
3. $f(f(3)) = 81$
4. $g(g(3)) = 7$
5. $g(g(g(3))) = 9$
6. $f(g(3)-5) = 0$
7. $f(g(3))-5 = 20$
8. $f(g(3)+g(2)) = 81$
9. $f(g(3+2)) = 49$

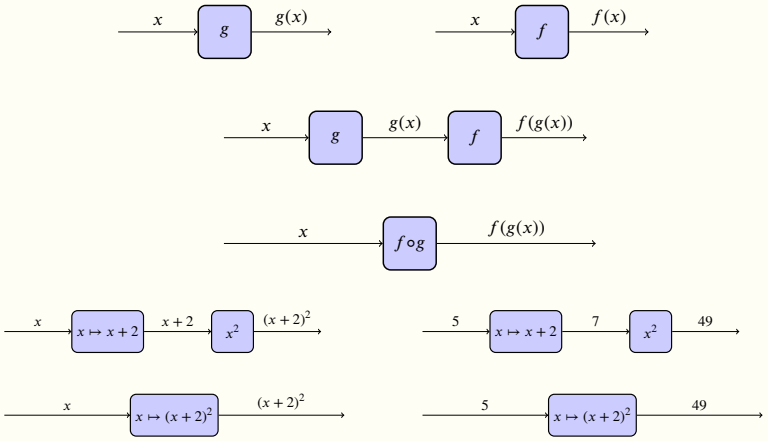
Oefening 1.

Beschouw de functies $f : x \mapsto x^2$ en $g : x \mapsto x+2$. Dan is

1. $f\circ g : x \mapsto$ | x^2+2 | $(x+2)^2$ | x^2+2^2 | $2x^2$ |
2. $g\circ f : x \mapsto$ | x^2+2 | $(x+2)^2$ | x^2+2^2 | $2x^2$ |
3. $g\circ g : x \mapsto$ | x^2+2 | $2(x+2)$ | $x+4$ | 4 |
4. $f\circ f : x \mapsto$ | x^2 | x^4 | $4x$ | $2x^2$ |

Opmerking 1.

- In de machine-voorstelling van functies is *samenstellen* de machines *achter elkaar plaatsen*:

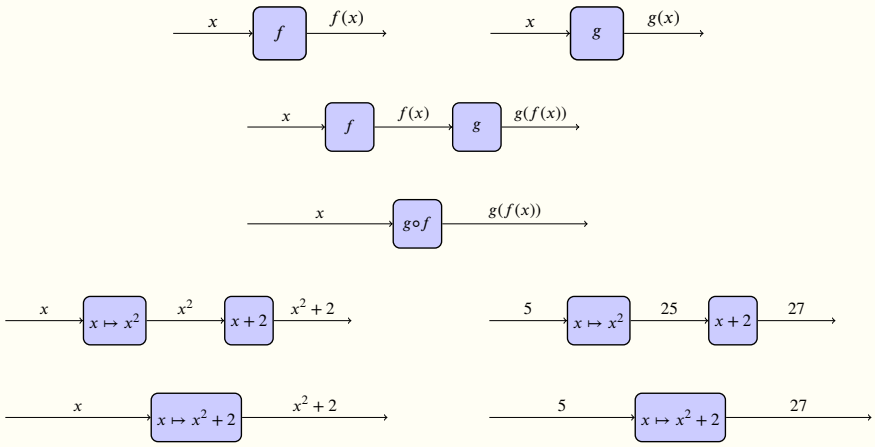


CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.56)

Samenstellen van functies

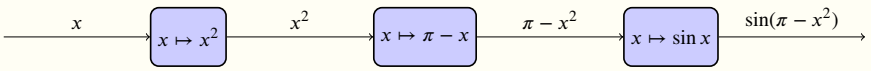
Let op de volgorde van de functies in de samenstelling. Om $(f \circ g)(x)$ (f *na* g van x) te vinden, moeten we *eerst* g toepassen op x en *daarna* f toepassen op het resultaat $g(x)$. Maar in de machinevoorstelling betekent dit dat de functie g links staat en f rechts: g is immers de functie die we eerst gebruiken en daarna de functie f.

- We kunnen ook $g \circ f$ bekijken, dus de functie $g \circ f : x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$.



Uit het voorbeeld blijkt al dat $f \circ g$ en $g \circ f$ verschillende functies zijn. De uitdrukking 'de samenstelling van f en g' kan dus dubbelzinnig zijn: wordt $f \circ g$ bedoeld, of $g \circ f$?

- De samengestelde functie $f \circ g$ is enkel gedefinieerd in x als x tot het domein van g behoort en $g(x)$ tot het domein van f. In de andere volgorde is de samengestelde functie $g \circ f$ enkel gedefinieerd in x als x tot het domein van f behoort en $f(x)$ tot het domein van g.
- Samengestelde functies komen erg veel voor, want heel veel functies kunnen worden gelezen als een samenstelling van eenvoudigere functies. Zo is de functie $x \mapsto \sin(\pi - x^2)$ de samengestelde functie van eerst $x \mapsto x^2$ gevolgd door $x \mapsto \pi - x$ en ten slotte $x \mapsto \sin(x)$.



Voorbeeld 2 (Samenstellen van veeltermfuncties)**.**

Als f een veeltermfunctie is van graad n, en g een veeltermfunctie is van graad m, dan is $f \circ g$ een veeltermfunctie van graad $m \cdot n$.

Beschouw bijvoorbeeld de volgende veeltermfuncties:

$$f : x \mapsto x^2 - 1 \text{ van graad } 2$$

$$g : x \mapsto 2x^2 \text{ van graad } 2$$

De samengestelde functies zijn

$$f \circ g : x \mapsto 4x^4 - 1$$

$$g \circ f : x \mapsto 2x^4 - 4x^2 + 2$$

Dit zijn inderdaad veeltermfuncties van graad $4 = 2 \cdot 2$.

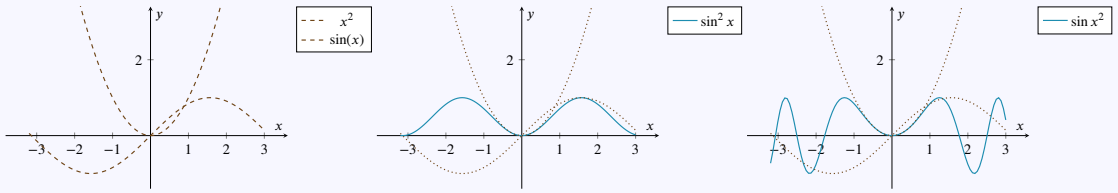
CC BY-NC-SA 4.0

Voorbeeld 3. Bepaal de samenstellingen van volgende reële functies

f	g	$f\circ g$	$g\circ f$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x-3$	$x \mapsto (x-3)^2$	$x \mapsto x^2-3$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x^4$	$x \mapsto x^4$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2$	$x \mapsto 4$	$x \mapsto 2$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto -x$	$x \mapsto x^2$	$x \mapsto -x^2$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto 2x$	$x \mapsto \sin(2x)$	$x \mapsto 2\sin(x)$

In het algemeen kan het verband tussen f en g enerzijds, en $f\circ g$ anderzijds erg complex zijn. Enkel in eenvoudige gevallen kan je het verband gemakkelijk zien.

Voorbeeld 4 (Voorbeeld grafiek)**.** Er is niet onmiddellijk een duidelijk verband tussen de grafieken van de functies $f : x \mapsto x^2$ en $g : x \mapsto \sin x$ en die van hun samengestelde functies $f\circ g$ en $g\circ f$, zoals onderstaande grafieken aantonen. Let op: voor de goniometrische functies noteren we vaak $(\sin x)^2$ als $\sin^2 x$:



Oefening 2. Zij f en g twee functies die samenstelbaar zijn. Zijn volgende beweringen waar of fout?

1. Elk nulpunt van f is ook een nulpunt van $g\circ f$ | Waar | Niet waar |.
2. Elk nulpunt van $g\circ f$ is ook een nulpunt van f | Waar | Niet waar |
3. De grafiek van $g\circ f$ ligt altijd boven de grafiek van f | Waar | Niet waar |

0.1 Domein van samengestelde functies

Stel dat twee functies $g : A \to B$ en $f : C \to D$ gegeven zijn, met A, B, C, D deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Onder welke voorwaarden kunnen we dan f en g samenstellen, en wat is het domein en codomein van $f\circ g$?

Om het beeld $f(g(x))$ van een getal x onder $f\circ g$ te bepalen, moeten we eerst $g(x)$ bepalen, en dus moet zeker $x \in A$. Vervolgens moet f worden toegepast op $g(x)$, en dat kan alleen als $g(x) \in C$. Het domein van $f\circ g$ is dus de deelverzameling van A die wordt afgebeeld in C:

$$f\circ g : \{x \in A \mid g(x) \in C\} \to D : x \mapsto f(g(x))$$

Als $B \subseteq C$ (en dus in het bijzonder als $B = C$) is de voorwaarde $g(x) \in C$ automatisch voldaan, en geldt de eenvoudigere formule

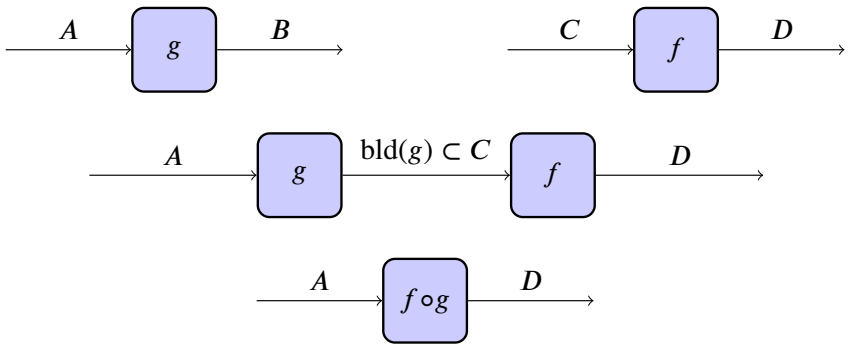
$$f\circ g : A \to D : x \mapsto f(g(x))$$

In het algemeen is het domein van $f\circ g$ (als deze samenstelling bestaat) dus een *deelverzameling* van A, het codomein is *gelijk* aan D en het beeld is een *deelverzameling* van D.

CC BY-NC-SA 4.0

Samenstellen van functies

In de machinevoorstelling ziet de samenstelling er **in het geval** $\mathrm{bld}(g) \subset C$ als volgt uit:



Een voorbeeld van twee functies waarvoor de samenstelling niet bestaat omdat ze nergens gedefinieerd is:

Voorbeeld 5. Beschouw

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$$

en

$$g : \mathbb{R}^+ \to]-\infty, -1] : x \mapsto -x - 1.$$

Je kan zelf nagaan dat in dit voorbeeld de codomeinen van f en g ook de beelden van f en g zijn. De functie $f \circ g$ is nergens gedefinieerd: voor elke $x \in \mathbb{R}^+$ geldt dat $g(x) \in]-\infty, -1]$, zodat $g(x)$ niet tot het domein van de functie f behoort. Dus kunnen we op geen enkele $g(x)$ uit het beeld van g de functie f toepassen. Inderdaad: voor elke x in het domein van g is $g(x)$ een strikt negatief getal, en hiervan kunnen we onmogelijk de vierkantswortel nemen.

Een voorbeeld van twee functies waarvoor de samenstelling wel bestaat maar niet overal gedefinieerd is:

Voorbeeld 6. Beschouw

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$$

en

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x.$$

Dan is $f \circ g : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{-x}$. De samenstelling is niet voor alle x in het domein van de functie g gedefinieerd: voor strikt positieve x is immers $-x$ strikt kleiner dan nul en van dit getal kunnen we geen vierkantswortel nemen. Voor $x \in \mathbb{R}^-$, een deelverzameling van het domein van g, is de samenstelling wel goed gedefinieerd. Ga zelf na dat de beelden van f en g telkens hun codomein zijn, en dat het beeld van de samenstelling $f \circ g$ hier gelijk is aan het beeld van f, namelijk $\mathbb{R}^+$.

CC BY-NC-SA 4.0