Product en quotiënt van functies

Definitie 1 (Product, quotiënt en omgekeerde van reële functies)**.**

Voor reële functies f en g geldt:

$$\begin{array}{rcccc} f\cdot g & : & x\mapsto & (f\cdot g)(x) & \overset{\text{def}}{=} & f(x)\cdot g(x) \\ \dfrac{f}{g} & : & x\mapsto & \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) & \overset{\text{def}}{=} & \dfrac{f(x)}{g(x)} \\ \dfrac{1}{f} & : & x\mapsto & \dfrac{1}{f}(x) & \overset{\text{def}}{=} & \dfrac{1}{f(x)}. \end{array}$$

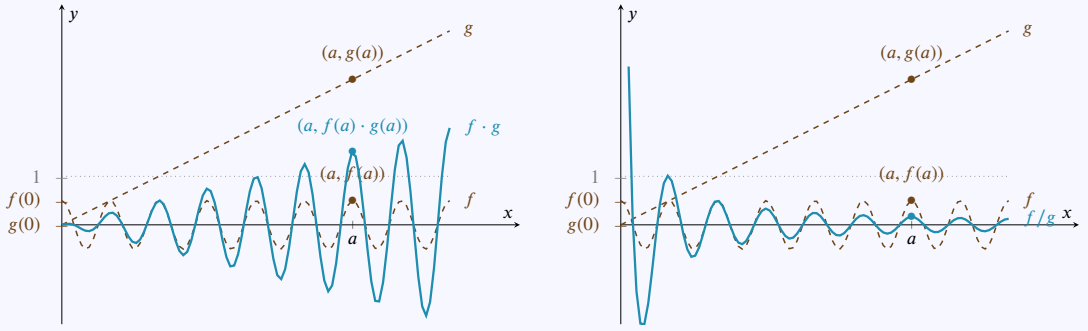
Merk op dat $\dfrac{f}{g}$ en $\dfrac{1}{f}$ niet gedefinieerd zijn in de punten waar de noemer nul wordt.

Het **product** $f\cdot g$ beeldt x af op het product $f(x)\cdot g(x)$.

Het **quotiënt** $\dfrac{f}{g}$ beeldt x af op het quotiënt $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Het **omgekeerde** $\dfrac{1}{f}$ beeldt x af op het omgekeerde $\dfrac{1}{f(x)}$.

Voorbeeld 1. De grafiek van twee functies f en g en hun product $f\cdot g$ en quotiënt $\dfrac{f}{g}$:



Opmerking 1.

(a) Net als bij de functies $f+g$ en $f-g$ is de functie $f\cdot g$ enkel gedefinieerd voor x-waarden waarvoor zowel f als g gedefinieerd is. Het domein is dus gelijk aan de doorsnede van het domein van f en het domein van g.

(b) Het quotiënt $\dfrac{f}{g}$ is enkel gedefinieerd voor x-waarden waarvoor zowel f als g gedefinieerd zijn en $g(x)\neq 0$. Het domein van het quotiënt is dus gelijk aan de doorsnede van het domein van f en het domein van g zonder de x-waarden waarbij $g(x)=0$.

(c) Op haar domein wordt de functie $f\cdot g$ nul in de nulpunten van f *en* in de nulpunten van g. Inderdaad, $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$ en dit product is enkel nul als $f(x)=0$ of $g(x)=0$.

(d) De nulpunten van de functie $\dfrac{f}{g}$ zijn iets lastiger. Voor een nulpunt van f waar de functie g niet nul is, is er geen probleem: dat nulpunt van f is ook een nulpunt van $\dfrac{f}{g}$. Neem bijvoorbeeld $f: x\mapsto x-1$ en $g: x\mapsto 2x$, dan hebben zowel f als $\dfrac{f}{g}: x\mapsto \dfrac{x-1}{2x}$ een nulpunt in $x=1$.

CC BY-NC-SA 4.0

Maar voor $f : x \mapsto x - 1$ en $g : x \mapsto (x-1)^2$ is $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{1}{x-1}$, en deze functie is niet gedefinieerd in $x = 1$, en $x = 1$ is dus zeker geen nulpunt.
Ook de functies $f : x \mapsto x^2 - 1$ en $g : x \mapsto x - 1$ zijn beiden nul in het punt $x = 1$, maar hun quotiënt $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$ heeft waarde 2 voor $x = 1$, en $x = 1$ is dus *geen nulpunt* van $\frac{f}{g}$.

Waarschuwing 1 (Veelgemaakte fout)**.**

We gebruiken NIET de notatie f^{-1} voor de omgekeerde functie, want die notatie is voorbehouden voor de *inverse* functie die we verder zullen bespreken. De *omgekeerde* functie en de *inverse* functie zijn twee *verschillende* begrippen!

Voorbeeld 2 (Product van veeltermfuncties)**.**

Als f een veeltermfunctie is van graad n, en g een veeltermfunctie is van graad m met $f \neq 0$ en $g \neq 0$, dan is het product $f \cdot g$ een veeltermfunctie van graad $m + n$.

Beschouw bijvoorbeeld de volgende veeltermfuncties:

$$f : x \mapsto x^3 - 1 \text{ van graad } 3$$

$$g : x \mapsto x^2 + 2x \text{ van graad } 2$$

Het product is gelijk aan de veeltermfunctie

$$f \cdot g : x \mapsto x^5 + 2x^4 - x^2 - 2x$$

De graad van $f \cdot g$ is inderdaad gelijk aan $5 = 2 + 3$.

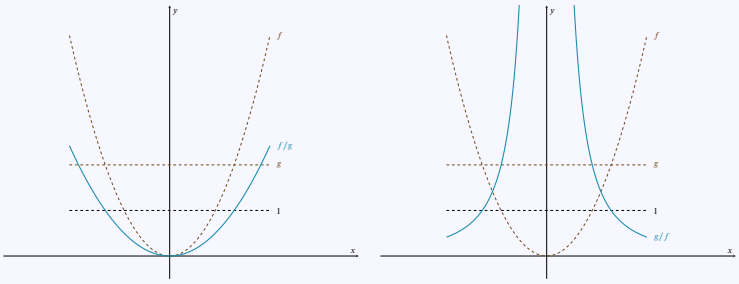
Uitweiding 1 (Extra voorbeeld)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

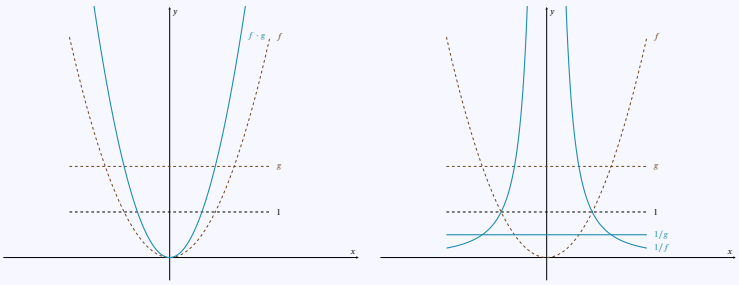
Product en quotiënt van functies

Voorbeeld 3. Beschouw de functies $f : x \mapsto x^2$ en $g : x \mapsto 2$.

1. De grafieken f en g en de quotiënten $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ en $\frac{g}{f} : x \mapsto \frac{2}{x^2}$:



2. De grafieken f en g, hun product $f \cdot g : x \mapsto 2x^2$ en hun omgekeerden $\frac{1}{f} : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en $\frac{1}{g} : x \mapsto \frac{1}{2}$:



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.58)