Inverse functies

Een functie f is een machine die een invoer x omzet in een uitvoer $f(x)$. Die uitvoer wordt soms ook met de letter y aangeduid en dan schrijven we $y = f(x)$. De machine berekent dus voor elke x een bijhorende y. Men kan zich afvragen of er ook een 'undo-machine' bestaat die de berekening van f ongedaan maakt, en de uitvoer y terug omzet in de invoer x.

We noemen een functie g **een inverse functie** voor f als g uit elke uitkomst y van f terug de input x kan berekenen: $g(y) = x$. Omdat $y = f(x)$, kunnen we $g(y) = x$ ook schrijven als $g(f(x)) = x$. Als een dergelijke functie g bestaat noemen we f *inverteerbaar* en g *de inverse functie* van f (eigenlijk *links*inverteerbaar en *linker*inverse maar dat is voorlopig niet belangrijk).

We bekijken eerst enkele voorbeelden. De voorbeelden tonen ook aan dat het voorschrift van de inverse van een functie f in een aantal gevallen te bepalen is uit het voorschrift van f. Het vinden van de inverse functie komt eigenlijk neer op het *oplossen van een vergelijking*: vind voor een gegeven functie $y = f(x)$ een nieuwe formule g die voor elk getal y de unieke $x = g(y)$ oplevert waarvoor geldt dat $f(x) = f(g(y)) = y$. Die functie levert dus voor elke y de unieke oplossing van de vergelijking $f(x) = y$.

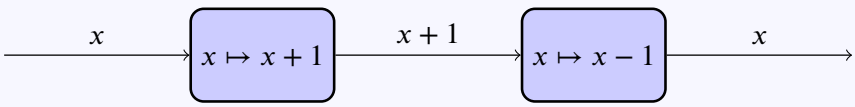
Voorbeeld 1. Zijn volgende functies inverteerbaar? Welke functie is de inverse?

1. Juist ✓ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x + 1$

Uitwerking:

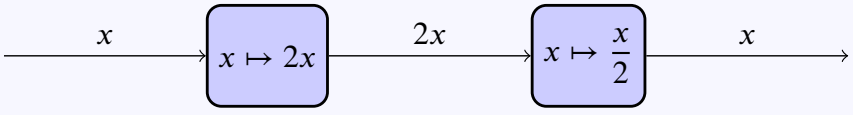
Deze functie f telt bij elk getal één op, dat kan dus ongedaan gemaakt worden door die één er weer af te trekken. De undo-functie van 'plus één' is dan uiteraard 'min één'. In formules: de inverse functie van $x \mapsto x + 1$ is de functie $x \mapsto x - 1$. Of nog, met de notatie $y = f(x)$: voor de functie $f(x) = x + 1$ geldt dan $y = x + 1$. Daaruit kunnen we berekenen dat $x = y - 1$. Als we de inverse functie g noemen, moeten we dus $g(y) = y - 1$ berekenen om de oorspronkelijke x terug te krijgen. Als we die functie g nu toch ook schrijven met als variabele x wordt dat $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = x - 1$. We kunnen dan nagaan dat $g(f(x))$ inderdaad terug x geeft: $g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1) - 1 = x$.

Merk op dat we uit het verband $f(x) = y$ een voorschrift voor g hebben gevonden door 'op te lossen naar x', en dus een formule kregen van de vorm $x = g(y)$. Daarna hebben we, omdat dat gebruikelijk is, in de definitie van g de variabele toch weer terug x genoemd en niet y.



2. Juist ✓ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x$

Uitwerking: De undo-functie van 'vermenigvuldigen met twee' is 'delen door twee'. Dus $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x/2$ is de inverse functie van f, want $g(f(x)) = g(2x) = (2x)/2 = x$.



3. Fout ✓ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2$

Uitwerking: Alle input wordt naar 2 gestuurd. Dat kan niet ongedaan gemaakt worden, want als je enkel de output 2 kent, kan je natuurlijk niet meer weten wat er precies in de machine werd gestopt: *elke input* geeft output 2.

Iets wiskundiger vinden we dat $f(x) = y = 2$ voor alle x, en dit functievoorschrift kan niet herschreven worden naar een voorschrift van de vorm $x = g(y)$, aangezien deze formule geen x bevat.

CC BY-NC-SA 4.0

4. Juist ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x$

Uitwerking: De inverse is $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x$, en is dus gelijk aan f. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x$ is dus haar eigen inverse.

5. Juist ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x + 3$

Uitwerking: De inverse is $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x-3}{2}$.

Deze f stuurt x naar $y = 2x + 3$. Uit $y = 2x + 3$ kunnen we echter eenvoudig x berekenen door de 3 naar het ander lid te brengen en te delen door twee: $y = 2x + 3 \iff y - 3 = 2x \iff \dfrac{y-3}{2} = x \iff x = \dfrac{y-3}{2}$.

Dus als we voor g de functie nemen die $y \mapsto g(y) = \dfrac{y-3}{2}$ dan geldt inderdaad dat $g(f(x)) = g(2x+3) = \dfrac{(2x+3)-3}{2} = x$.

De letter die we gebruiken als variabele van de inverse functie is niet belangrijk, we kunnen de inverse functie even goed noteren als $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x-3}{2}$

6. Fout ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

Uitwerking: Er bestaat geen inverse, want de input 2 en de input -2 worden beide afgebeeld op $f(2) = f(-2) = 4$. De output 4 hoort dus zowel bij input 2 als bij -2. Er kan geen inverse functie g bestaan, want die moet dan 4 zowel op 2 afbeelden als op -2, en dat is onmogelijk want een functie kan een getal maar afbeelden op één ander getal.

We noemen twee functies *inversen* van elkaar, als ze elkaars actie ongedaan maken. We eisen dus niet alleen dat g de actie van de functie f ongedaan maakt, maar ook dat f op zijn beurt de actie van g ongedaan maakt. Als f en g inverse functies zijn van elkaar dan noteren we g ook als f^{-1}, *de inverse functie* van f. Omdat het precieze domein en codomein bij inverse functies erg belangrijk kunnen zijn, gebruiken we hier steeds de uitgebreide notatie $f : A \to B$ voor functies.

Definitie 1 (Inverse functie)**.**

Als $A, B \subset \mathbb{R}$, en $f : A \to B$ en $g : B \to A$ reële functies zijn, dan geldt:

- we noemen f en g **inverse functies van elkaar** (en f de **inverse** van g en g de **inverse** van f) als

$$g(f(x)) = x \quad \text{voor elke } x \in A \text{ en}$$
$$f(g(x)) = x \quad \text{voor elke } x \in B$$

- we noemen f **inverteerbaar** als er een inverse functie bestaat.
- we noteren de (unieke) **inverse functie** van een inverteerbare functie $f : A \to B$ als

$$f^{-1} : B \to A : x \mapsto f^{-1}(x)\,.$$

Dan geldt voor alle x in A, en alle y in B:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$
$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y$$

CC BY-NC-SA 4.0

Inverse functies

Merk op dat spreken over *de* inverse functie alleen zinvol is als een inverse functie uniek is. Dat is echter het geval, zoals blijkt uit volgende eigenschap:

Eigenschap 1.

- Als een functie een inverse functie heeft, dan is die inverse uniek.
- Voor een inverteerbare functie $f : A \to B$ geldt voor elke $x \in A$ en $y \in B$ dat

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

Uitweiding 1 (Bestaan en uniciteit van de inverse functie)**.** Merk op dat het belangrijk is dat een inverse functie *uniek bepaald* is om van *de* inverse functie te mogen spreken. Strikt wiskundig hadden we voorzichtiger moeten zijn, en pas mogen spreken over *de* inverse functie *nadat* we de eigenschap over de uniciteit hadden gegeven.

Precies hetzelfde fenomeen komt ook voor in het dagelijks leven: je kan pas spreken over *mijn* lief, als je een lief hebt, en als je slechts één lief hebt. Als één van beide voorwaarden niet voldaan is, moet je spreken over *een* lief. Ook in de wiskunde komt het fenomeen erg dikwijls voor. We moeten oppassen om *de* vierkantswortel te definiëren, want zowel 2 als -2 zijn 'vierkantswortels' van 4. Dat wordt opgelost door af te spreken dat we met *de* vierkantswortel *de positieve vierkantswortel* bedoelen, en die is wel uniek. Bij de inverse functie van de goniometrische functies sinus en cosinus is het probleem nog veel groter want er zijn *oneindig veel* getallen die allemaal sinus gelijk aan nul hebben, namelijk alle veelvouden van π. We moeten dus erg voorzichtig zijn om te spreken over *de* inverse van de sinus.

Dat een inverse functie uniek is zodra ze bestaat kan als volgt worden bewezen: neem een willekeurige inverteerbare functie $f : A \to B$, en veronderstel dat je toch twee inverse functies $g_1 : B \to A$ en $g_2 : B \to A$ zou hebben van f. Dan bewijzen we als volgt dat noodzakelijkerwijze $g_1 = g_2$ (en er dus toch hoogstens maar één inverse functie kan bestaan).

Kies een willekeurige $y \in B$. Het volstaat aan te tonen dat $g_1(y) = g_2(y)$, want deze gelijkheid voor elke y betekent dat precies dat $g_1 = g_2$, aangezien het domein en codomein van g_1 en g_2 al zeker aan elkaar gelijk zijn. Nu is $f(g_1(y)) = y$ omdat g_1 een inverse is van f. We substitueren dus $y = f(g_1(y))$ in $g_2(y)$, en bekomen dan

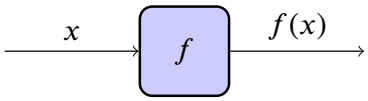
$$g_2(y) = g_2(f(g_1(y))) = g_1(y) \text{ omdat } g_2(f(z)) = z \text{ voor elke } z, \text{ dus ook voor } z = g_1(y)$$

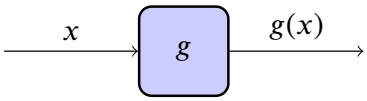
Dit beëindigt het bewijs van de uniciteit van de inverse functie.

Je kan de voorwaarde voor inverse functies ook schrijven als

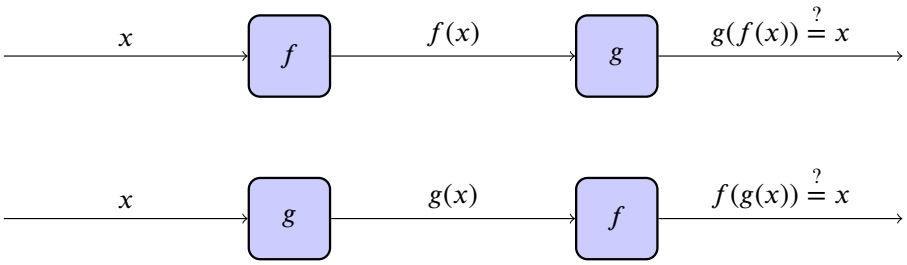
$$(g \circ f)(x) = x \quad \text{voor elke } x \in A \text{ en}$$
$$(f \circ g)(x) = x \quad \text{voor elke } x \in B$$

Twee functies zijn dus elkaars inverse als hun samenstelling de identieke functie $x \mapsto x$ is, dus iedere x afbeeldt op zichzelf. De grafiek van de identieke functie is de eerste bissectrice in het vlak met vergelijking $y = x$. Schematisch wordt dat:





CC BY-NC-SA 4.0



Opmerking 1.

- Niet elke functie is inverteerbaar. Voor een gegeven functie f bestaat f^{-1} dus niet altijd. Bijvoorbeeld de functie $x \mapsto 1$ heeft geen inverse.
- Je mag kiezen welke letter je neemt als variable voor de inverse functie. Neem je bijvoorbeeld de variabele y voor f^{-1} dan noteren we

$$f^{-1} : B \to A : y \mapsto f^{-1}(y)$$

en dat betekent precies hetzelfde als

$$f^{-1} : B \to A : x \mapsto f^{-1}(x)$$

Het gebruik van de letter y is afhankelijk van de context eerder nuttig of eerder verwarrend. Het is daarbij belangrijk op te merken dat $x \mapsto x^2, y \mapsto y^2$ en $z \mapsto z^2$ drie keer *precies* dezelfde functie zijn. De *naam van de variable* veranderen, verandert de *functie* niet.

Voorbeeld 2. De functies $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$ en $g : x \mapsto 2x - 2$ zijn elkaars inverse. We kunnen dat *algebraïsch* bekijken door $f(g(x))$ en $g(f(x))$ te berekenen en aan te tonen dat beide uitdrukkingen gelijk zijn aan x:

$$f(g(x)) = f(2x-2) = \frac{1}{2}(2x-2) + 1 = x \tag{1}$$

$$g(f(x)) = g(\frac{1}{2}x + 1) = 2(\frac{1}{2}x + 1) - 2 = x \tag{2}$$

We kunnen dus schrijven dat $g = f^{-1}$ en dat $f = g^{-1}$.

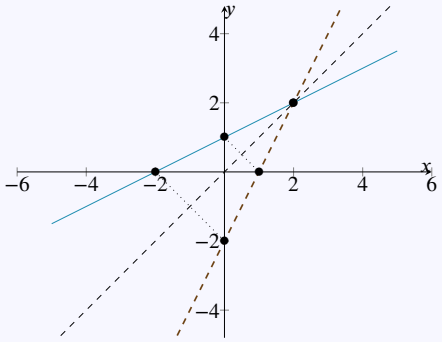
We kunnen ook *meetkundig* onderzoeken wat dat betekent voor de grafiek van f en g.

Onderstaande tabel en grafiek van de functies f en g tonen dat voor elk paar (x, y) op de grafiek van f, het punt (y, x) op de grafiek van g ligt, en omgekeerd. De grafiek van g krijgen we dus door in de grafiek van f de x en y van plaats te verwisselen. Grafisch komt dat overeen met spiegelen over de eerste bissectrice. De eerste bissectrice is de grafiek van $x \mapsto x$, dus de rechte met vergelijking $y = x$. Spiegelen ten opzichte van die bissectrice komt overeen met x en y omwisselen: het punt $(2, 3)$ wordt gespiegeld naar het punt $(3, 2)$.

CC BY-NC-SA 4.0

Inverse functies

$f : x \mapsto x/2+1$	$f^{-1} : x \mapsto 2x-2$
$(-4,-1)$	$(-1,-4)$
$(-2,0)$	$(0,-2)$
$(0,1)$	$(1,0)$
$(2,2)$	$(2,2)$
$(4,3)$	$(3,4)$



Voorbeeld 3. De functies $f : x \mapsto x+1$ en $g : x \mapsto x-1$ zijn inversen van elkaar.

We kunnen dat *algebraïsch* bekijken door $f(g(x)$ en $g(f(x))$ te berekenen, en aan te tonen dat beide uitdrukkingen gelijk zijn aan x:

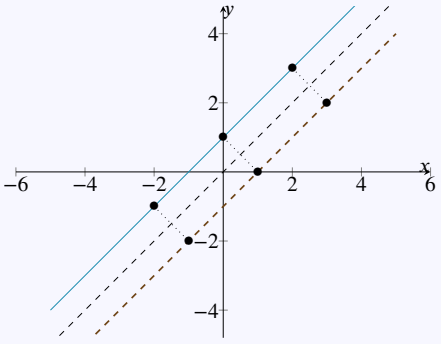
$$f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)+1 = x \tag{3}$$
$$g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)-1 = x \tag{4}$$

We kunnen dus schrijven dat $g = f^{-1}$ en dat $f = g^{-1}$.

We kunnen ook *meetkundig* onderzoeken wat dat betekent voor de grafiek van f en g.

Onderstaande tabel en grafiek van de functies f en g toont dat voor elk paar (x,y) op de grafiek van f, het punt (y,x) op de grafiek van g ligt, en omgekeerd. De punten (x,y) van de grafiek van f komen dus overeen met de punten (y,x) van de grafiek van g. Meetkundig betekent x en y van plaats verwisselen spiegelen over de eerste bissectrice.

$f : x \mapsto x+1$	$f^{-1} : x \mapsto x-1$
$(-4,-3)$	$(-3,-4)$
$(-3,-2)$	$(-2,-3)$
$(-2,-1)$	$(-1,-2)$
$(-1,0)$	$(0,-1)$
$(0,1)$	$(1,0)$
$(1,2)$	$(2,1)$
$(2,3)$	$(3,2)$
$(3,4)$	$(4,3)$
$(4,5)$	$(5,4)$



Opmerking 2. Als f^{-1} bestaat, dan wordt de grafiek van f^{-1} bekomen door de grafiek van f te spiegelen rond de eerste bissectrice.

Uitweiding 2 (Subtiele subtiliteiten over de notatie voor inverse functies)**.**

De notatie f^{-1} is enigszins gevaarlijk, want er zijn twee 'logische' betekenissen mogelijk.

Met het symbool f^{-1} zou men inderdaad redelijkerwijze volgende twee dingen kunnen bedoelen:

- de *inverse* functie van f, dus f^{-1} is zodanig dat $f(f^{-1}(x)) = x$
- $\frac{1}{f}$: de *omgekeerde* van f, dus $\frac{1}{f}$ is zodanig dat $f(x) \cdot (\frac{1}{f})(x) = f(x) \cdot (\frac{1}{f(x)}) = 1$

CC BY-NC-SA 4.0

Inverse functies

We spreken af om verder f^{-1} *enkel* te gebruiken voor de *inverse* functie, en nooit voor de *omgekeerde* functie. Maar, in sommige handboeken, cursussen, webpagina's of omstandigheden kan je andere afspraken tegenkomen.

Als je deze functies evalueert in een punt, kan je met haakjes deze dubbelzinnigheid laten wegvallen:

- de inverse functie van f evalueren in x kan je noteren als $f^{-1}(x)$
- de omgekeerde functie van f evalueren in x kan je noteren als $(f(x))^{-1}$ of als $\dfrac{1}{f(x)}$

Uitweiding 3 (Subtiele subtiliteiten over het bestaan van inverse functies)**.**

Je kan jezelf de vraag stellen "onder welke voorwaarden heeft de functie f een inverse ?". Dit komt overeen met de vraag "onder welke voorwaarden bestaat er een functie g die het effect van de functie f ongedaan kan maken ?".

Mogelijk is het eenvoudiger om je af te vragen "onder welke voorwaarden is het NIET mogelijk om het effect van een functie ongedaan te maken ?". Beeld je nu in dat je een functie f hebt die zowel x_1 als x_2 (met $x_1 \neq x_2$) afbeeldt op de functiewaarde y en dat je voor deze functie de inverse functie wilt zoeken. Dan zou de inverse functie die y op zowel x_1 als x_2 moeten afbeelden. Maar een functie heeft voor elke input maar één output, dus dit is onmogelijk. We hebben volgende eigenschap bewezen:

> **Eigenschap 2.** Een functie f die twee verschillende elementen afbeeldt op hetzelfde beeld is *niet* inverteerbaar.
>
> In formules: als er $x_1 \neq x_2$ bestaan met $f(x_1) = f(x_2)$, dan is f *niet* inverteerbaar.

Een functie waarvoor twee verschillende x_1 en x_2 *nooit* hetzelfde beeld hebben, noemen we een **injectieve functie** of een **injectie**.

Het bestaan van dergelijke x_1 en x_2 is een *voldoende* voorwaarde voor niet-inverteerbaarheid.

De voorwaarde is echter niet *nodig*. Er bestaan inderdaad injectieve functies die (volgens de bovenstaande definitie) toch niet inverteerbaar zijn. Uitdaging: zoek een voorbeeld. Hint: zoek op wat surjectief betekent.

*Vol*doende voorwaarden voor niet-*in*verteerbaarheid kunnen soms wat *on*verteerbaar lijken ...

Om de inverse functie te vinden kunnen we volgend stappenplan volgen:

Algoritme 1 (Berekenen de inverse functie)**.**

In sommige gevallen kunnen we een inverse functie expliciet berekenen:

(a) Schrijf de functie $f : A \to B : x \mapsto f(x)$ in de vorm $y = f(x)$.

(b) Probeer x op te lossen uit $y = f(x)$.
Dit betekent: probeer x te schrijven als functie van y.
Op die manier vind je een functie g zodat $x = g(y)$.

(c) Deze g is de inverse functie: $f^{-1} : B \to A : y \mapsto g(y)$.

(d) Vervang indien gewenst de variabele van de inverse functie door x.

(e) Die nieuwe formule geeft dan $f^{-1} : B \to A : x \mapsto g(x)$.

CC BY-NC-SA 4.0

Voorbeeld 4. Bereken indien mogelijk de inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 5x + 3$.

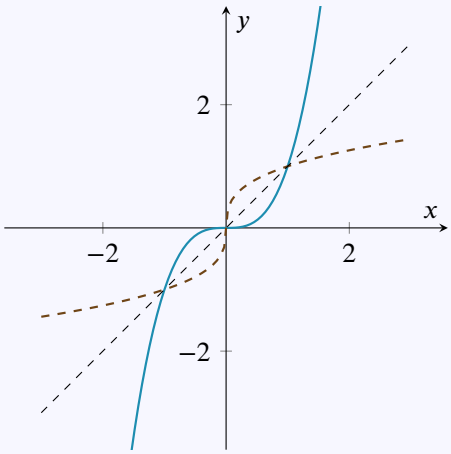
$$y = 5x + 3 \iff y - 3 = 5x \iff \frac{y-3}{5} = x$$

De inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 5x + 3$ is dus $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \frac{y-3}{5}$ of ook $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x-3}{5}$.

Voorbeeld 5. Bereken indien mogelijk de inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$.

$$y = x^3 \iff y^{\frac{1}{3}} = x$$

De inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ is dus $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto y^{\frac{1}{3}}$ of ook $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$.



Voorbeeld 6. Bereken indien mogelijk de inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$.

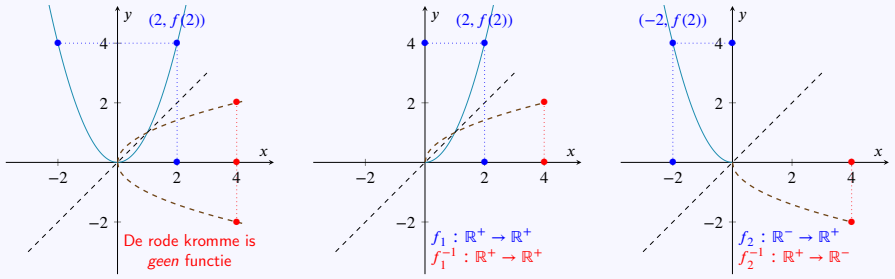
$$y = x^2 \iff x = \pm\sqrt{y}$$

Deze functie is *niet inverteerbaar*:

- Voor $y < 0$ bestaat de vierkantswortel niet. De oplossing voor dit probleem is het codomein beperken tot het beeld $\mathbb{R}^+$. Wanneer we het codomein wijzigen krijgen we een andere functie, dus geven we die een andere naam: $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$
- Voor $y > 0$ zijn er twee oplossingen, $x = \sqrt{y}$ en $x = -\sqrt{y}$. Er zijn 2 mogelijke manieren om toch een inverse functie te definiëren:
  - Als je het domein van $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ beperkt tot $\mathbb{R}^+$, dus $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ dan is $f_1^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$.
  - Als je het domein van $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ beperkt tot $\mathbb{R}^-$, dus $f_2 : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ dan is $f_2^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : x \mapsto -\sqrt{x}$.

CC BY-NC-SA 4.0

Inverse functies



Het is dus mogelijk dat een functie f geen inverse heeft, maar dat een beperking van die functie tot een kleiner (co)domein – wat een nieuwe functie oplevert – *wel* een inverse heeft.

Opmerking 3 (Grafisch criterium voor inverteerbaarheid)**.**

Uit bovenstaande voorbeelden leiden we volgend verband af tussen de inverteerbaarheid van een functie en haar grafiek:

Een functie f is *inverteerbaar*
als en slechts als
elke horizontale rechte $y = c$ met c in het codomein van f snijdt de grafiek van f *in juist één punt*.

Als zo'n horizontale rechte in meer dan één punt snijdt met de grafiek van f dan kan je dikwijls een inverteerbare functie verkrijgen door het *domein* van f te beperken.

Als zo'n horizontale rechte geen snijpunt heeft met de grafiek van f dan kan je dikwijls een inverteerbare functie verkrijgen door het *codomein* van f te beperken.

Typische voorbeelden zijn de inverse functies van de exponentiële en goniometrische functies.

Voorbeeld 7 (Logaritmische en exponentiële functies zijn elkaars inversen)**.**

Bereken indien mogelijk de inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2^x$.

Deze functie is *niet inverteerbaar* want voor $y \leq 0$ bestaat er geen x zodat $y = 2^x$. We kunnen een inverteerbare functie vinden door het *codomein* te beperken tot het beeld van f, namelijk $\mathbb{R}_0^+$.

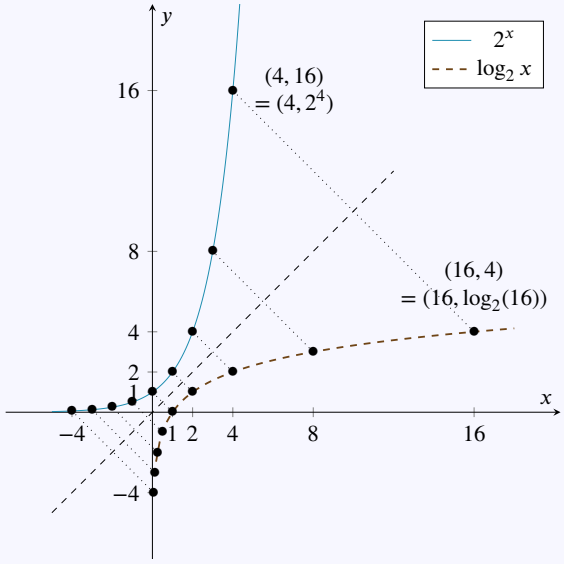
Dan bestaat er wel voor elk getal $y \in \mathbb{R}_0^+$ een unieke $x \in \mathbb{R}$ zodat $y = 2^x$. We noemen deze x de *2-logaritme* van y, en noteren dat als $x = \log_2(y)$. Er geldt dus

$$y = 2^x \iff x = \log_2(y)$$

De functies $\exp_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto 2^x$ en $\log_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \log_2(x)$ zijn elkaars inverse.

De grafiek van de inverse functie is de spiegeling rond de eerste bissectrice. Inderdaad, spiegelen over de eerste bissectrice komt overeen met (x, y) vervangen door (y, x):

CC BY-NC-SA 4.0

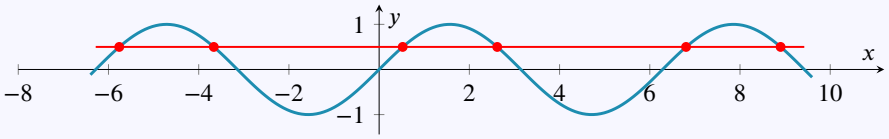


Voorbeeld 8 (Sinusfunctie)**.**

We kunnen ons afvragen of er een inverse functie bestaat voor de sinusfunctie

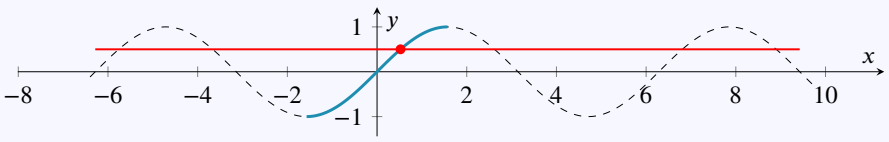
$$\sin : \mathbb{R} \mapsto [-1, 1] : x \mapsto \sin x\,.$$

In tegenstelling tot de meeste voorbeelden die we zijn tegengekomen, is het hier minder makkelijk om uit de formule $y = f(x)$ een verband $x = g(y)$ vinden. We kunnen hier daarentegen aantonen dat er *geen inverse* kan bestaan voor de sinusfunctie. Uit de gekende grafiek van de sinusfunctie



volgt wegens vorige opmerking dat de sinus niet inverteerbaar is: iedere horizontale rechte op een hoogte tussen -1 en 1 snijdt de grafiek van de sinus immers meer dan één keer.

Het probleem kan worden opgelost door het *domein* te beperken tot een goed gekozen interval, bijvoorbeeld $[-\pi/2, \pi/2]$. Op dit interval heeft de sinus wel een inverse.



De verdere studie van dit soort inverse functies leidt tot de zogenaamde cyclometrische functies.

CC BY-NC-SA 4.0