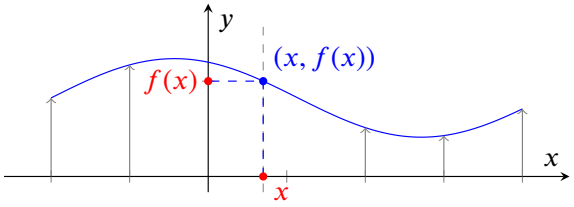
Grafieken van reële functies

Een *reële functie* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, waarbij zowel de input als de output reële getallen zijn, kan worden voorgesteld door een *grafiek*, waarop een aantal belangrijke eigenschappen direct kunnen worden afgelezen.

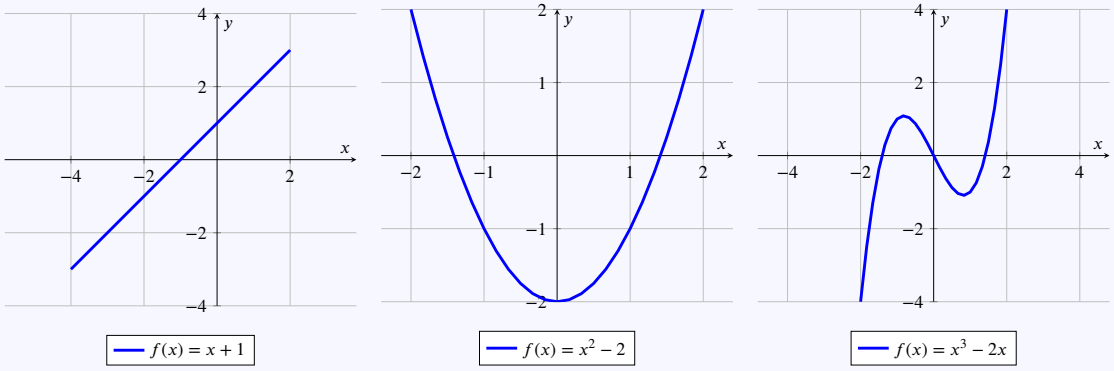
Definitie 1. De **grafiek van een reële functie** f is de kromme in het xy-vlak gevormd door de punten $(x, f(x))$ waarbij x loopt over alle waarden van het domein.



De grafiek van de functie f duidt dus boven elke x in het domein via het punt $(x, f(x))$ aan op welk getal $f(x)$ op de y-as deze x wordt afgebeeld. Als je de grafiek kent, *vind* je $f(x)$ als de *hoogte* van de grafiek in x, en als je de grafiek moet maken, *bepaalt* $f(x)$ de hoogte van die grafiek boven x. Daarbij ligt de grafiek *onder* de x-as als $f(x)$ negatief is.

Voorbeeld 1 (Grafieken)**.**

De **grafiek** van een functie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bekomen we door in een vlak met x, y-coördinaten alle punten $(x, f(x))$ te tekenen.



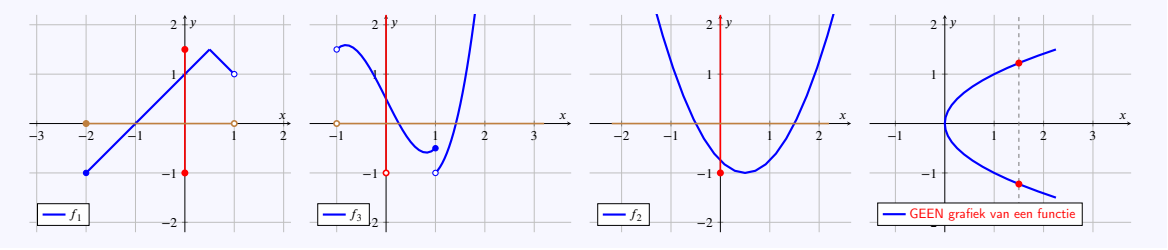
Voor de meeste reële functies is de grafiek een vloeiende kromme, die eventueel wel kniks en gaten kan hebben of sprongen kan maken. Per afspraak behoort een 'vol bolletje' tot de grafiek, terwijl een 'open bolletje' er geen deel van uitmaakt.

De grafiek voldoet wel altijd aan de **'verticale-snijlijn-test'**: elke verticale lijn snijdt de grafiek van een functie ten hoogste één keer, namelijk in het punt $(x, f(x))$ voor de verticale door $(x, 0)$. Dit volgt uit de voorwaarde dat bij elke x uit het domein van de functie f slechts één functiewaarde $f(x)$ hoort. Voor x *buiten* het domein snijdt de verticale door x de grafiek *niet*.

Voorbeeld 2 (Verticale-snijlijn-test)**.**

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.39)

Grafieken van reële functies



Er is volgend verband tussen enerzijds het domein en beeld van een functie en de projecties van haar grafiek op de horizontale en verticale assen:

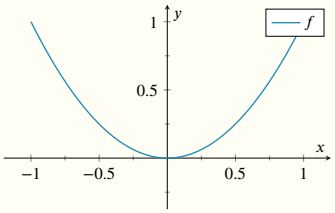
Eigenschap 1.

Het *domein* van een functie is de *verticale projectie* van haar grafiek op de *horizontale* x-as.
Het *beeld* van een functie is de *horizontale projectie* van haar grafiek op de *verticale* y-as.

Opmerking 1 (Zelf een grafiek schetsen)**.**

Om een duidelijke weergave van een functie te geven moet je volgende elementen aangeven op je schets van de grafiek:

- Assenstelsel
- Assen benoemen
- Assen ijken
- (Functie benoemen)



Een belangrijke eigenschap van reële functies zijn hun nulpunten.

Definitie 2. Een **nulpunt** van een reële functie f is een reëel getal a uit het domein van f waarvoor

$$f(a) = 0.$$

Een voorbeeld zijn de nulpunten van een kwadratische functie $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$.

Opmerking 2.

- Het bepalen van de nulpunten van f komt neer op het oplossen van de vergelijking $f(x) = 0$.
- Op de grafiek van een functie zijn de nulpunten de x-coördinaten van de punten waar de grafiek de x-as snijdt (of raakt).
- Een functie kan geen, één, meerdere of zelfs oneindig veel nulpunten hebben.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.39)

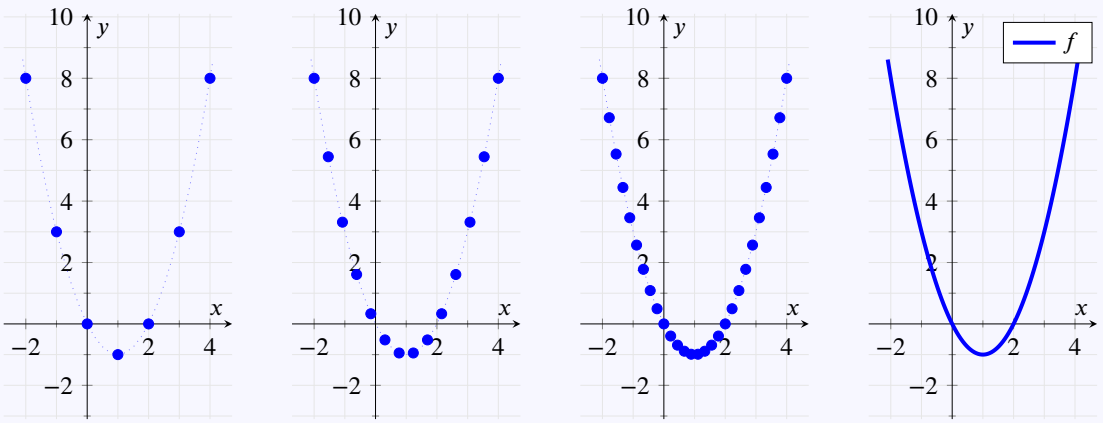
Voorbeeld 3 (grafiek van een functie)**.**

We onderzoeken de functie $f : x \mapsto x^2 - 2x$.

Als er geen expliciet domein is gegeven is, beschouwen we per afspraak het grootst mogelijke domein, in dit geval dus $\mathbb{R}$. We kunnen niet voor *alle* $x \in \mathbb{R}$ de bijhorende punten $(x, f(x))$ tekenen want dan krijgen we een oneindig grote figuur. We kiezen dus een relevant deel van het domein, hier bijvoorbeeld x tussen -2 en 4, zodat we een correct beeld krijgen van de functie.

Links zijn boven de punten $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ de functiewaarden $f(x) = 8, 3, 0, -1, 0, 3, 8$ aangeduid. Op de tekeningen rechts daarvan zijn telkens meer functiewaarden aangeduid. Voldoende punten verbonden door een vloeiende kromme geven een goede benadering van de grafiek.

We **lezen** die grafiek van links naar rechts, zoals een tekstregel. We zeggen dus dat de functie f (of de grafiek van de functie f) *daalt* tot aan $x = 1$ en vanaf daar verder *stijgt*. De functie (of de grafiek) heeft *nulpunten* in $x = 0$ en $x = 2$, en bereikt haar *minimum* $y = -1$ in het punt $x = 1$. De functie is *negatief* tussen de nulpunten, dus op het interval $]0, 2[$ en *positief* daarbuiten.

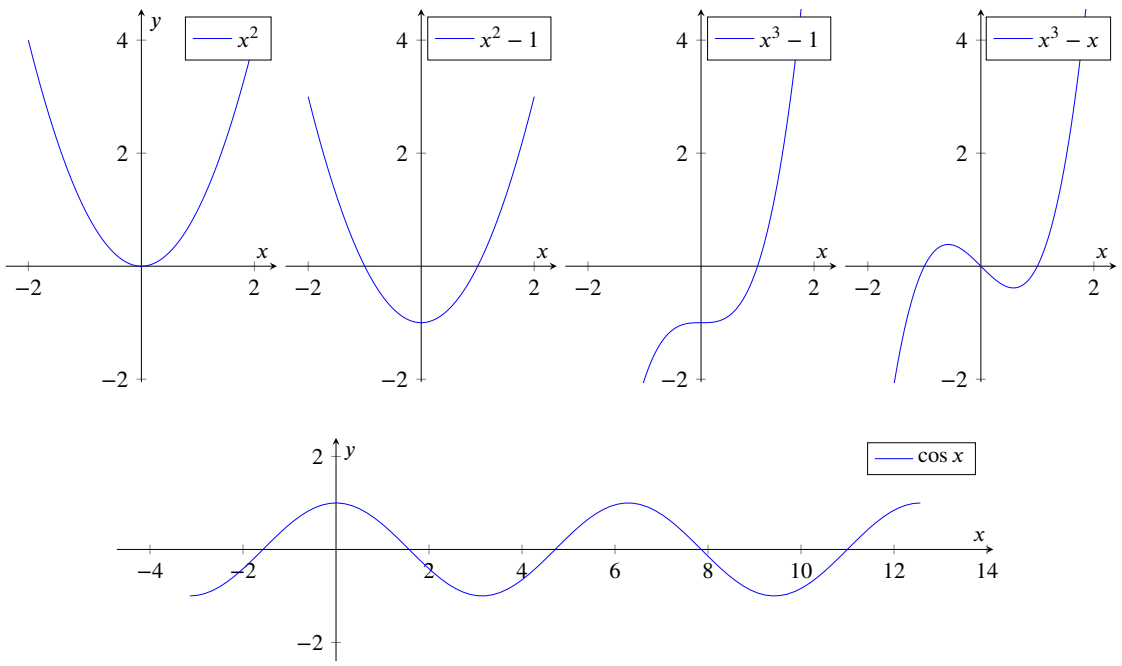


Oefening 1 (Enkele grafieken van reële functies)**.** Lees volgende eigenschappen af van de grafieken. Het is niet nodig berekeningen te maken om de exacte waarde te bekomen.

- Waar stijgt de functie?
- Waar daalt de functie?
- Waar is de functie positief?
- Waar is de functie negatief?
- Waar is de functie nul?
- Waar zijn de nulpunten van de functie?
- Waar zijn de functiewaarden gelijk aan 1?
- Waar heeft de functie een minimum?
- Waar heeft de functie een maximum?

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.39)

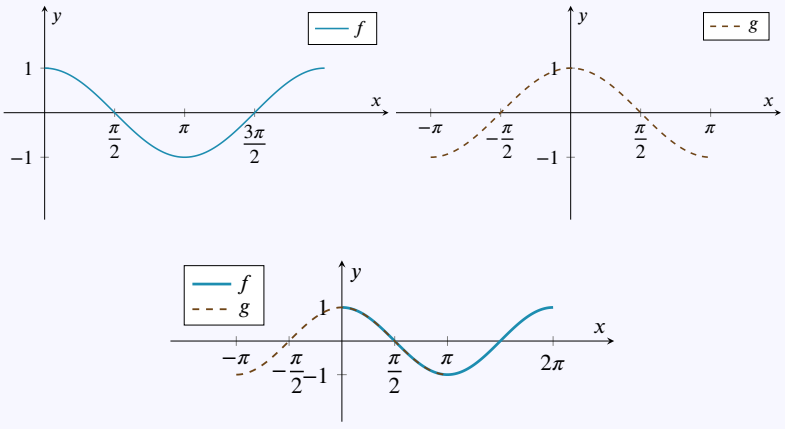
Grafieken van reële functies



Voorbeeld 4. De grafiek hangt af van het *domein* van de functie:

- De cosinusfunctie beperkt tot verschillende intervallen heeft verschillende grafieken:

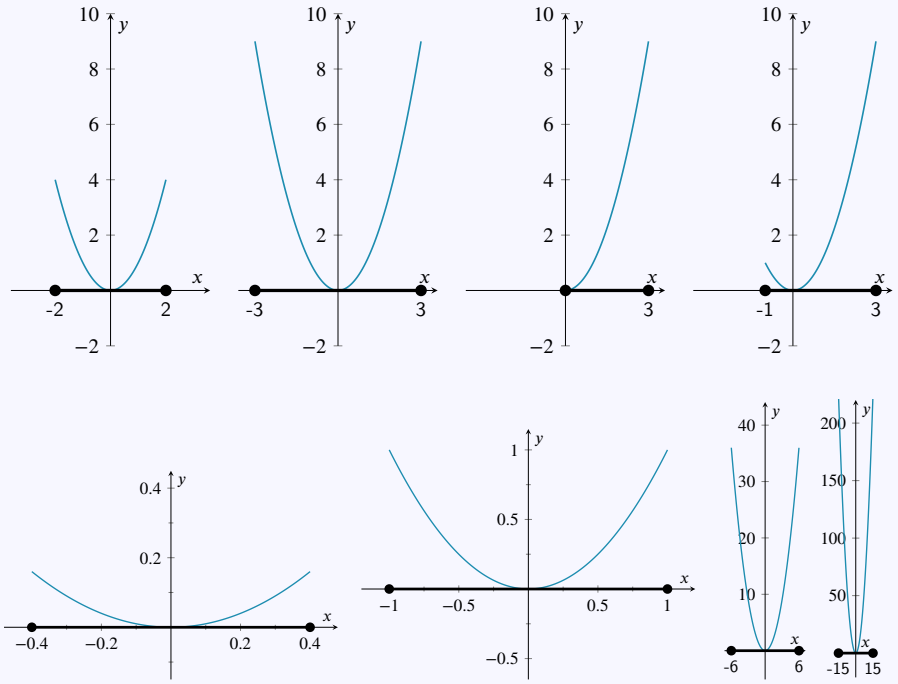
$$\begin{array}{rrcll} f: & [0,2\pi] & \to & [-1,1], & x \mapsto \cos(x) \\ g: & [-\pi,\pi] & \to & [-1,1], & x \mapsto \cos(x) \end{array}$$



- Soms kiezen we andere schalen op de x-as en de y-as. Samen met verschillende domeinen, leidt dat tot erg uiteenlopende grafieken voor 'dezelfde' functie. Dit zijn allemaal grafieken van functies $x \mapsto x^2$ op verschillende intervallen:

CC BY-NC-SA 4.0

Grafieken van reële functies

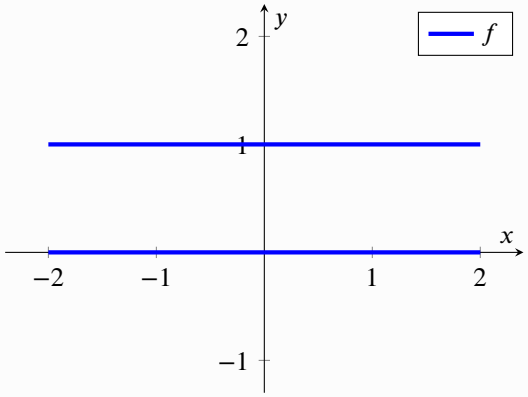


Uitweiding 1 (Functies met 'ontekenbare' grafieken)**.** Bekijk de grafieken van volgende functies:

- Beschouw volgende reële functie f:

$$f : [-2,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ als } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ als } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

  Dan is de grafiek van f onderstaande grafiek MAAR met oneindig veel gaten:

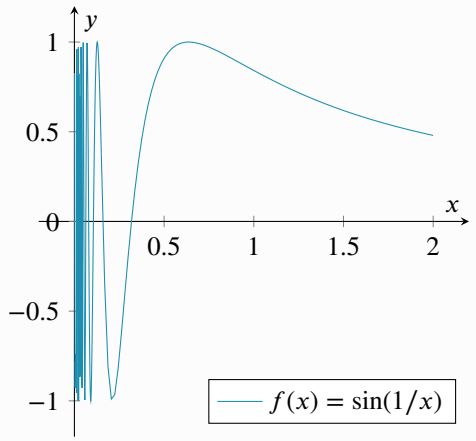


  Alle irrationale punten worden afgebeeld op de x-as, de rationale punten op de rechte $y = 1$. De echte grafiek van f kunnen we niet tekenen.

- Beschouw volgende reële functie f:

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(1/x)$$

CC BY-NC-SA 4.0



In de buurt van 0 trilt de functie steeds meer. Inderdaad, als x klein is (zeg $x = 10^{-5}$), dan is $1/x = 10^5 = 100.000$ groot, en voor elke verandering van $1/x$ met 2π 'trilt' de functie $\sin(1/x)$ één keer tussen -1 en 1. Hoe kleiner x, hoe groter $1/x$, en hoe sneller die 'trillingen' elkaar opvolgen.

Voor beide functies is het dus onmogelijk om een betrouwbare grafiek te tekenen.

CC BY-NC-SA 4.0