Domein en codomein van een functie

Veronderstelde voorkennis: Verzamelingen en Bewerkingen met verzamelingen

Functies veranderen *inputs* in *outputs*. Het is belangrijk te bepalen welk type inputs en outputs kunnen of mogen voorkomen. Dat wordt beschreven met behulp van twee begrippen: het *domein* van een functie, dit is de verzameling van alle toegelaten inputs en het *codomein* van een functie, dit is de verzameling waartoe alle outputs moeten behoren.

Definitie 1 (Domein en codomein van een functie)**.**

Het **domein** van een functie f, genoteerd $\mathrm{dom}\, f$, is de verzameling van alle *toegelaten inputs* van de functie.

Het **codomein** van een functie f (ook **doel** van f genoemd), genoteerd $\mathrm{codom}\, f$, is de verzameling waarin alle *mogelijke outputs* van de functie liggen.

Het **beeld** van een functie f (ook **bereik** van f genoemd), genoteerd $\mathrm{bld}\, f$, is de verzameling van alle *effectieve outputs* van de functie.

Voor een functie f van een domein A naar een codomein B schrijven we:

$$f : A \to B : x \mapsto f(x)$$

waarbij $A = \mathrm{dom}(f)$ en $B = \mathrm{codom}(f)$. De uitdrukking wordt soms ook over twee regels gespreid:

$$\begin{aligned} f &: A \to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Deze uitdrukking lezen we als: f is een functie van A naar B die (een willekeurige) x afbeeldt op $f(x)$.

Voorbeeld 1 (Domein en codomein van functies)**.**

Functie	domein	codomein	beeld
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x+5$	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}$✓
$f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x+5$	$\mathbb{R}^+$✓	$\mathbb{R}$✓	$[5,+\infty[$✓
$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}^+$✓
$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}^+$✓	$\mathbb{R}^+$✓
$f_5 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto -\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$✓	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}^-$✓

Bij de notatie $f : A \to B$ kan je domein en codomein aflezen, maar het beeld moet je berekenen.

Opmerking 1.

- Niet elk element van het *codomein* moet ook effectief worden *bereikt* door de functie f. De elementen die effectief worden bereikt, vormen precies het *beeld* of *bereik* van f. Het beeld van f is dus een *deelverzameling* van het codomein van f. Het beeld (of bereik) kan eventueel *kleiner* zijn dan het codomein maar nooit groter. De functie

  $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$$

  heeft als *codomein* $\mathbb{R}$, maar het *beeld* is $\mathbb{R}^+$ omdat het kwadraat van een reëel getal altijd positief is.

CC BY-NC-SA 4.0

Domein en codomein van een functie

- Reële functies zijn functies waarbij zowel domein als codomein deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ of $\mathbb{R}$ zelf zijn. Als voor reële functies geen expliciet domein is opgeven, nemen we per conventie als domein de grootst mogelijke deelverzameling van $\mathbb{R}$ waarop de functie kan gedefinieerd worden. Als codomein nemen we meestal $\mathbb{R}$ als het niet expliciet is opgegeven. Een willekeurige reële functie f wordt genoteerd als

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x).$$

- *Elk* element van het *domein* moet een (uniek) beeld hebben. De volgende uitdrukking is dus *fout*:

$$\cancel{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}},$$

  omdat de vierkanstwortel niet gedefinieerd is voor *negatieve* getallen.

  We kunnen de vierkantswortelfunctie wel schrijven als

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}.$$

  Let op: het domein *moet niet* de grootst mogelijke verzameling zijn waarop de functie gedefinieerd kan worden. Ook volgende uitdrukking definieert een functie:

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$$

  Per afspraak zijn twee functies aan elkaar gelijk als ze hetzelfde domein hebben, hetzelfde codomein, en allebei een element van hun domein afbeelden op dezelfde waarde van het codomein. Bovenstaande functies f en g zijn dus strikt genomen *verschillende functies*. We zullen verder zien dat dat belangrijk kan zijn bij het bestuderen van grafieken en vooral inverse functies.

- Let op het verschil in het gebruik van de pijlen: we gebruiken $\to$ tussen het domein en het codomein, maar we gebruiken steeds $\mapsto$ om aan te geven waarop een element wordt afgebeeld. De pijl $\to$ duidt dus aan tussen welke verzamelingen de functie gedefinieerd is, en de pijl $\mapsto$ duidt aan waarop een element wordt afgebeeld.

Een functie wordt niet alleen bepaald door wat ze doet, maar ook door haar mogelijke (of 'toegelaten') input en output. Zo is de functie 'kwadrateer-natuurlijke-getallen'

$$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto x^2$$

strikt gesproken een *andere* functie dan de functie 'kwadrateer-gehele-getallen'

$$f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : x \mapsto x^2$$

of de functie 'kwadrateer-reële-getallen'

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2.$$

Immers, twee functies zijn gelijk aan elkaar als en slechts als ze dezelfde inputverzameling en outputverzameling hebben en als ze aan elke inputwaarde dezelfde outputwaarde toekennen.

Zelfs als elke functie $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ en $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telkens elke x afbeeldt op x^2, dan zijn het strikt genomen toch nog steeds *verschillende* functies. In vele gevallen zullen we in de praktijk echter toch gewoon spreken over de functie 'kwadrateer' en het onderscheid in domein en codomein negeren. We noteren dan $f : x \mapsto x^2$.

Bij de bespreking van inverse functies zal dit onderscheid belangrijk worden.

Voorbeeld 2 (Slecht gedefinieerde functies)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

Domein en codomein van een functie

- De uitdrukking $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x - 5$ is *ongeldig* omdat voor $x < 5$ geldt dat $f(x) < 0$ en dus niet behoort tot het aangegeven codomein $\mathbb{R}^+$.
  $f : \mathbb{R}^+ \to [-5, \infty[: x \mapsto x - 5$ is wel een correct gedefinieerde functie, net zoals
  $f : [5, \infty[\to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x - 5$.
- De uitdrukking $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ is *ongeldig* omdat f niet gedefinieerd is voor $x = 0$, en 0 kan dus niet behoren tot het domein.
  $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ is wel een correct gedefinieerde functie, net zoals
  $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$
- De uitdrukking $f : \mathbb{R} \to [0, 1] : x \mapsto \sin x$ is *ongeldig* omdat $\sin x$ ook negatief kan zijn.
  $f : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \sin x$ is wel een correct gedefinieerde functie.

Opmerking 2.

Voor het bepalen van het grootst mogelijke domein van een functie kan je gebruik maken van volgende vuistregels:

- Noemers mogen niet nul worden
- Bij n-de machtswortels met even n moet de uitdrukking onder de wortel groter dan of gelijk aan nul zijn.

Verder in de cursus komt bijvoorbeeld ook aan bod dat je een logaritmische functie enkel kan toepassen op een strikt positief argument.

Oefening 1. Bepaal het *grootst mogelijke domein* met *bijhorend beeld* van volgende functies:

1. $f : \ldots\ldots \to \ldots\ldots, x \mapsto x - 3$

2. $g : \ldots\ldots \to \ldots\ldots \; x \mapsto x^4$

3. $h : \ldots\ldots \to \ldots\ldots, x \mapsto \sqrt{x - 5}$

Uitweiding 1 (Varianten van functies)**.**

We kunnen van functies allerlei varianten maken door het domein of codomein aan te passen, bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{lccccc} f_1 : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}, & x \mapsto & x - 5 \\ f_2 : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z}, & x \mapsto & x - 5 \\ f_3 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, & x \mapsto & x - 5 \\ f_4 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, & x \mapsto & \sin(x) \\ f_5 : & \mathbb{R} & \to & [-1, 1], & x \mapsto & \sin(x) \\ f_6 : & [0, 2\pi] & \to & [-1, 1], & x \mapsto & \sin(x) \\ f_7 : & [-\pi, \pi] & \to & [-1, 1], & x \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

Algemeen, van een functie $f : A \to B$ kan je altijd het *domein kleiner* maken en het *codomein groter*:

CC BY-NC-SA 4.0

Domein en codomein van een functie

- Als $U \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, dan wordt de beperking van f tot U, genoteerd $f|_U$, gedefinieerd als
$$f|_U : U \to B : x \mapsto f(x)$$
- Als $B \subseteq V \subseteq \mathbb{R}$, dan kan je met f volgende functie associëren, bijna altijd genoteerd met gewoon f:
$$f_1 : A \to V : x \mapsto f(x)$$

Van een functie $f : A \to B$ kan je *soms* het *domein groter* maken of het *codomein kleiner*. Het *kleinst mogelijke codomein* is het precies het *beeld*:

$$f_1 : A \to \mathrm{bld}(f) : x \mapsto f(x)$$

De functie $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ kan makkelijk worden uitgebreid tot een functie $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. De functie $h : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ kan niet verder worden uitgebreid.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.42)