Intuïtieve definitie van het begrip functie

Functies zijn erg fundamentele objecten in de wiskunde. Ze verschijnen in velerlei contexten, onder verschillende gedaanten, en hebben verschillende definities en voorstellingen. Een typisch eerste voorbeeld om in gedachten te houden is de functie 'kwadrateer', die met elk getal zijn kwadraat associeert.

Definitie 1 (Pseudo-definities van het begrip functie)**.**

Een **functie** is iets dat voldoet aan volgende, min of meer equivalente, karakteriseringen:

- een *machine* of *black box* die voor toegelaten *inputs* telkens exact één *output* genereert.
- een bepaald soort *verband* tussen een *onafhankelijke variabele* en een *afhankelijke variabele*.
- een *wiskundig object* dat een *('functioneel') verband* uitdrukt tussen andere *wiskundige objecten*.

Deze pseudo-definitie is bewust erg vaag, maar met de volgende voorbeelden, definities en eigenschappen zal het concept 'functie' een steeds duidelijkere en concretere invulling krijgen.

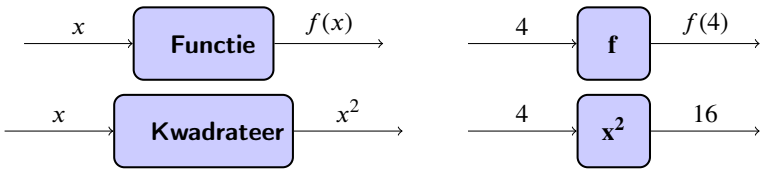
Een nuttige initiële voorstellingswijze van een functie bestaat uit een (in dit geval blauwe) *black box*, die voor een bepaalde input I een bepaalde output O genereert:



Een **functie** zet dus een *input* om in een *output*. Ongeveer alles kan dienen als input en output van wiskundige functies, maar in wat volgt zullen we ons concentreren op zogenaamde **reële functies**: dat zijn die functies waarvan zowel de input als de output reële getallen zijn. Voor dergelijke reële functies bestaan er allerlei interessante begrippen en eigenschappen die niet zomaar van toepassing zijn op meer algemene functies, zoals nulpunten, minima en maxima, grafieken, afgeleiden, integralen,. . . .

Een functie heeft meestal een **naam**. Meestal gebruiken we gewoon f van $f$unctie, maar ook h, g, f_1, f_2 komen dikwijls voor. Sommige functies hebben vaste standaardnamen of 'eigennamen', zoals de vierkantswortel, sinus, logaritme, ...

Als symbool voor een willekeurige **input** gebruiken we meestal de letter x, maar ook andere letters zoals t, n, x_1,x_2, y en y_1 komen voor. In plaats van een willekeurige x kan de input echter ook een concreet getal als 4 of zelfs een andere formule als $a + 1$ zijn.



De **output** of het resultaat van de functie noteren we naargelang de keuzes voor de input en de functie met $f(x)$ of bijvoorbeeld $h(t)$. Uitzonderlijk laten we de haakjes weg en schrijven ook fx. Bij de sinusfunctie $\sin x$ is dat bijvoorbeeld de gewoonte. Soms geven we ook een generieke naam aan de output. De letter y is daarvoor een erg populaire keuze. We schrijven dan $y = f(x)$. We bedoelen daarmee dat f een functie is waar je x kan instoppen en wat er dan uitkomt noemen we y, of $f(x)$.

In de formule $y = f(x)$ staat x dus voor de input, f voor de functie (de *black-box*) en y voor de output. Pas op: die generieke naam y voor de output veroorzaakt dikwijls verwarring, want de letter y wordt bijvoorbeeld ook gebruikt voor de tweede coördinaat van een punt in het vlak en dat heeft weinig te maken met functiewaarden. Daarom vermijden we in deze cursus waar mogelijk om de output een naam te geven, en we noteren de functie die x afbeeldt op $f(x)$ liefst als

$$f : x \mapsto f(x) \quad \text{of} \quad x \mapsto f(x),$$

CC BY-NC-SA 4.0

maar niet als $x \to f(x)$: let op het verschillende pijltje '$\mapsto$' versus '$\to$'.

We *lezen* de uitdrukking $f(x)$ als $\begin{cases} f \text{ van } x \\ \text{de } \textit{functiewaarde} \text{ van } f \textit{ in } x \\ \text{het } \textit{beeld} \text{ van } f \textit{ in } x \\ \text{het } \textit{beeld} \text{ van } x \textit{ onder } f \text{ (of } \textit{door } f\text{)} \end{cases}$

We zeggen ook dat f het element x '*afbeeldt*' op $f(x)$, of dat 'f *toepassen* op x' het element $f(x)$ oplevert.

Voorbeeld 1.

1. Als we de 'kwadrateer'-functie k noemen schrijven we dus:

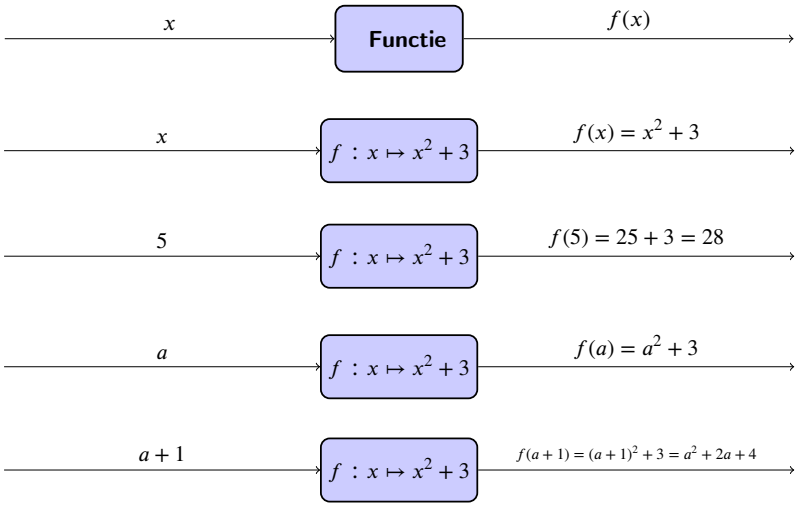
$$k : x \mapsto x^2 \quad \text{of} \quad k : x \mapsto k(x) = x^2$$

Voor deze functie k geldt dat $k(2) = 2^2 = 4$ en $k(4) = 4^2 = 16$.
We *moeten* de functie geen naam geven, en kunnen ook gewoon schrijven $x \mapsto x^2$.

2. Voor de functie $f : x \mapsto x^2 + 3$ hebben we bijvoorbeeld volgende *functiewaarden*:

$$f(0) = 0^2 + 3 = 3$$
$$f(5) = 5^2 + 3 = 28$$
$$f(-5) = (-5)^2 + 3 = 28 = f(5)$$

Functiewaarden worden ook weergegeven op de *black-box* diagrammen van hierboven. We kunnen bovendien ook *letters* gebruiken om de input van een functie voor te stellen, zoals hieronder weergegeven met de letter a. Dikwijls stellen deze letters dan een specifiek getal, een *vaste* waarde, voor. De letter x wordt meestal gebruikt om *eender welk* getal aan te tonen: we zeggen dat waarde van x *varieert*, of dat x een *variabele* is. Ook combinaties van letters en getallen zoals sommen, producten,... kunnen een input zijn van een functie.



Opmerking 1.

Het is belangrijk dat bij elke inputwaarde precies één vaste outputwaarde hoort. Volgende constructies zijn dus *geen* functies:

CC BY-NC-SA 4.0

- $f : x \mapsto$(de som van het aantal ogen van x worpen met een dobbelsteen): de outputwaarden liggen niet vast.
- $f : x \mapsto$(een getal a zodat $a^2 = x$): de outputwaarde ligt niet vast, want 4 heeft zowel 2 als -2 als mogelijke outputwaarde.

Merk op dat een functie dus *niet* zomaar hetzelfde is als 'een formule' of 'een grafiek'.

Functies waarvan zowel de input als de output reële getallen zijn, noemen we *reële functies*. Dergelijke functies kunnen bepaald worden met een *formule*, ook wel *functievoorschrift* genoemd.

Een *formule* is een reeks symbolen die aan bepaalde regels voldoet: $x^2 + a^2x + 7$ is een goede formule, maar $x - +8(a7)$ is dat niet.

Voorbeeld 2. Reële functies voorgesteld door *formules* die de functiewaarde $f(x)$ *berekenen*:

Functie	Formule	Functie	Formule
'plus 5'	$f(x) = x + 5$	'min 5'	$f(x) = x - 5$
'kwadrateer'	$f(x) = x^2$	'sinus van de dubbele hoek'	$f(x) = \sin(2x)$
'vierkantswortel'	$f(x) = \sqrt{x}$	'vierkantswortel plus acht'	$f(x) = \sqrt{x} + 8$

Verschillende voorschriften kunnen toch dezelfde functie bepalen. Zo zijn de functies $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2}$ en $f_2 : x \mapsto |x|$ aan elkaar gelijk.

Nog enkele voorbeelden van functievoorschriften van reële functies.

Voorbeeld 3 (*Reële* functies)**.**

De functie 'maal 6':	$f(x) = 6x$	
De functie '7':	$f(x) = 7$	(een *constante* functie)
De functie '0', of de *nulfunctie*:	$f(x) = 0$	(ook een *constante* functie)
De functie 'doe niets':	$f(x) = x$	(de *identieke* functie)
De functie 'tegengestelde':	$f(x) = -x$	
Eerstegraadsfuncties:	$f(x) = ax + b$	met zekere $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$
Goniometrische functies:	$f(x) = \sin(x)$	
	$f(x) = \cos(ax + b)$	met $a, b \in \mathbb{R}$

Uitweiding 1 (Andere eerder wiskundige functies)**.**

De functie die aan elke rechthoek met zijden a en b zijn oppervlakte associeert:

$$O_{pp}(\text{rechthoek met zijden } a \text{ en } b) = a \cdot b$$

De functie die met elk punt van het vlak zijn x-coördinaat associeert:

$$C_x(\text{het punt } P(x, y) \text{ in het vlak}) = x$$

Een andere mogelijke naam voor de coördinaatfunctie C_x is eigenlijk gewoon x. We krijgen dan $x(P) = x$. Hierbij is de eerste x de naam van de functie en de tweede x de x-coördinaat van het punt P.

De functie die met elke eindige verzameling haar aantal elementen associeert:

$$\#(\text{verzameling } A \text{ met } n \text{ elementen}) = n$$

CC BY-NC-SA 4.0

De haakjes om aan te geven dat het een functie is worden in dit geval ook weggelaten. We krijgen dan $\#A$ voor het aantal elementen van een verzameling, dus met het voorbeeld van hierboven noteren we $\#A = n$.

Uitweiding 2 (Iets minder direct wiskundige functies)**.**

Snelheidsfunctie v:	$v(t)$ = de snelheid van een bepaald voorwerp op tijdstip t, in km/u.
Puntenfunctie P:	$P(\textit{leerling})$ = punten van bepaalde *leerling* (op een bepaalde toets).
Leerlinggemiddeldefunctie μ_L:	$\mu_L(\textit{leerling})$ = gemiddelde (over alle toetsen) van een bepaalde *leerling*.
Toetsgemiddeldefunctie μ_T	$\mu_T(\textit{toets})$ = gemiddelde (over alle leerlingen) op een bepaalde *toets*.
Verkiezingsfuncties T	$T(\textit{kandidaat})$ = het aantal stemmen dat een *kandidaat* behaalde bij een bepaalde verkiezing.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.38)