CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.58)

Zomercursus Wiskunde
Groep Wetenschap en Technologie

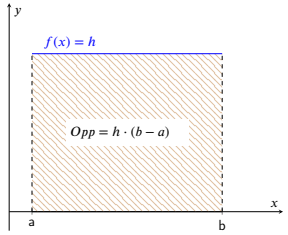
Integralen

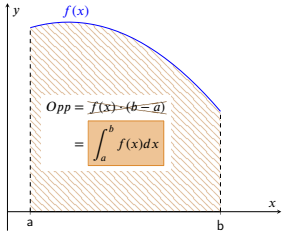
Definities

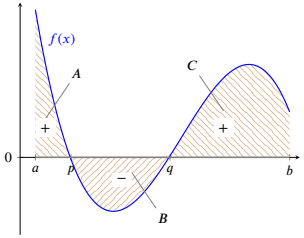
De **onbepaalde integraal** van een functie f is de verzameling van functies F zodat $F' = f$:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \qquad \text{met} \quad F'(x) = f(x).$$

De **bepaalde integraal** $\int_a^b f(x)\,dx$ van een positieve functie f op $[a,b]$ is de oppervlakte tussen de grafiek van f, de x-as en de verticale rechten $x = a$ en $x = b$:







Oppervlaktes *onder* de x-as worden *negatief geteld* door de bepaalde integraal:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^q f(x)\,dx + \int_q^b f(x)\,dx$$
$$= \text{opp}\,A - \text{opp}\,B + \text{opp}\,C\,.$$

Het verband tussen bepaalde en onbepaalde integralen wordt gegeven door:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Eigenschappen van de onbepaalde integraal

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

Basisintegralen

$$\int 0\,dx = c \quad \text{met } c \in \mathbb{R} \qquad \int dx = x + c$$
$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c \quad (r \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$
$$\int e^x\,dx = e^x + c \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + c$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{bgsin}\,x + c \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{bgtan}\,x + c$$

Rekenregels

$$\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \qquad \int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$$

Substitutiemethode

Voor reële, afleidbare functies f en u waarvoor der samenstelling $f(u(x))$ bestaat geldt:

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int f(u(x))du(x) = \int f(u)\,du$$

Voorbeeld:

$$\int e^{x^2}\,2x\,dx \overset{u(x)=x^2}{=} \int e^{u(x)}u'(x)dx = \int e^u du = e^u + c = e^{x^2} + c$$

Partiële integratie

Voor reële, afleidbare functies f en g geldt:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx \overset{P.I.}{=} f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \qquad \textbf{(partiële integratie)}$$

Of ook: $\int u\,dv \overset{P.I.}{=} uv - \int v\,du$ (want $du = u'(x)dx$)

Voorbeeld:

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x \overset{P.I.}{=} x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0 versie 2026/09/17