# Logaritmische vergelijkingen

We noemen een vergelijking een *logaritmische vergelijking* als de onbekende $x$ minstens één keer voorkomt binnen een logaritmische functie.

Voorbeelden van dergelijke vergelijkingen zijn: $\log_3(x) = -2$, $\log_3(x) = -2x$ en $\log_2(x) = 5 + \log_2(1/x)$.

Net zoals bij exponentiële vergelijkingen kunnen logaritmische vergelijkingen niet altijd exact worden opgelost. Voor de oplossing van $\log_3(x) = -2x$ bestaat bijvoorbeeld geen exacte formule. Als een exacte oplossing wel mogelijk is, moet de onbekende uit de logaritme gehaald worden door gebruik te maken van een exponentiële functie of van de definitie van de logaritme.

Bij het oplossen van logaritmische vergelijkingen begin je met de *bestaansvoorwaarden* te noteren: de uitdrukking binnen de logaritme moet immers steeds strikt positief zijn en het grondtal van de logaritme is steeds een strikt positief getal, verschillend van 1. We illustreren enkele oplossingsmethoden aan de hand van onderstaande voorbeelden.

**Voorbeeld 1.** Los op naar $x$: $\log_3(x) = -2$.

Bestaansvoorwaarde: $x > 0$

Om de vergelijking $\log_3(x) = -2$ op te lossen willen we de onbekende $x$ uit de logaritme halen. Dat kan op twee manieren:

- met behulp van de definitie van de logaritme:

  In woorden: '$\log_3(x)$ = de exponent waartoe men het grondtal 3 moet verheffen om $x$ te bekomen'. De vergelijking zegt dus dat de exponent waartoe men het grondtal 3 moet verheffen om $x$ te bekomen is gelijk aan $-2$, dus $x = 3^{-2} = 1/9$.

  In symbolen: $\log_3(x) = -2 \iff 3^{-2} = x$

  Hiermee is de logaritmische vergelijking opgelost.

- met behulp van een gepaste exponentiële functie: We passen de functie $f(x) = 3^x$ toe op beide leden van de gelijkheid en gebruiken de eigenschap $a^{\log_a x} = x$, dan krijgen we

$$3^{\log_3(x)} = 3^{-2} \iff x = 1/9.$$

**Voorbeeld 2.** Los op naar $x$: $\log_3(x) = -2x$

Bestaansvoorwaarde: $x > 0$

De vergelijking $\log_3(x) = -2x$ is niet exact op te lossen. We kunnen ze met behulp van de definitie van de logaritme wel herformuleren als $x = 3^{-2x}$. We hebben daarmee de onbekende $x$ uit de logaritme gehaald, maar nu komt ze in het rechterlid voor in de exponent van een macht. We hebben eerder al gezien dat we de nieuwe vergelijking niet kunnen oplossen. Een benaderende oplossing is wel mogelijk: $x \approx 0.4080$ is de unieke oplossing.

**Voorbeeld 3.** Los op naar $x$: $\log_2(x) = 5 + \log_2(1/x)$

Bestaansvoorwaarde: $x > 0$ en $\dfrac{1}{x} > 0$

In deze vergelijking komt de onbekende $x$ tweemaal voor binnen de logaritme, met hetzelfde grondtal 2. Dit nodigt uit om eerst gebruik te maken van eigenschappen van logaritmische functies vooraleer we op beide leden de exponentiële functie $f(x) = 2^x$ toepassen.

$$\log_2(x) = 5 + \log_2(1/x) \Leftrightarrow \log_2(x) = 5 + \log_2\left(x^{-1}\right) \Leftrightarrow \log_2(x) = 5 - \log_2(x)$$
$$\Leftrightarrow 2 \cdot \log_2(x) = 5 \Leftrightarrow \log_2(x) = 5/2 \Leftrightarrow x = 2^{5/2} = 4\sqrt{2}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

## Logaritmische vergelijkingen

**Oefening 1.** Los op naar $x$: $\dfrac{50}{\log(x)} = 100$

CC BY-NC-SA 4.0