Logaritmische functies

Door in de uitdrukking voor de logaritme $\log_a b$ het grondtal a constant te houden en het getal b te laten variëren, bekomen we een *functie*, namelijk een zogenaamde *logaritmische functie*:

Definitie 1 (Logaritmische functie)**.** De **logaritmische functie met grondtal** a ($a > 0$ en $a \neq 1$), genoteerd als $\log_a$, is de reële functie

$$\log_a : x \mapsto \log_a x$$

waarbij x enkel *strikt positieve waarden* mag aannemen.

Opmerking 1. Bij de invoering van de logaritme $\log_a b$ hebben we de noodzaak besproken om beperkingen op te leggen aan het grondtal a en het argument b.

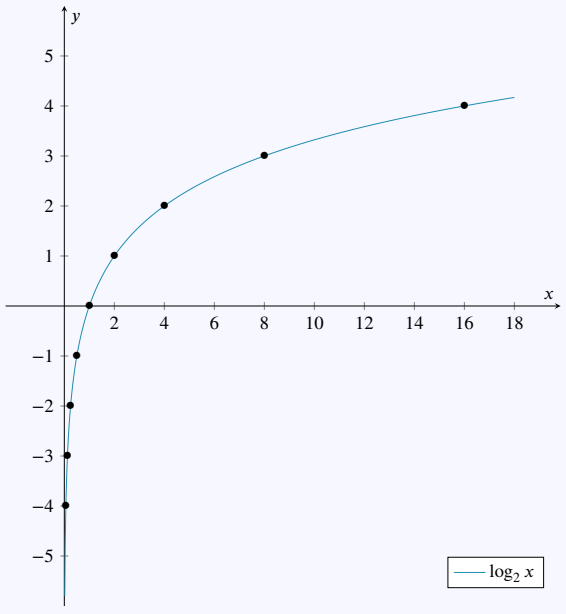
We bestuderen nu de *grafiek* van een logaritmische functie $\log_a$. Het zal blijken dat er een belangrijk onderscheid is tussen de gevallen a groter dan 1 en a tussen 0 en 1.

Voorbeeld 1 (Het geval $a > 1$: grafiek van de logaritmische functie $\log_2$)**.**

We nemen als voorbeeld $a = 2$. We schetsen de grafiek van de logaritmische functie $\log_2 : x \mapsto \log_2(x)$ door een aantal punten van de grafiek te bepalen. Het ligt voor de hand om voor de x-waarden machten van 2 te kiezen, omdat daarvoor de 2-logaritme gemakkelijk te bepalen is.

x	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16
$y = \log_2(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Dit levert voldoende punten op om de grafiek betrouwbaar te schetsen:



Voorbeeld 2 (Het geval $0 < a < 1$: grafiek van de logaritmische functie $\log_{1/2}$)**.**

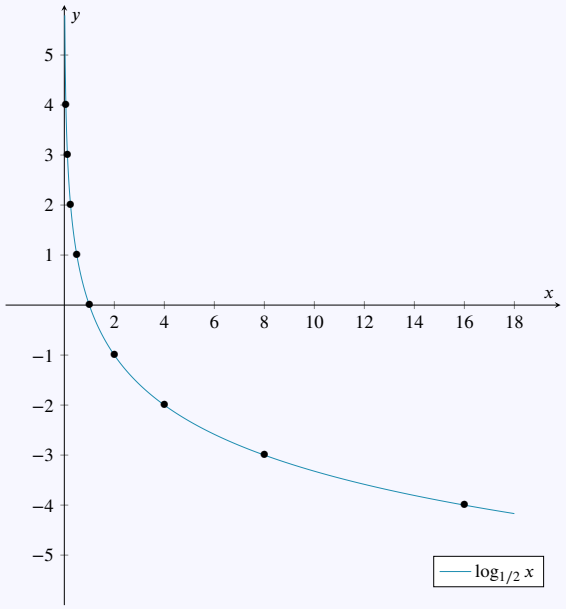
We nemen als voorbeeld $a = \frac{1}{2} = 0.5$. We schetsen de grafiek van de logaritmische functie $\log_{1/2} : x \mapsto \log_{1/2}(x)$ met grondtal $\frac{1}{2}$ door een aantal punten van de grafiek te bepalen. We kunnen dezelfde

CC BY-NC-SA 4.0

tabel hergebruiken:

x	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16
$y = \log_{1/2}(x)$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

Dit levert opnieuw voldoende punten op om de grafiek betrouwbaar te schetsen:



Deze voorbeelden bestudeerden de specifieke grondtallen $a = 2$ en $a = 1/2$, maar ze vertonen een aantal eigenschappen die gelden voor *alle* logaritmische functies:

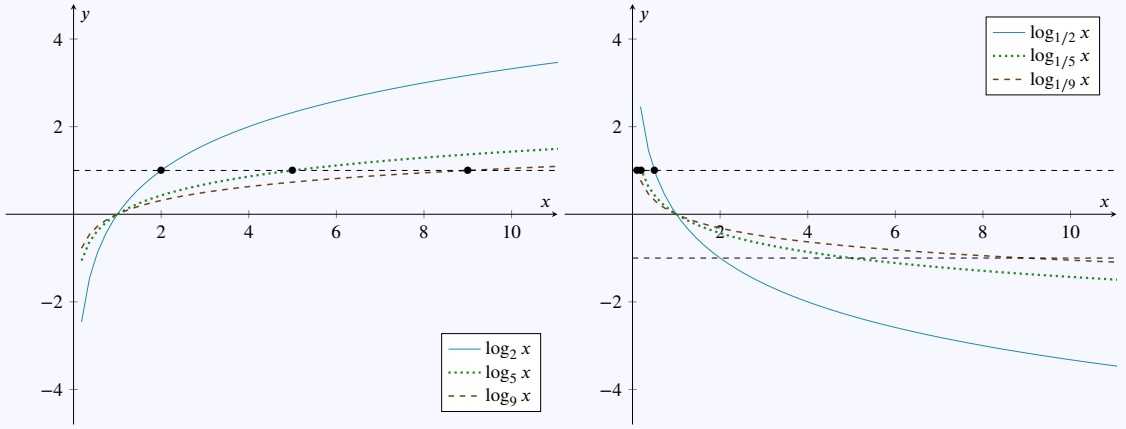
Eigenschap 1 (Logaritmische functies)**.**

- Als $a > 1$ dan is de functie $\log_a$ *strikt stijgend*: $x < y \iff \log_a(x) < \log_a(y)$
- Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\log_a$ *strikt dalend*: $x < y \iff \log_a(x) > \log_a(y)$
- De functie $\log_a$ is enkel gedefinieerd voor $x > 0$, dus het domein van $\log_a$ is $\mathbb{R}_0^+$.
- De functiewaarden $\log_a(x)$ kunnen alle reële waarden aannemen, het beeld van $\log_a$ is dus $\mathbb{R}$.
- De grafiek van $\log_a$ snijdt de x-as steeds in het punt $(1, 0)$ (want $\log_a 1 = 0$)
- De grafiek van $\log_a$ snijdt de y-as niet ($\log_a$ is niet gedefinieerd in 0)
- De grafiek van $\log_a$ snijdt de rechte $y = 1$ in het punt $(a, 1)$ (want $\log_a(a) = 1$)
- De functies $\log_a$ en $\log_{1/a}$ zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de x-as.
- De functies $\log_a$ en $\exp_a$ zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de eerste bissectrice.

Voorbeeld 3.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.38)

Logaritmische functies



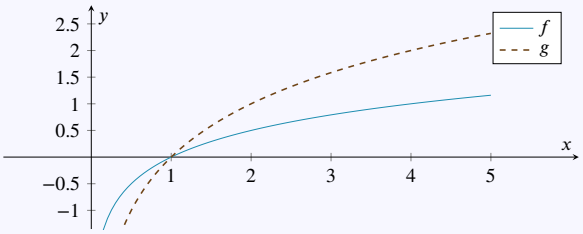
Opmerking 2.

- Als het grondtal a de waarde $e = 2.71\ldots$ heeft, dan schrijven we de functie als ln in plaats van $\log_e$.
- Het domein van $\log_a$ is $\mathbb{R}_0^+$ en het beeld is $\mathbb{R}$.
  Met de uitgebreidere notatie voor functies kunnen we dus ook schrijven
  $$\log_a : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \log_a(x)$$
- $\exp_a$ en $\log_a$ zijn inverse functies.

- We weten nu voor een gegeven *grondtal* a hoe de *grafiek* van een logaritmische functie $\log_a$ er uit ziet. Dat hangt erg af van de waarde van het grondtal a, namelijk of $0 < a < 1$ dan wel $a > 1$.
- Stel nu omgekeerd dat we de *grafiek* hebben van een logaritmische functie en dat we het grondtal willen kennen. Op basis van de vorm kunnen we onmiddellijk bepalen of het grondtal tussen 0 en 1 ligt dan wel groter is dan 1. Om de precieze waarde van a te vinden volstaat het te zoeken naar **de waarde van x die een functiewaarde 1 geeft:** immers, als $\log_a x = 1$, dan $x = a^1 = a$. We zoeken dus de x-coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de horizontale rechte $y = 1$. Ook als de grafiek niet gedetailleerd genoeg is om de exacte waarde van a terug te vinden, blijft een goede schatting wel mogelijk op deze manier.

Voorbeeld 4 (Aflezen grondtal van grafiek)**.**

Hieronder worden de grafieken geschetst van de twee functies $x \mapsto \log_4(x)$ en $x \mapsto \log_2(x)$. We vragen ons af welke grafiek bij welke functie hoort.



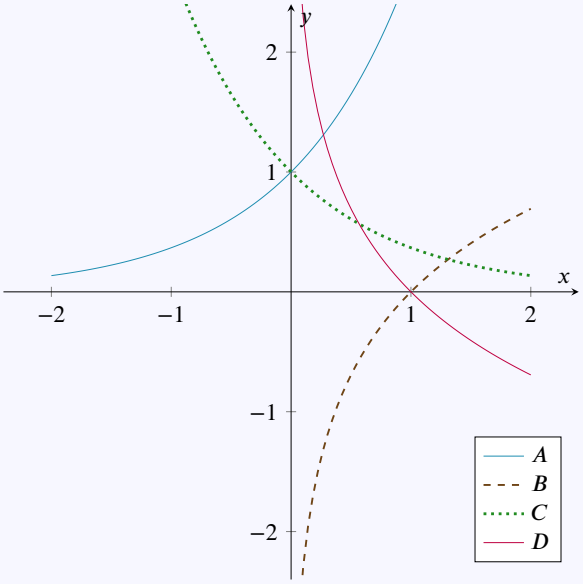
Omdat beide grondtallen groter zijn dan 1, kunnen we beide grafieken niet onderscheiden op grond van hun vorm. We weten echter dat het grondtal terug te vinden is als de x-waarde waarvoor de functiewaarde gelijk is aan 1. We tekenen daarom de horizontale rechte $y = 1$ en kijken waar deze de

CC BY-NC-SA 4.0

twee grafieken snijdt. De x-coördinaat van het snijpunt komt overeen met het grondtal. Het blijkt dat f de grafiek is van $x \mapsto \log_4(x)$ en g de grafiek van $x \mapsto \log_2(x)$.

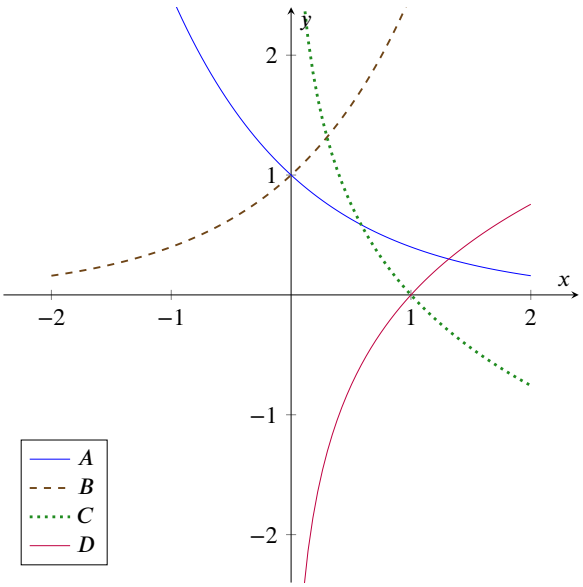
Voorbeeld 5 (Grafiek van $\ln x$)**.**

Welk van onderstaande grafieken is van de functie $x \mapsto \ln(x)$?



Deze vraag kunnen we beantwoorden louter op basis van de vorm van de grafieken. Omdat $x \mapsto \ln(x)$ een logaritmische functie is, is deze enkel gedefinieerd voor strikt positieve waarden van x. Omdat het grondtal $e > 1$, moet de grafiek stijgend zijn. Enkel grafiek B voldoet hieraan.

Oefening 1. Met welke grafieken komen volgende functies overeen ?



CC BY-NC-SA 4.0

Logaritmische functies

1. $x \mapsto \left(\frac{2}{5}\right)^x$: A B C D

2. $x \mapsto \log_{2/5}(x)$: A B C D

3. $x \mapsto \log_{5/2}(x)$: A B C D

4. $x \mapsto \left(\frac{5}{2}\right)^x$: A B C D

Opmerking 3 (Eigenschappen logaritmische functies)**.**

Je kan soms extra eigenschappen van logaritmische functies terugvinden op basis van de rekenregels voor logaritmen. Zo kan je de op het eerste zicht tamelijk ingewikkelde functie $x \mapsto \log_4(2^x)$ herschrijven als

$$\log_4(2^x) = x \cdot \log_4(2) = x \cdot \log_4(4^{\frac{1}{2}}) = x/2.$$

en vaststellen dat $\log_4(2^x)$ gewoon de lineaire functie $x \mapsto \frac{1}{2}x$ is.

Oefening 2. Herschrijf volgende uitdrukkingen zonder exponentiële of logaritmische functies:

1. $4^{\log_2(x)} = \ldots\ldots$

2. $27^{\log_3(x)} = \ldots\ldots$

Voorbeeld 6 (Domein logaritmische functie)**.**

Bepaal het domein van de functie $x \mapsto \log_3\left(\frac{3}{4-x}\right)$. Bepaal dus alle mogelijke reële waarden van x waarvoor het functievoorschrift geldig is.

- De noemer van de breuk binnen de logaritme mag niet nul zijn: $4 - x \neq 0$ en dus $x \neq 4$.
- Een logaritme kan enkel berekend worden voor een strikt positief getal. Dus moet $\frac{3}{4-x} > 0$. Omdat de teller van deze breuk strikt positief is, moet ook de noemer dat zijn: $4 - x > 0$ of $x < 4$.

Alleen als aan deze twee voorwaarden voldaan is, kan de functiewaarde bepaald worden.

Het domein van deze functie is dus het (oneindige) interval $]-\infty, 4[$.

Oefening 3. Bepaal het domein van de functie $y = \ln(\sqrt{2x} - 4)$: $\ldots\ldots$

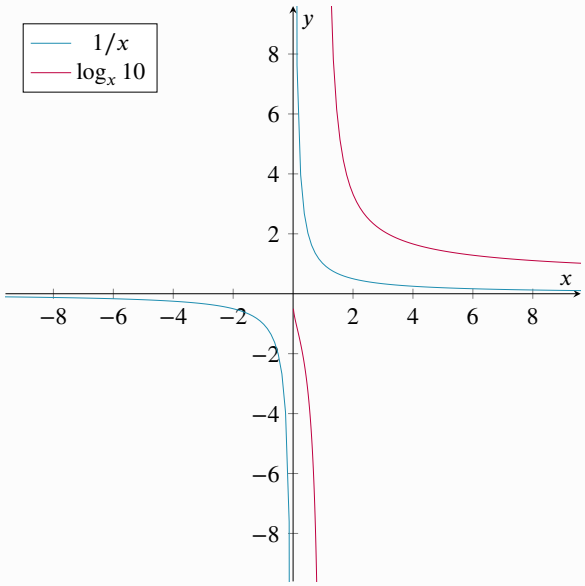
Uitweiding 1. Bij de logaritmische functies laten we in de uitdrukking $\log_a b$ het argument b variëren, en schrijven dan $\log_a x$.
We kunnen natuurlijk ook $\log_x b$ beschouwen, waarbij we dus het grondtal variëren.
Hoe ziet de grafiek van de functie $x \mapsto \log_x b$ eruit ? Uit de rekenregels van logaritmen volgt dadelijk dat

$$\log_x b = \frac{\log_b b}{\log_b x} = \frac{1}{\log_b x}$$

De grafiek van $x \mapsto \log_x b = \frac{1}{\log_b x}$ lijkt enigszins op een verschuiving van de grafiek van $\frac{1}{x}$. De verticale asymptoot bevindt zich bij $x = 1$ (want $\log_b 1 = 0$) en het domein van $\log_x b$ is beperkt tot $\mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$.

CC BY-NC-SA 4.0

Logaritmische functies



CC BY-NC-SA 4.0