Rekenregels voor logaritmen

Veronderstelde voorkennis: breuken en machten

Uit de rekenregels voor machten volgen de rekenregels voor logaritmen.

Omdat $x = a^{\log_a x}$ en $y = a^{\log_a y}$ volgt uit de rekenregel voor het product van machten $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ dat

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}) = \log_a(a^{\log_a x + \log_a y}) = \log_a x + \log_a y$$

Op gelijkaardige manier volgt uit de rekenregel voor de macht van een macht $(a^r)^s = a^{s \cdot r}$ dat

$$\log_a(x^r) = \log_a(\left(a^{\log_a x}\right)^r) = \log_a(a^{r \cdot \log_a x}) = r \log_a x$$

en dus in het bijzonder (voor $r = -1$) dat $\log_a \frac{1}{x} = \log_a x^{-1} = -\log_a x$

Omdat $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$, geldt dus ook $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a \left(x \cdot y^{-1}\right) = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y$.

Voor een willekeurige b geldt ook volgend verband tussen $\log_a x$ en $\log_b x$:

$$\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \cdot \log_b a$$

Samengevat wordt dit:

Eigenschap 1 (Rekenregels logaritmen)**.**

Logaritme van een product: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

of in woorden: *de logaritme van een product is de som van de logaritmen.*

Logaritme van een quotiënt: $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

of in woorden: *de logaritme van een quotiënt is het verschil van de logaritmen.*

Logaritme van een macht: $\log_a(x^s) = s \cdot \log_a x$

of in woorden: *de logaritme zet een macht om in een product.*

Speciaal geval $s = -1$: $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = \log_a x^{-1} = -\log_a x$

Verandering van grondtal: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ of ook $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$

Speciaal geval $b = x$: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

CC BY-NC-SA 4.0

Rekenregels voor logaritmen

Voorbeeld 1.

- $\log_3(7 \cdot y) = \log_3 7 + \log_3 y$
- $\log 500 - \log 5 = \log \dfrac{500}{5} = \log 100 = 2$
- $\log x^{1000} = 1000 \log x$
- $\log_2 17 = \dfrac{\ln 17}{\ln 2}$

Voorbeeld 2.

1. $\log 4 + \log 25 = \log(4 \cdot 25) = \log(100) = 2$

2. $\log_8 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 8} = \dfrac{2}{3}$

3. $\dfrac{\log 16}{\log 2} = \log_2 16 = 4$

4. $\log_5 125 = \log_5(5 \cdot 25) = \log_5 5 + \log_5 25 = 1 + 2 = 3$.
of ook: $\log_5 125 = \log_5(5^3) = 3$.

5. $\log_2\left(\dfrac{32}{4}\right) = \log_2 32 - \log_2 4 = 5 - 2 = 3$
of ook: $\log_2\left(\dfrac{32}{4}\right) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

6. $\ln e^2 - \ln e = \ln\left(\dfrac{e^2}{e}\right) = \ln e = 1$
of ook: $\ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1$

7. $\log_2 4^5 = 5 \cdot \log_2 4 = 5 \cdot 2 = 10$.
of ook: $\log_2 4^5 = \log_2(2^2)^5 = \log_2 2^{10} = 10$.

Waarschuwing 1 (Veelgemaakte fouten)**.** Bekijk grondig volgende uitdrukkingen:

1. $\log_5(20 + 5) \neq \log_5 20 + \log_5 5$

2. $\ln(20 + 5) \neq \ln 20 \cdot \ln 5$

3. $\log_5(30 - 5) \neq \dfrac{\log_5 30}{\log_5 5}$

4. $(\log 10)^3 \neq 3 \cdot \log 10$

5. $2 \ln \dfrac{e}{4} \neq \ln \dfrac{e^2}{4}$

In het algemeen kan je dus niet veel doen met de logaritme van een som (of verschil) (zie 1, 2 en 3).

~~$\log(x + y) = \log x + \log y$~~

~~$\log(x + y) = \log x \cdot \log y$~~

~~$\log(x - y) = \dfrac{\log x}{\log y}$~~

~~$(\log x)^n \neq n \cdot \log x$~~

CC BY-NC-SA 4.0

Rekenregels voor logaritmen

Opmerking 1 (Logaritmen met rekenmachine)**.**

Eenvoudige rekentoestellen kennen soms enkel de functie 'log()'. Je kan hiermee $\log_{10}(25)$ berekenen maar niet bijvoorbeeld $\log_5(25)$. Je kan echter gebruik maken van de formule om van grondtal te veranderen zodat je $\log_5(25)$ kan bereken als $\dfrac{\log 25}{\log 5}$.

In volgende voorbeelden worden de verschillende rekenregels tegelijk gebruikt:

Voorbeeld 3. Schrijf de uitdrukking $2 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_3 y + 0.5 \cdot \log_3 z$ als één logaritme:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_3 y + 0.5 \cdot \log_3 z &= \log_3(x^2) - \log_3(y^3) + \log_3(z^{0.5}) \\ &= \log_3(x^2 z^{0.5}) - \log_3(y^3) \\ &= \log_3\left(\frac{x^2 z^{0.5}}{y^3}\right) \\ &= \log_3\left(\frac{x^2\sqrt{z}}{y^3}\right). \end{aligned}$$

Hierbij hebben we eerst de rekenregel voor machten gebruikt, daarna de rekenregel voor product en tenslotte de rekenregel voor quotiënt.

Voorbeeld 4. Schrijf de uitdrukking $\log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + 2\log_{\frac{1}{5}} z$ als één logaritme:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + 2\log_{\frac{1}{5}} z &= \log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + \log_{\frac{1}{5}}(z^2) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}(xz^2) - \log_{\frac{1}{5}}(yz) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{xz^2}{yz}\right) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{xz}{y}\right). \end{aligned}$$

Opnieuw hebben we gebruik gemaakt van de rekenregel voor machten, de rekenregel voor product en de rekenregel voor quotiënt, in deze volgorde, en tenslotte de breuk binnen de logaritme vereenvoudigd.

Voorbeeld 5. Bereken de waarde van $\log_2 3 - \log_2 12$ zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Dat kan met behulp van de quotiëntregel:

$$\begin{aligned} \log_2 3 - \log_2 12 = \log_2\left(\frac{3}{12}\right) &= \log_2\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \log_2(2^{-2}) = -2. \end{aligned}$$

Een alternatieve manier gebruikt de productregel:

$$\begin{aligned} \log_2 3 - \log_2 12 = \log_2 3 - \log_2(3 \cdot 4) &= \log_2 3 - \log_2 3 - \log_2 4 \\ &= -\log_2(2^2) = -2. \end{aligned}$$

Voorbeeld 6. Als gegeven is dat $\log x = 2.4$ en dat $\log y = -1.1$, bereken dan $\log\left(\sqrt{x} \cdot y^3\right)$.

Dit kan gebeuren op twee manieren.

CC BY-NC-SA 4.0

Eerst gebruiken we de betekenis van de logaritme om x en y te bepalen: $x = 10^{2.4}$ en $y = 10^{-1.1}$. Dan geldt:

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{x}\cdot y^3\right) &= \log\left(\sqrt{10^{2.4}}\cdot(10^{-1.1})^3\right)\\ &= \log\left((10^{2.4/2})\cdot(10^{-1.1\cdot 3})\right)\\ &= \log\left(10^{1.2}\cdot 10^{-3.3}\right)\\ &= \log\left(10^{1.2-3.3}\right)\\ &= \log\left(10^{-2.1}\right) = -2.1.\end{aligned}$$

Anderzijds kunnen we gebruik maken van de rekenregels van logaritmen om de gegeven formule te herschrijven als een uitdrukking in $\log x$ en $\log y$:

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{x}\cdot y^3\right) &= \log\left(x^{0.5}\cdot y^3\right)\\ &= \log(x^{0.5}) + \log(y^3)\\ &= 0.5\cdot\log x + 3\cdot\log y\\ &= 0.5\cdot 2.4 + 3\cdot(-1.1) = 1.2 - 3.3 = -2.1.\end{aligned}$$

Voorbeeld 7. Herschrijf de uitdrukking $\log_a\sqrt{\dfrac{yz^2}{ax}}$ in functie van $\log_a x$, $\log_a y$ en $\log_a z$, weer door gebruik te maken van de rekenregels:

$$\begin{aligned}\log_a\sqrt{\frac{yz^2}{ax}} &= \log_a\left(\frac{yz^2}{ax}\right)^{0.5}\\ &= 0.5\log_a\left(\frac{yz^2}{ax}\right)\\ &= 0.5\cdot\left(\log_a(yz^2) - \log_a(ax)\right)\\ &= 0.5\cdot\left(\log_a y + log_a(z^2) - \log_a a - \log_a x\right)\\ &= 0.5\cdot\left(-\log_a x + \log_a y + 2\log_a z - 1\right).\end{aligned}$$

We schrijven eerst de vierkanstwortel als een macht, passen dan de rekenregel voor machten toe, vervolgens de regel voor quotiënt, de regel voor product en nogmaals de regel voor macht.

CC BY-NC-SA 4.0