Groeimodellen

Wetenschappers bestuderen grootheden die veranderen in de tijd zoals temperatuur, snelheid, winst, consumptieprijzen en bevolkingsaantallen. We gebruiken hier de term **groeimodel** voor twee types erg *regelmatig* groeiende grootheden. Het woord 'groeien' moet niet te letterlijk worden genomen: het kan ook 'krimpen' of 'afnemen' betekenen: dan spreken we van *negatieve groei* of *verval*. In de praktijk groeien grootheden ook veel onregelmatiger en dat kan met behulp van de wiskundige techniek van afgeleiden van functies worden bestudeerd.

In het **lineaire groeimodel** wordt per tijdseenheid een constante term *opgeteld* bij de grootheid, in het **exponentieel groeimodel** wordt de grootheid per tijdseenheid telkens met een constante factor *vermenigvuldigd* (de zogenaamde *groeifactor*).

Definitie 1 (Pseudo-definitie van lineaire en exponentiële groei)**.**

Een grootheid groeit **lineair** als er na elke tijdseenheid een vaste waarde wordt *bijgeteld*. Deze waarde noemen we de **groeisnelheid**.

Een grootheid groeit **exponentieel** als ze na elke tijdseenheid met een vaste waarde wordt *vermenigvuldigd*. Deze waarde noemen we de **groeifactor**.

Merk alvast op dat de waarde die telkens wordt opgeteld ook negatief kan zijn, en de waarde waarmee wordt vermenigvuldigd kleiner kan zijn dan 1. In beide gevallen spreken we over **negatieve groei**.

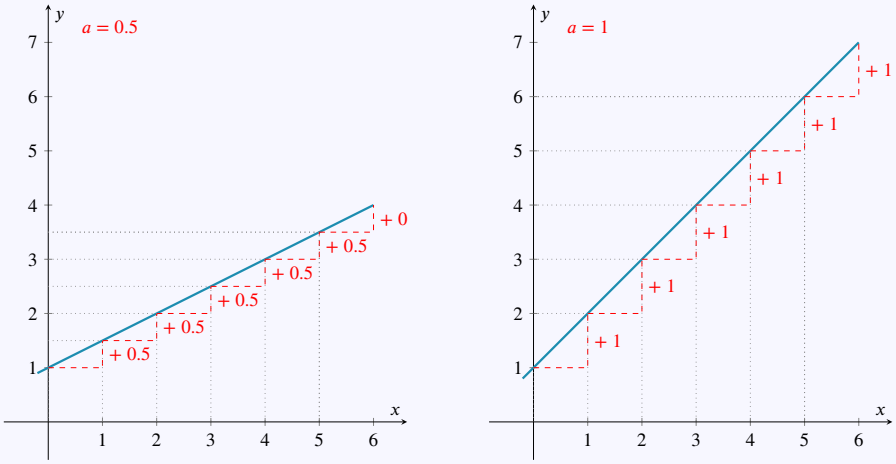
We onderzoeken eerst wat lineaire en exponentiële groei betekenen voor *reële functies*.

Voorbeeld 1 (Lineaire groei)**.**

Voor een reële functie $f : x \mapsto f(x)$ betekent lineaire groei volgens de definitie dat telkens wanneer x met 1 toeneemt, de functiewaarde $f(x)$ ook met een vaste waarde moet toenemen. Als we die waarde a noemen, betekent dat dus dat $f(x+1) = f(x) + a$. Als we de functiewaarde voor $x = 0$ bijvoorbeeld b noemen, dan weten we dat $f(0) = b$, en dus

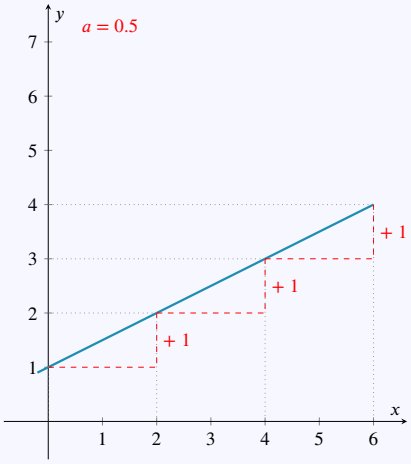
$$\begin{aligned} f(1) &= f(0+1) = f(0) + a = b + a \\ f(2) &= f(1+1) = f(1) + a = (b+a) + a = b + 2a \\ f(3) &= f(2+1) = f(2) + a = (b+2a) + a = b + 3a \\ f(4) &= f(3+1) = f(3) + a = (b+3a) + a = b + 4a. \end{aligned}$$

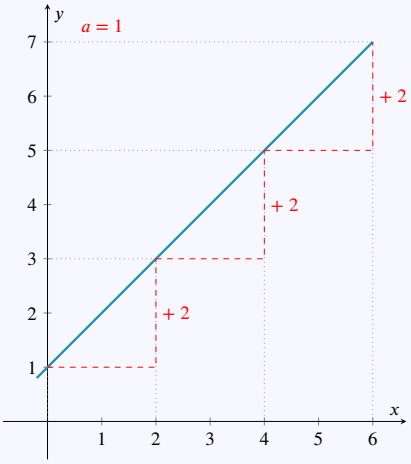
Op de grafiek van f ziet dit er als volgt uit:



Merk op dat ook steeds $f(x+2) = f((x+1)+1) = f(x+1) + a = f(x) + a + a = f(x) + 2a$:

CC BY-NC-SA 4.0



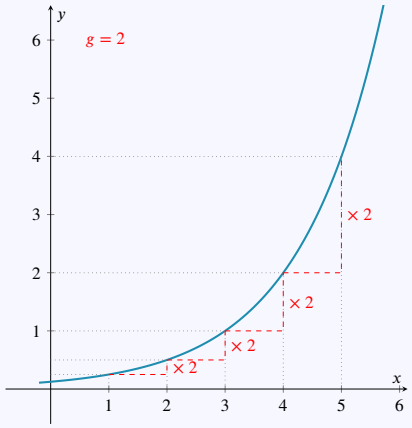


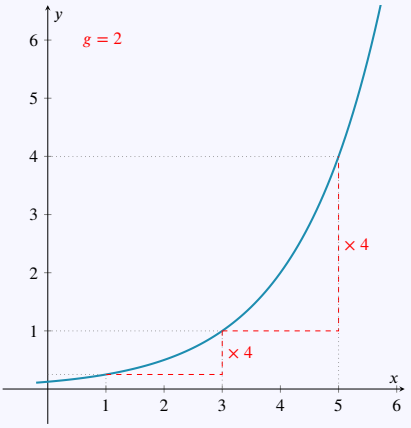
Voorbeeld 2 (Exponentiële groei)**.**

Voor een reële functie $f : x \mapsto f(x)$ betekent exponentiële groei volgens de definitie dat telkens wanneer x met 1 toeneemt, de functiewaarde $f(x)$ met een vaste waarde moet vermenigvuldigd worden. Als we die waarde g noemen, betekent dat dus dat $f(x+1) = gf(x)$. Als we de functiewaarde voor $x = 0$ bijvoorbeeld b noemen, dan weten we dat $f(0) = b$, en dus

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0+1) = f(0) \cdot g = b \cdot g \\ f(2) &= f(1+1) = f(1) \cdot g = (b \cdot g) \cdot g = b \cdot g^2 \\ f(3) &= f(2+1) = f(2) \cdot g = (b \cdot g^2) \cdot g = b \cdot g^3 \\ f(4) &= f(3+1) = f(3) \cdot g = (b \cdot g^3) \cdot g = b \cdot g^4. \end{aligned}$$

Op de grafiek van f ziet dit er als volgt uit:





Merk op dat dus ook geldt dat $f(x+2) = f((x+1)+1) = gf(x+1) = g^2 f(x)$.

We gebruiken de letter a voor de groeisnelheid bij lineaire groei en de letter g voor de groeifactor bij exponentiële groei.

Eigenschap 1.

Het functievoorschrift van een reële functie met *lineaire groei* met **beginwaarde** b en **groeisnelheid**

CC BY-NC-SA 4.0

Groeimodellen

a is

$$f(t) = at + b.$$

Het functievoorschrift van een reële functie met *exponentiële groei* met **beginwaarde** b en **groeifactor** g is

$$f(t) = b \cdot g^t.$$

Hierbij veronderstellen we $a \neq 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

Opmerking 1.

- De groeifactor wordt soms ook met de letter a genoteerd, of de variabele van de functie met de letter x. Dan krijg je als functievoorschrift

$$f(t) = b \cdot a^t \text{ of } f(x) = b \cdot a^x.$$

- Zowel voor lineaire als voor exponentiële groei is b de *begin*waarde: voor $t = 0$ is telkens $f(0) = b$.

Oefening 1.

1. Teken de grafiek van een functie met lineaire groei met beginwaarde 4 waarbij de groeisnelheid 0 zou zijn.

Teken ook de grafiek van een functie met exponentiële groei met beginwaarde 4 waarbij de groeifactor 1 zou zijn.

Besluit: De groeisnelheid a bij lineaire groei moet verschillend zijn van 0, en de groeifactor g bij exponentiële groei moet verschillend zijn van 1, want anders krijgen we *constante* functies. Een constante functie noemen we *geen* lineaire of exponentiële groei.

Eigenschap 2.

- Als bij lineaire groei een functie over één tijdseenheid groeit met a, dan groeit ze met $n \cdot a$ over n tijdseenheden, want

$$f(t+n) = a(t+n) + b = at + an + b = f(t) + an$$

- Als bij exponentiële groei een functie over één tijdseenheid groeit met een groeifactor g, dan groeit ze met een factor g^n over n tijdseenheden, want

$$f(t+n) = b \cdot g^{t+n} = b \cdot g^t \cdot g^n = g^n \cdot f(t).$$

- Een lineaire groeifunctie stijgt als $a > 0$ en daalt als $a < 0$.
- Een exponentiële groeifunctie stijgt als $g > 1$ en daalt als $g < 1$.

Oefening 2 (Lineaire groei: constante toevoer van zand)**.**

In een zandgroeve voert een lopende band aan een constant debiet van 3/5 ton per kwartier nieuw zand toe. Stel dat de band om 8 uur 's morgens begint een bestaande zandhoop van 2 ton zand aan te vullen volgens dit proces. Om hoe laat zal de zandhoop dan 10 ton zand bevatten?

We vertalen deze gegevens wiskundig als volgt: we meten de tijd t in eenheden van één kwartier en

CC BY-NC-SA 4.0

laten $t = 0$ overeenkomen met 8 uur 's morgens. De hoeveelheid zand op de hoop (in ton) op het ogenblik t geven we aan met $f(t)$.

Zo komen we tot volgend schema:

t kwartier	0	$\overbrace{}^{+1}$ 1	2	$\overbrace{}^{+1}$ 3	4	$\cdots$	n
$f(t)$ ton	2	$2+\frac{3}{5}$	$2+2\cdot\frac{3}{5}$	$2+3\cdot\frac{3}{5}$	$2+4\cdot\frac{3}{5}$	$\cdots$	$2+n\cdot\frac{3}{5}$
		$\underbrace{}_{+\frac{3}{5}}$		$\underbrace{}_{+\frac{3}{5}}$			

We stellen vast dat voor elk natuurlijk getal n geldt

$$f(n) = \frac{3}{5}\,n + 2.$$

Omdat de tijd niet in sprongen van een kwartier verloopt, maar alle tussenwaarden aanneemt, kunnen we aannemen dat ook voor elk reëel getal t zal gelden dat

$$f(t) = \frac{3}{5}\,t + 2.$$

1. Teken de grafiek van deze functie f en geef de betekenis van de grootheden 2 en $\frac{3}{5}$ in de grafiek aan.

2. Verklaar de uitdrukking "lineaire groei".

3. Bereken hoe laat de zandhoop 10 ton zal bevatten.

Oefening 3 (Exponentiële groei: bacteriën)**.**

Een populatie bacteriën ontwikkelt zich in een kweekschaal. Stel dat het aantal bacteriën in het schaaltje elke 25 minuten verdubbelt en stel dat er in de beginsituatie vierduizend bacteriën aanwezig zijn. Hoe verloopt de groei van deze populatie bacteriën?

Om deze gegevens wiskundig te vertalen maken we volgende afspraken:

- We meten de tijd t in eenheden van 25 minuten.
- $t = 0$ komt overeen met het begin van onze observaties.
- De hoeveelheid bacteriën op het ogenblik t drukken we uit in duizendtallen en geven we aan met $f(t)$.

Zo komen we tot volgend schema:

t (per 25 min.)	0	$\overbrace{}^{+1}$ 1	2	$\overbrace{}^{+1}$ 3	4	$\cdots$	n
$f(t)$ bacteriën (per 10^3)	4	$4\cdot 2$	$4\cdot 2^2$	$4\cdot 2^3$	$4\cdot 2^4$	$\cdots$	$4\cdot 2^n$
		$\underbrace{}_{\times 2}$		$\underbrace{}_{\times 2}$			

We stellen vast dat voor elk natuurlijk getal n geldt

$$f(n) = 4 \cdot 2^n.$$

CC BY-NC-SA 4.0

Hierin is $4 = f(0)$ de beginwaarde en de groeifactor (over 25 minuten) is in dit geval $g = 2$.

Omdat niet alle bacteriën gelijktijdig splitsen, is het aan te nemen dat de groei niet enkel gebeurt op de tijdstippen $0, 1, 2, 3 \ldots$ maar ook op elk moment tussen die tijdstippen. We kunnen bijvoorbeeld op zoek gaan naar het aantal bacteriën na 5 minuten ($\frac{1}{5}$ van de splitsingstijd) of na 50 minuten (het dubbele van de splitsingstijd).

1. Met welke factor groeit de functie over $\frac{1}{5}$ van een tijdseenheid? $\boxed{\frac{2}{5}}$ $\boxed{\sqrt[5]{2}}$ $\boxed{\sqrt{2}}$ $\boxed{\log_5 2}$.

2. Met welke factor groeit de functie over 2 tijdseenheden? ... .

3. Met welke factor groeit de functie over een uur, dus over $\frac{12}{5}$ tijdseenheden? ... ...

4. Schets de grafiek van deze functie.

Voorbeeld 3 (Groei met procentuele toename of afname)**.**

Als in een vijver het aantal vissen elk jaar met 30% toeneemt, is dat dan een voorbeeld van lineaire groei of van exponentiële groei?

Het lijkt alsof er een vaste toename is per tijdsinterval (namelijk telkens $+30\%$), en dus zouden we kunnen denken dat dit proces beschreven kan worden met een lineaire groei. Maar klopt dit wel?

Neen, de vaste toename is een **procentuele toename**, dit betekent dat als we de tijd t in jaren uitdrukken en $f(t)$ de hoeveelheid vissen op het ogenblik t voorstelt, we voor elk tijdstip t hebben dat:

$$f(t+1) = f(t) + (30\,\% \text{ van } f(t)) = f(t) + \frac{30}{100} f(t) = (1 + \frac{30}{100}) f(t).$$

We vinden dat dit proces een exponentieel proces is en dat de groeifactor per jaar $(1 + \frac{30}{100}) = 1.3$ bedraagt.

Eigenschap 3 (Groei met procentuele toename of afname)**.**

De **procentuele toename** p en de **groeifactor** g zijn verbonden via de formule

$$g = \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Hieruit volgt dat :

positieve groei:	procentuele toename p positief	$\Leftrightarrow$	groeifactor g groter dan 1
negatieve groei:	procentuele toename p negatief	$\Leftrightarrow$	groeifactor g kleiner dan 1

Een groei met procentuele toename $p = 0\%$ sluiten we uit, want dat zou een groeifactor gelijk aan 1 geven.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.28)