Exponentiële vergelijkingen

Een **exponentiële vergelijking** is een vergelijking waarbij de onbekende minstens één keer voorkomt in de *exponent* van een uitdrukking.
Voorbeelden van dergelijke vergelijkingen zijn $3^x - 81 = 0$, $3^x = 81x$ en $2^x = 4 \cdot 3^{x-1}$.

Niet alle exponentiële vergelijkingen kunnen exact opgelost worden. Voor de oplossing van $3^x = 81x$ bestaat bijvoorbeeld geen exacte formule. Als een exponentiële vergelijking *wel* exact kan worden opgelost, wordt ergens in de berekening de *logaritme* gebruikt om *de onbekende uit de exponent te verdrijven*. We illustreren enkele oplossingsmethoden aan de hand van onderstaande voorbeelden.

Voorbeeld 1. Los op naar x: $3^x - 81 = 0$.

In deze vergelijking komt de onbekende x slechts één keer voor, en wel als exponent. Dergelijke vergelijkingen zijn eenvoudig op te lossen door de macht waarbij x in de exponent voorkomt te isoleren en dan een gepaste logaritme te nemen:

$$\begin{aligned} 3^x - 81 &= 0 && \\ 3^x &= 81 && \text{(breng naar het andere lid)} \\ \log_3(3^x) &= \log_3 81 && \text{(neem links en rechts } \log_3\text{)} \\ x &= \log_3 3^4 = 4 && \text{(want } \log_3 3^x = x, \text{ en } 81 = 9^2 = 3^4\text{)} \end{aligned}$$

Omdat x voorkomt als exponent met grondtal 3 werd hier de logaritme met grondtal 3 toegepast op linker- en rechterlid. Maar omdat *elke* logaritme exponenten voorop brengt, kan je het grondtal van de logaritme eigenlijk kiezen. Hieronder is dezelfde vergelijking opgelost met de logaritme log met grondtal 10 en met de natuurlijk logaritme ln:

$$\begin{aligned} 3^x &= 81 \\ \log(3^x) &= \log 81 \\ x \cdot \log 3 &= \log 81 \\ x &= \frac{\log 81}{\log 3} \end{aligned} \qquad \text{of ook} \qquad \begin{aligned} 3^x &= 81 \\ \ln(3^x) &= \ln 81 \\ x \cdot \ln 3 &= \ln 81 \\ x &= \frac{\ln 81}{\ln 3} \end{aligned}$$

Het resultaat ziet er telkens anders uit, maar het is wel degelijk steeds dezelfde oplossing $x = 4$, want uit de formule voor verandering van grondtal bij logaritmen volgt dat

$$\frac{\ln 81}{\ln 3} = \frac{\log 81}{\log 3} = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4.$$

Voorbeeld 2. Los op naar x: $3^x = 81x$.

In deze vergelijking komt de onbekende x twee keer voor: eenmaal in de exponent van een macht met grondtal 3 in het linkerlid en eenmaal als lineaire term in het rechterlid. Dergelijke vergelijking is in het algemeen niet exact op te lossen. Uit het vorige voorbeeld blijkt dat de onbekende x uit de exponent kan gehaald worden door een logaritme toe te passen. Laat ons dat doen in dit geval:

$$\begin{aligned} 3^x &= 81x && \\ \log_3(3^x) &= \log_3(81x) && \text{(neem links en rechts } \log_3\text{)} \\ x &= \log_3 81 + \log_3 x && (\log_3 3^x = x, \log ab = \log a + \log b) \\ x &= 4 + \log_3 x && (81 = 3^4) \end{aligned}$$

De onbekende is nu uit de exponent verdwenen, maar er is een nieuwe complicatie: de onbekende komt nu voor binnen de logaritme. Je zou de onbekende x uit de logaritme kunnen krijgen door een exponentiële functie te gebruiken. Maar dan wordt de x in het linkerlid terug een exponent. Een exacte oplossing is op deze manier niet mogelijk. Er bestaan wel technieken om de vergelijking *benaderend* op te lossen, maar deze behoren niet tot de leerstof van deze cursus. Men kan aantonen dat er een unieke oplossing is: $x \approx 0.0125\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

Voorbeeld 3. Los op naar x: $2^x = 4 \cdot 3^{x-1}$.

In deze vergelijking komt de onbekende twee keer voor, telkens in de exponent van een macht, maar voor twee verschillende grondtallen. Dergelijk vergelijking kan op twee manieren worden opgelost.

De eerste oplossingsmethode herschrijft de vergelijking zodanig dat er maar één macht meer voorkomt. We kunnen dan, zoals in het eerste voorbeeld, eenvoudigweg de logaritme nemen om de vergelijking op te lossen.

$$\begin{aligned} 2^x &= 4 \cdot 3^{x-1} = 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} = \frac{4}{3} \cdot 3^x && \text{(rechterlid herschrijven)} \\ \frac{2^x}{3^x} &= \frac{4}{3} && \text{(breng onbekenden naar linkerlid)} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x &= \frac{4}{3} && \left(\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x\right) \\ x &= \log_{2/3}\left(\frac{4}{3}\right) \approx -0.7095\ldots && \text{(bereken met een rekentoestel)} \end{aligned}$$

Een tweede oplossingsmethode bestaat erin de logaritme te nemen van linker- en rechterlid met de bedoeling van de onbekende x uit de exponenten te halen. Uit het eerste voorbeeld weten we dat het grondtal van de logaritme geen belang heeft. We gebruiken hier de logaritme met grondtal 10. We krijgen in dit geval een *lineaire* vergelijking in x die we zonder problemen kunnen oplossen.

$$\begin{aligned} 2^x &= 4 \cdot 3^{x-1} \\ \log(2^x) &= \log(4 \cdot 3^{x-1}) = \log 4 + \log(3^{x-1}) \\ x \cdot \log 2 &= \log 4 + (x-1) \cdot \log 3 = x \cdot \log 3 + (\log 4 - \log 3) \\ x \cdot \log 2 - x \cdot \log 3 &= \log 4 - \log 3 \\ x \cdot (\log 2 - \log 3) &= \log 4 - \log 3 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\log 4 - \log 3}{\log 2 - \log 3}.$$

Opnieuw ziet de gevonden oplossing er helemaal anders uit dan wat we met de eerste oplossingsmethode hebben gevonden. Met behulp van de rekenregels voor logaritmen kan je echter zien dat beide oplossingen gelijk zijn.

Oefening 1. Los op naar x:

1. $3 \cdot 2^{x/2} - 7 = 14$. Oplossing: $x \approx \ldots\ldots$

2. $2 \cdot 0.99^x = 0.5 \cdot 1.05^x$. Oplossing: $x \approx \ldots\ldots$

3. $2^{3x-5} = 5^x$. Oplossing: $x \approx \ldots\ldots$

Oefening 2. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $e^{2x} + e^x - 6 = 0$ $\quad x = \ldots\ldots$

2. $e^x - 4e^{-x} = 3$ $\quad x = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0