Exponentiële functies

Met twee positieve getallen a en r kunnen we altijd een derde getal a^r construeren. We noemen a het grondtal, r de exponent en a^r de macht (die gelezen wordt als *a tot de r-de macht*). Door nu één van beide getallen constant te houden en het andere in waarde te laten variëren kunnen we twee soorten *functies* definiëren.

- We kunnen een vaste waarde geven aan de exponent, bv. $r = 2$, en het *grondtal laten variëren*. Het is in de wiskunde de gewoonte om variërende grootheden (ook 'variabelen' genoemd) aan te duiden met de letter x. Op deze manier bekomen we de functie

  $$f : x \mapsto x^2 \quad (a^r \text{ met } r = 2).$$

  Op dezelfde manier bekomen we ook de functies

  $$f : x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x} \quad (a^r \text{ met } r = -1)$$

  of

  $$f : x \mapsto x^{1/2} = \sqrt{x} \quad (a^r \text{ met } r = 1/2)$$

  of

  $$f : x \mapsto x^r \quad (a^r \text{ met r vast gekozen}).$$

- Als we een vaste waarde geven aan het grondtal, bv. $a = 2$, kunnen we de *exponent laten variëren*. We kiezen weer voor de traditionele letter x voor de variërende grootheid (de 'variabele') en bekomen de functie

  $$f : x \mapsto 2^x \quad (a^r \text{ met } a = 2).$$

  Deze functie noemen we een *exponentiële functie*, en we noteren ze ook als $\exp_2$:

  $$\exp_2 : x \mapsto 2^x \quad (a^r \text{ met } a = 2).$$

  Op dezelfde manier bekomen we bijvoorbeeld ook de functies

  $$\exp_{10} : x \mapsto 10^x \quad (a^r \text{ met } a = 10)$$

  of

  $$\exp_a : x \mapsto a^x \quad (a^r \text{ met } a > 0 \text{ en } a \neq 1).$$

Definitie 1 (Exponentiële functie)**.**

De **exponentiële functie met grondtal** a (met $a > 0$ en $a \neq 1$), genoteerd als $\exp_a$, is de reële functie

$$\exp_a : x \mapsto a^x$$

waarbij x alle reële waarden mag aannemen.

Opmerking 1.

- In de praktijk worden zowel de notaties a^x als $\exp_a(x)$ gebruikt voor exponentiële functies.
- Er moeten beperkingen worden opgelegd aan mogelijke grondtallen a van een exponentiële functie:
  - a mag niet negatief zijn, want dat geeft problemen voor niet-gehele waarden van de exponent x (bv. $(-3)^{\frac{1}{2}}$)
  - a mag niet gelijk zijn aan 0, want dat geeft problemen voor negatieve exponenten x (bv. $0^{-1} = 1/0$)

CC BY-NC-SA 4.0

– a mag niet gelijk zijn aan 1, want $1^x = 1$ voor alle x, en de functie $f : x \mapsto 1^x = 1$ is een *constante functie* met waarde 1. Om technische redenen is het beter die functie niet te beschouwen als een exponentiële functie.

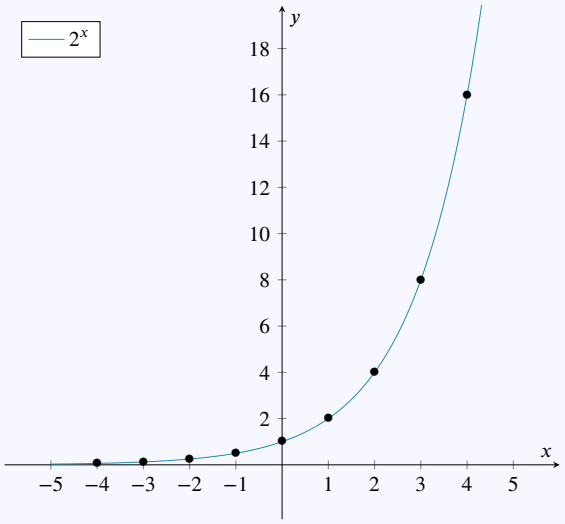
We bestuderen nu de *grafiek* van een exponentiële functie $\exp_a$. Het zal blijken dat er een belangrijk onderscheid is tussen de gevallen a groter dan 1 en a tussen 0 en 1.

Voorbeeld 1 (Het geval $a > 1$: grafiek van de exponentiële functie $\exp_2$)**.**

We nemen als voorbeeld $a = 2$. We schetsen de grafiek van de exponentiële functie $\exp_2 : x \mapsto 2^x$ met grondtal 2 door een aantal punten van de grafiek te bepalen.
In onderstaande tabel staan de functiewaarden voor $x = -4, -3, \ldots, 3, 4$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16

Dit levert een aantal punten op op de gezochte grafiek (zie de bolletjes op de figuur). Met een rekentoestel kunnen we ook functiewaarden berekenen voor niet-gehele waarden van x, bv. $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1.4142$. Op die manier krijgen we een vrij precies beeld van de grafiek:



Voorbeeld 2 (Het geval $0 < a < 1$: grafiek van de exponentiële functie $\exp_{\frac{1}{2}}$)**.**

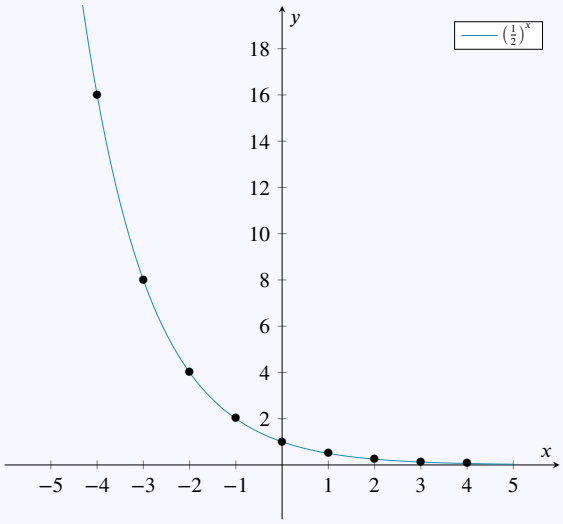
We nemen als voorbeeld $a = \frac{1}{2} = 0.5$. We schetsen de grafiek van de exponentiële functie $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ met grondtal $\frac{1}{2}$ door een aantal punten op de grafiek te bepalen.
In onderstaande tabel staan de functiewaarden voor $x = -4, -3, \ldots, 3, 4$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125	0.0625

Dit levert weer een aantal punten op op de grafiek. Met een rekentoestel kunnen we opnieuw functiewaarden voor niet-gehele waarden van x berekenen, bv. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.7071$. Op die

CC BY-NC-SA 4.0

manier krijgen we weer een vrij precies beeld van de grafiek:



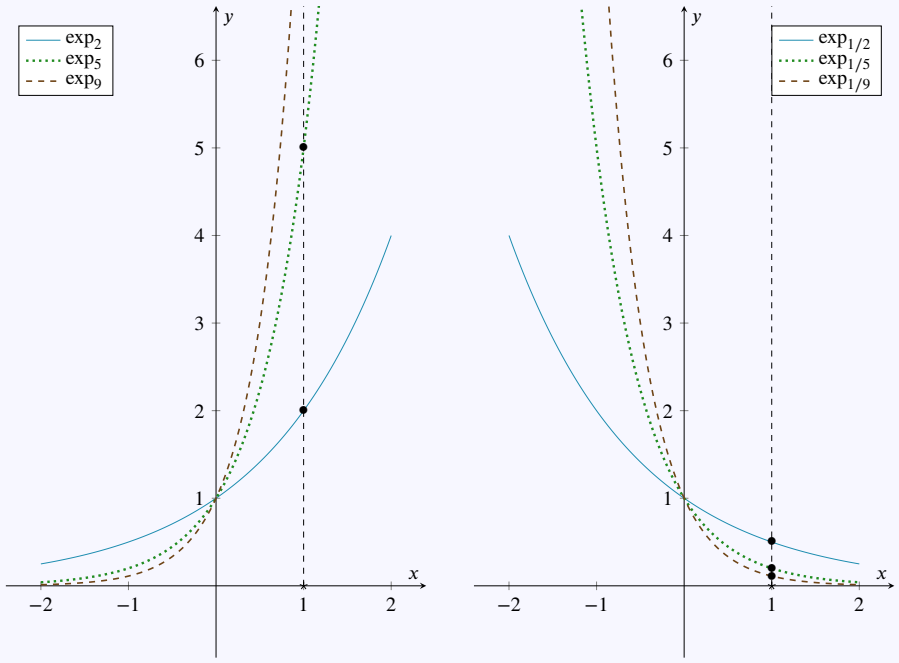
Deze voorbeelden bestudeerden de specifieke grondtallen $a = 2$ en $a = \frac{1}{2}$, maar ze vertonen een aantal eigenschappen die gelden voor *alle* exponentiële functies:

Eigenschap 1 (Exponentiële functies)**.**

- Als $a > 1$ dan is de functie $\exp_a$ *strikt stijgend*: $x < y \iff a^x < a^y$
- Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\exp_a$ *strikt dalend*: $x < y \iff a^x > a^y$
- De functie $\exp_a$ is gedefinieerd voor alle reële getallen x, dus het domein van $\exp_a$ is $\mathbb{R}$.
- De functiewaarden $\exp_a(x)$ zijn strikt positief, het beeld van $\exp_a$ is $\mathbb{R}_0^+$.
- De grafiek van $\exp_a$ snijdt de y-as steeds in het punt $(0, 1)$ (want $a^0 = 1$).
- De grafiek van $\exp_a$ snijdt de x-as niet ($\exp_a$ heeft geen nulpunten).
- De grafiek van $\exp_a$ snijdt de rechte $x = 1$ in het punt $(1, a)$ (want $a^1 = a$).

Voorbeeld 3.

CC BY-NC-SA 4.0



Opmerking 2.

Het domein van $\exp_a$ is $\mathbb{R}$ en het beeld is $\mathbb{R}_0^+$.

Met de uitgebreidere notatie voor functies kunnen we dus ook schrijven

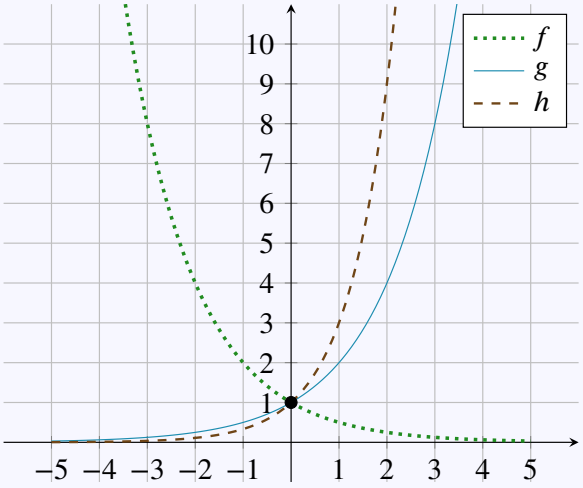
$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto a^x.$$

- We weten nu voor een gegeven *grondtal* a hoe de *grafiek* van $\exp_a$ er uit ziet. Dat hangt erg af van de waarde van het grondtal a, namelijk of $0 < a < 1$ dan wel $a > 1$. Het geval $a = 1$ is een constante functie $x \mapsto 1$. Dit is het grensgeval tussen dalende functies voor $a < 1$ en stijgende functies voor $a > 1$.
- Stel nu omgekeerd dat we de *grafiek* krijgen van een exponentiële functie en dat we het *grondtal* willen kennen. Op basis van de vorm van de grafiek kunnen we onmiddellijk bepalen of het grondtal tussen 0 en 1 ligt dan wel groter is dan 1. Maar er is meer: **het grondtal a is de y-coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de verticale rechte door** $(1, 0)$. Inderdaad, dat snijpunt heeft een y-waarde gelijk aan de functiewaarde voor $x = 1$ en die is $\exp_a(1) = a^1 = a$. Zelfs als we de *exacte* waarde niet kunnen aflezen op de grafiek, is minstens een goede schatting meestal wel mogelijk.

Voorbeeld 4 (Onderscheiden van exponentiële functies)**.**

Hieronder worden de grafieken geschetst van drie functies $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x \mapsto 2^x$ en $x \mapsto 3^x$. We vragen ons af welke grafiek bij welke functie hoort.

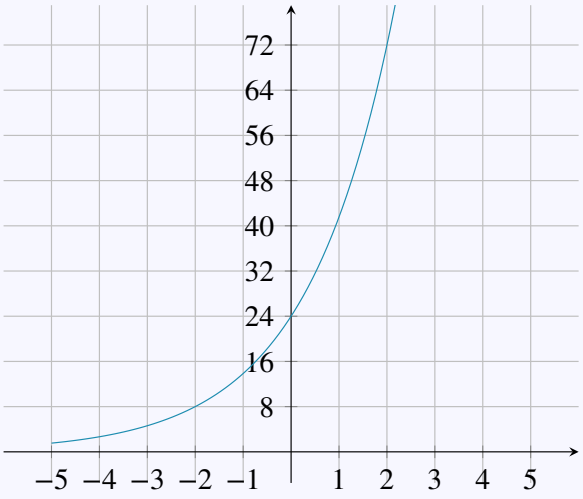
CC BY-NC-SA 4.0



We kunnen eerst de grafieken onderscheiden op grond van hun vorm. De grafieken van g en h zijn stijgend, hun grondtal is dus groter dan 1. De grafiek van f is dalend, dus is dat grondtal kleiner dan 1. Daarmee is het functievoorschrift van f gevonden, want er is maar één keuzemogelijkheid met $a < 1$, namelijk $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
Om de grafieken van g en h te onderscheiden, kijken we naar de y-waarde voor $x = 1$: $g(1) = 2$ en $h(1) = 3$. h is dus de functie $x \mapsto 3^x$ en g is de functie $x \mapsto 2^x$.
Je kan ook redeneren dat 3 groter is dan 2 waardoor de functie $x \mapsto 3^x$ sneller stijgt dan de functie $x \mapsto 2^x$ en dat daarom h bij $x \mapsto 3^x$ moet horen.

Voorbeeld 5 (Bepalen functievoorschrift)**.**

Stel dat we weten dat onderstaande tekening de grafiek is van een functie $f(x) = ba^x$, met a, b reële getallen. De punten $(-2, 8)$ en $(0, 24)$ behoren tot de grafiek. We willen het functievoorschrift bepalen, dus a en b vinden.



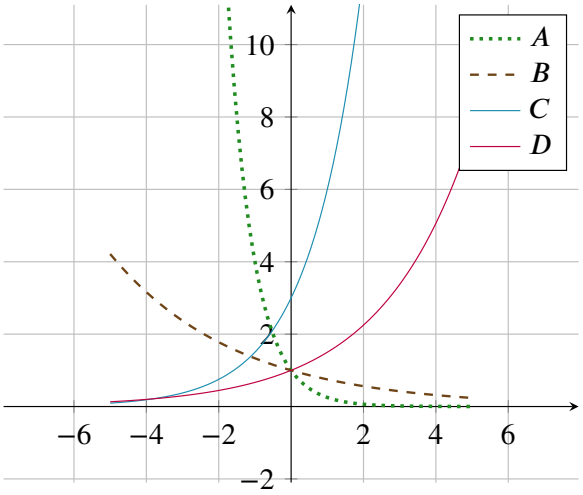
We weten dat $f(0) = 24$ en dat $f(-2) = 8$. Uit $24 = f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1$ volgt dat $b = 24$. Hiermee vinden we dan dat $f(-2) = 24 \cdot a^{-2} = 8$, dus dat $a^2 = 3$ of $a = \sqrt{3}$.

Merk op dat $a = -\sqrt{3}$ onmogelijk is, want bij een exponentiële functie moet het grondtal a positief

CC BY-NC-SA 4.0

zijn.

Oefening 1. Met welke grafieken komen volgende functies overeen ?



1. $x \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^x$: | A | B | C | D |

2. $x \mapsto \left(\frac{3}{4}\right)^x$: | A | B | C | D |

3. $x \mapsto 3 \cdot 2^x$: | A | B | C | D |

4. $x \mapsto \left(\frac{1}{4}\right)^x$: | A | B | C | D |

Oefening 2.

1. Als $a > 1$, dan is $\exp_a$ een | stijgende | dalende | niet (altijd) gedefinieerde | functie.

2. Als $0 < a < 1$, dan is $\exp_a$ een | stijgende | dalende | niet (altijd) gedefinieerde | functie.

3. Als $\exp_a$ een dalende functie is, dan is | $a > 1$ | $0 < a < 1$ | $a = 1$ |.

4. Als $\exp_a$ een stijgende functie is, dan is | $a > 1$ | $0 < a < 1$ | $a = 1$ |.

5. Als $\exp_a$ een constante functie is, dan is | $a > 1$ | $0 < a < 1$ | $a = 1$ |.

Wanneer we als grondtal a de specifieke waarde $e = 2,7182818\ldots$ kiezen, dan verkrijgen we een veel voorkomende exponentiële functie $x \mapsto e^x$, die we meestal *de* exponentiële functie noemen. We noteren deze functie niet met $\exp_e$ maar met exp.

Definitie 2 (*De* exponentiële functie)**.** De functie

$$\exp : x \mapsto e^x$$

noemen we *de* exponentiële functie en wordt genoteerd zonder subscript e.

CC BY-NC-SA 4.0

Uitweiding 1 (Waarom noemen we e^x *de* exponentiële functie)**.** De definitie hierboven gebruikt het getal e om de exponentiële functie te definiëren. Eigenlijk is het eerder andersom: *de exponentiële functie is die functie waarvan de afgeleide gelijk is aan zichzelf*. Men kan nagaan dat er een functie bestaat waarvan de afgeleide precies gelijk is aan zichzelf en dat dit geldt voor een exponentiële functie met een welbepaald grondtal dan men e heeft genoemd. Men kan dus stellen dat het niet zozeer het getal e is dat *de* exponentiële functie definieert, maar dat het eerder *de* exponentiële functie is die het getal e definieert.

Als we in de gelijkheid

$$x = e^{\ln x}$$

x vervangen door a^x dan bekomen we

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

Hiermee kunnen we een *willekeurige* exponentiële functie $x \mapsto a^x$ herschrijven in termen van *de* exponentiële functie $x \mapsto e^x$.

Voorbeeld 6. De functie $x \mapsto 3^x$ kunnen we ook noteren als de functie $x \mapsto e^{\ln 3\, x}$.

CC BY-NC-SA 4.0