Oefeningen groeimodellen en exponentiële en logaritmische functies

0.1 Niveau 1

Oefening 1. Elk schooljaar daalt de prijswaarde van een handboek wiskunde. Concreet verkoopt een leerling zijn handboek aan een leerling van een lager jaar voor $\frac{2}{3}$ van de prijs die hijzelf een jaar voordien voor het boek heeft betaald. Met andere woorden, de prijs daalt per jaar met $\frac{1}{3}$. Stel dat het handboek wiskunde oorspronkelijk voor 16 euro aangekocht werd in de boekhandel.

1. De groeifactor per tijdseenheid van een jaar = … …

2. Het functievoorschrift voor de prijs p van het handboek in functie van de tijd t in jaren is

$$p(t) = \ldots\ldots$$

3. Het handboek wordt na 5 jaar verkocht aan … … euro.

4. Maak een grafiek van deze functie voor de 5 eerst jaren.

0.2 Niveau 2

Oefening 2. Men maakt een studie over de bevolking van de stad Oostende. Het stadsbestuur neemt aan dat de bevolking exponentieel groeit. De tellingen zijn begonnen in 1995, maar deze resultaten zijn verloren gegaan. In 1997 waren er ongeveer 68000 inwoners; in 2001 is dit gegroeid tot 73000. Hoeveel mensen waren er, op basis van de gegevens, vermoedelijk in 1995?… …

Oefening 3. Op een spaarrekening met samengestelde intrest - waarbij de intrest dus maandelijks wordt toegevoegd aan het kapitaal - hebben je ouders bij je geboorte een startkapitaal van 20000 euro gezet. De rente bedroeg $0,12\%$ per maand.

1. Hoeveel geld stond er na 6 maanden op die rekening? … …

2. Hoeveel bedroeg de rentevoet (procentueel) per jaar? … …

3. Hoeveel stond er op de spaarrekening na 10 jaar? … …

Oefening 4. Los $2^{3x-5} = 5^x$ op naar x. … …

Oefening 5. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $e^{2x} + e^x - 6 = 0$ $x = \ldots\ldots$

2. $e^x - 4e^{-x} = 3$ $x = \ldots\ldots$

Oefening 6. De vergelijking $4^x - 5 \cdot 2^x = 24$ werd opgelost naar x. Toch klopt de oplossing niet als

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.29)

we deze terug invullen in de vergelijking. Zoek de fout in de redenering.

$$\begin{aligned} 2^{2x} - 5 \cdot 2^x &= 24 \\ \log_2 2^{2x} - \log_2(5 \cdot 2^x) &= \log_2 24 \\ 2x - \log_2 5 - \log_2 2^x &= \log_2 24 \\ 2x - \log_2 5 - x &= \log_2 24 \\ x &= \log_2 24 + \log_2 5 \\ x &= \log_2(24 \cdot 5) \\ x &= \log_2 120 \end{aligned}$$

Hoe kan je deze vergelijking wel oplossen? De juiste oplossing is $x =$ … …

Oefening 7. Jodium 131 heeft een halveringstijd van 8 dagen d.w.z. dat de hoeveelheid radioactieve massa jodium 131 na 8 dagen slechts de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid bedraagt.

1. De groeifactor per tijdseenheid van een dag = … …

2. Geef het functievoorschrift dat deze groeifunctie beschrijft in de vorm $f(t) = b_0 \cdot g^t$, waarbij t gemeten wordt in dagen en we de beginwaarde van de radioactieve massa noteren we met b_0.

$f(t) =$ … …

3. Geef het functievoorschrift dat deze groeifunctie beschrijft in de vorm $f(t) = b_0 \cdot e^{-\lambda t}$ met $\lambda > 0$, waarbij t gemeten wordt in dagen en we de beginwaarde van de radioactieve massa noteren we met b_0.

$f(t) =$ … …

4. Wanneer is de hoeveelheid jodium 131 gedaald tot 1/20 van de oorspronkelijke hoeveelheid?

Na … … dagen.

Oefening 8. Het CO_2 dat in de atmosfeer voorkomt, bevat het stabiele ^{12}C en de radioactieve isotoop ^{14}C die een halveringstijd van 5730 jaar heeft. Wetenschappers nemen aan dat de verhouding van de hoeveelheden ^{14}C en ^{12}C in de CO_2 van de atmosfeer nagenoeg constant is. Noem die verhouding R_0. Levende planten absorberen CO_2 uit de lucht en daarom is de verhouding tussen ^{14}C en ^{12}C in een levende plant hetzelfde als in de lucht, nl. R_0. Wanneer een plant afsterft, stopt de absorptie van CO_2. Het stabiele ^{12}C blijft in de plant, terwijl het radioactieve ^{14}C exponentieel vervalt.

1. Geef het functievoorschrift van de grootheid $R(t)$ die de verhouding is van de hoeveelheid ^{14}C t.o.v. ^{12}C in de plantenresten t jaar na het afsterven van de plant.

$R(t) =$ … …

2. Een archeoloog vindt een fossiel waarvan de verhouding van de hoeveelheid ^{14}C t.o.v. ^{12}C 1/5 is van die in de atmosfeer. Hoe oud is dat fossiel?

… … jaar.

0.3 Niveau 3

Oefening 9.

1. Geef de formule voor de procentuele groei p per tijdseenheid in functie van een gegeven groeifactor g: … …

CC BY-NC-SA 4.0

2. Geef de formule voor de procentuele groei q per n tijdseenheden in functie van een gegeven groeifactor g (met $n \in \mathbb{N}$). … …

3. Geef een formule voor het verband tussen een procentuele groei p per maand en q per jaar. … …

Oefening 10. Enkele jaren geleden werd, n.a.v. een economische missie in China, in het VRT-journaal beweerd dat de economie van China jaarlijks met $14\,\%$ groeit, en dat dit betekent dat de Chinese economie dus binnen 7 jaar verdubbeld zal zijn.

1. Welke berekening werd wellicht gemaakt om van de $14\,\%$ jaarlijkse groei tot een verdubbeling na 7 jaar te komen?

2. Wat is het functievoorschrift van de groeifunctie $f(t)$ die de grootte van de Chinese economie voorstelt? Noteer hierbij de waarde van f voor $t = 0$ als $f(0)$. … …

3. Wat zal - in de veronderstelling dat de groei aan hetzelfde tempo blijft toenemen - de procentuele groei werkelijk zijn na 7 jaar? Ongeveer … ….

4. Met welke factor groeit de economie na 4, 5, 6 en 7 jaar? Tussen welke van deze waarden treedt de verdubbeling werkelijk op?

Oefening 11. Je maakt een avontuurlijke reis door Afrika, in een zone met hoog risico voor malaria-besmetting en slikt daarom regelmatig pilletjes met antistoffen. Op een dag word je echter bestolen; niet alleen ben je al je geld kwijt, maar bovendien ook je hele voorraad pilletjes. Toevallig had je nog één dosis (500 mg) antistoffen in je broekzak zitten. Je hebt op dat ogenblik, als gevolg van wekenlange inname, 1000 mg antistoffen in je bloed. Laten we veronderstellen dat je pas gevaar loopt besmet te raken wanneer de hoeveelheid antistoffen in het bloed kleiner wordt dan 750 mg. Voorlopig is er dus niets aan de hand. Je lichaam verwijdert deze vreemde stoffen echter geleidelijk — met een halveringstijd van 3 weken — dus vroeg of laat onstaat er een reële kans op besmetting. Beschouw de volgende twee mogelijkheden:

(a) Je neemt onmiddellijk die laatste dosis in.

1. De totale hoeveelheid antistoffen komt daarmee op … … mg.

2. Hiermee kan je nog gedurende … … dagen boven de kritische drempel van 750 mg kan blijven.

(b) Je stelt de inname van die laatste dosis nog even uit: je wacht namelijk tot je de kritische waarde een eerste maal bereikt, en slikt pas dan je laatste pilletje.

3. Je bereikt de drempel van 750 mg na ongeveer … … dagen.

4. Daarna kan je opnieuw een tijdje verder, nl. nog … … dagen, vooraleer je antistof-peil onherroepelijk onder de 750 mg duikt.

Wat is het verstandigst, onmiddellijke of uitgestelde inname?

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.29)