De exponentiële schrijfwijze van complexe getallen

We definiëren een uitbreiding van de exponentiële functie tot de verzameling van de complexe getallen.

Definitie 1. Als $z = x + iy \in \mathbb{C}$ dan is e^z het complexe getal

$$e^z = e^{x+iy} \stackrel{\text{def}}{=} e^x(\cos y + i \sin y)$$

Dit is inderdaad een uitbreiding want voor $z \in \mathbb{R}$ is e^z de reeds gekende exponentiële functie.

Met behulp van de somformules van sinus en cosinus kan je ook aantonen dat met deze definitie de gekende eigenschap van de reële exponentiële functie $e^{x+y} = e^x e^y$ voor $x, y \in \mathbb{R}$ blijft gelden in $\mathbb{C}$.

Eigenschap 1. Voor $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ geldt

$$e^{z_1+z_2} = e^{z1} e^{z2}$$

Opmerking 1. $e^x(\cos y + i \sin y)$ is van de vorm $r(\cos\theta + i \sin\theta)$, dus

- $|e^z| = e^x$
- $\arg e^z = y + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$

Oefening 1. Geef modulus en argument van e^{iz} met $z = x + iy$.

Een onmiddelijk gevolg van deze definitie is wat dikwijls de mooiste wiskundige formule wordt genoemd. Deze formule geeft een erg merkwaardig verband tussen de fundamentele grootheden e, π, i en -1.

Eigenschap 2. $e^{i\pi} = -1$

Vermits $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, voor $y \in \mathbb{R}$, kunnen we een complex getal in goniometrische vorm $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ ook schrijven als $z = re^{i\theta}$. We noemen dit de **exponentiële schrijfwijze**.

Opmerking 2.

Twee complexe getallen in exponentiële schrijfwijze zijn gelijk aan elkaar als ze dezelfde modulus hebben, en hun argument gelijk is op een veelvoud van 2π na.

Oefening 2. Schrijf $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ in de vorm $x + iy$. $2e^{i\frac{2\pi}{3}} = \ldots\ldots$

Omdat $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ voor $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, wordt het vermenigvuldigen van twee complexe getallen nog eenvoudiger in de exponentiële schrijfwijze.

Eigenschap 3. Als $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ en $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ twee complexe getallen zijn, dan is

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} \\ &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \end{aligned}$$

en als $z = re^{i\theta}$, dan is voor $n \in \mathbb{N}$ (formule van De Moivre)

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

Oefening 3 (Vierkantswortels)**.** Bereken alle oplossingen van $z^2 = 1 - i$, met $z \in \mathbb{C}$.

CC BY-NC-SA 4.0