Minimum-Maximumproblemen

In heel wat wetenschappelijke problemen zoeken we het *maximum* of het *minimum* van een zekere grootheid. Deze grootheid kan van wiskundige, fysische, economische of andere aard zijn, bijvoorbeeld een maximale of minimale inhoud, oppervlakte of afstand, minimale kosten of maximale winst. Dergelijke minimum-maximumproblemen worden ook wel optimalisatieproblemen genoemd, en *afgeleiden* spelen een belangrijke rol bij het vinden van de oplossingen. We herhalen kort de theoretische achtergrond en geven enkele voorbeelden.

Definitie 1 (Minimum en maximum van een functie)**.**

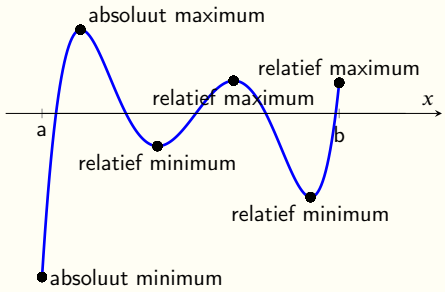
Een reële functie f gedefinieerd op $A \subseteq \mathbb{R}$

- bereikt een **absoluut maximum** in een punt $p \in A$ indien voor elke $x \in A$ geldt: $f(p) \geq f(x)$.
- bereikt een **absoluut minimum** in een punt $p \in A$ indien voor elke $x \in A$ geldt: $f(p) \leq f(x)$.
- bereikt een **relatief** of **lokaal maximum** in een punt $p \in A$ indien er een open interval I rond p bestaat zodat voor elke $x \in I \cap A$ geldt: $f(p) \geq f(x)$.
- bereikt een **relatief** of **lokaal minimum** in een punt $p \in A$ indien er een open interval I rond p bestaat zodat voor elke $x \in I \cap A$ geldt: $f(p) \leq f(x)$.

Een **extremum** is ofwel een maximum ofwel een minimum.

Opmerking 1.

Merk op dat een functie gedefinieerd op een interval $[a, b]$ ook een lokaal extremum kan bereiken in de randpunten a en b. Zo bereikt onderstaande functie een absoluut minimum in a en een relatief maximum in b.



Een *absoluut* maximum is dus steeds ook een *relatief* maximum, een *absoluut* minimum is steeds ook een *relatief* minimum.

Maak steeds onderscheid tussen de x-waarde(n) *waar een maximum wordt bereikt*, en *het maximum zelf*, dat een functiewaarde, dus een y-waarde is.

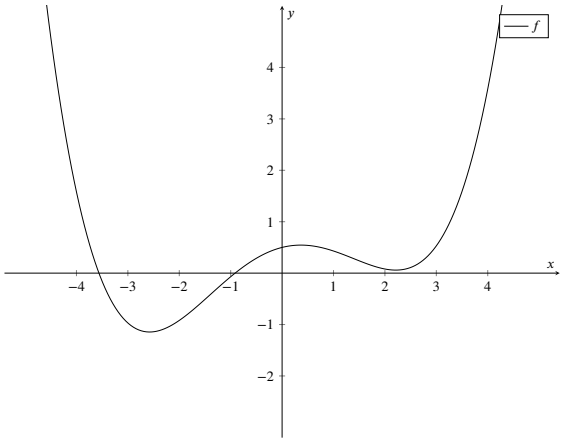
Bij het bepalen van de extrema van een functie f speelt de afgeleide f' een belangrijke rol:

Eigenschap 1. Voor een continue functie f op $[a, b]$ die afleidbaar is op $]a, b[$ geldt:

- als $f'(x) > 0$ voor elke $x \in]a, b[$, dan is f *strikt stijgend* in $[a, b]$
- als $f'(x) < 0$ voor elke $x \in]a, b[$, dan is f *strikt dalend* in $[a, b]$
- als $f'(c) = 0$ voor een $c \in]a, b[$, dan heeft de grafiek van f in $(c, f(c))$ een *horizontale raaklijn*.

CC BY-NC-SA 4.0

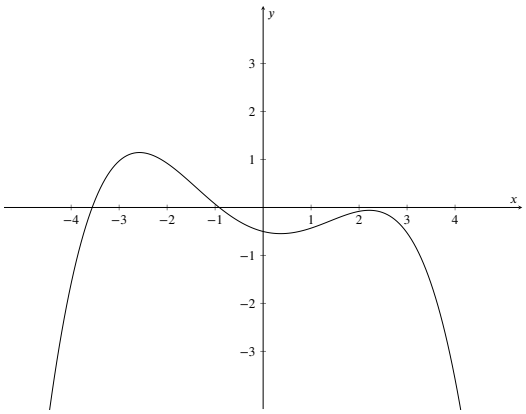
Oefening 1. Hieronder zie je de grafiek van een functie f.



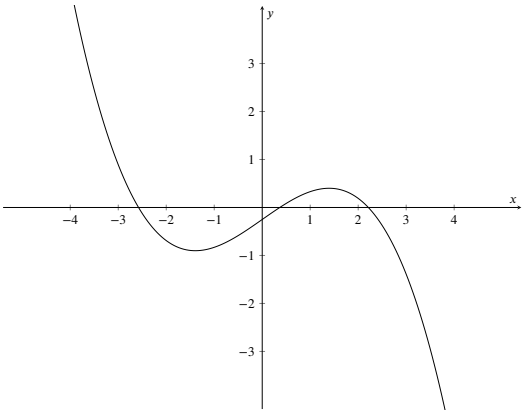
Welke van de volgende figuren is de grafiek van de afgeleide functie f'?

Meerkeuze:

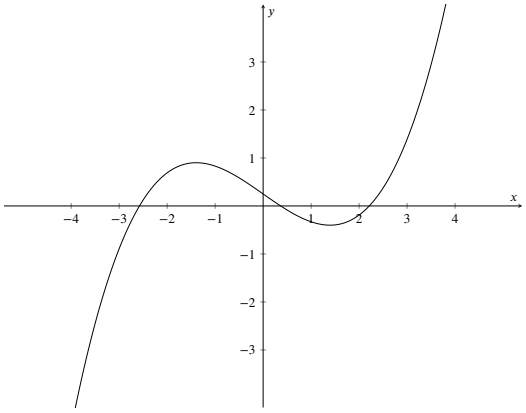
(a)



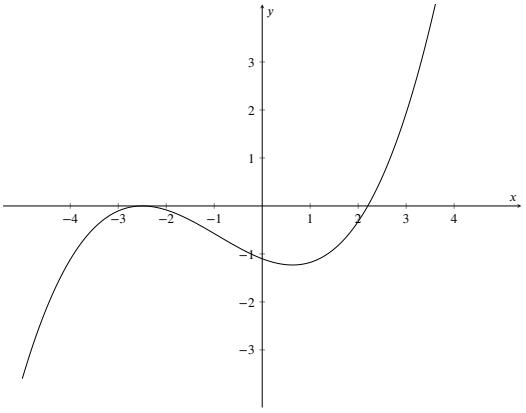
(c)



(b)



(d)



Definitie 2. Als $f'(c) = 0$ noemen we c een **kritiek punt** of een **stationair punt** van f.

Een *kritiek punt van* f is dus gewoon een andere naam voor *een nulpunt van de afgeleide van* f.

CC BY-NC-SA 4.0

Minimum-Maximumproblemen

De kritieke punten en het tekenverloop van de afgeleide f' geven ons heel wat informatie over het verloop van f.

Voorbeeld 1. Onderzoek via de afgeleide het dalen en stijgen van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en bepaal de extrema.

We berekenen eerst de afgeleide:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

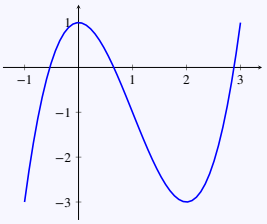
en bepalen daarvan de nulpunten (en dus de kritieke punten van f):

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x = 2$$

Vervolgens maken we een *tabel* met

- op de eerste lijn de x-waarden die tot het domein van de functie behoren, met van klein naar groot alle *kritieke punten*,
- op de tweede lijn het *tekenverloop van* f': schrijf nul onder de kritieke punten, en plustekens/-mintekens daartussen naargelang het teken van f'. In dit voorbeeld kunnen we deze tekens vinden als het tekenverloop van een tweedegraadsveelterm.
- op de derde lijn *het verloop van de grafiek van* f: Waar $f'(x) > 0$ stijgt f en waar $f'(x) < 0$ daalt f. We gebruiken het symbool $\nearrow$ voor stijgend en $\searrow$ voor dalend.
- waar de functie overgaat van stijgend naar dalend, is er een relatief maximum, waar ze overgaat van dalend naar stijgend is er een relatief minimum.

x		0		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	rel max	$\searrow$	rel min	$\nearrow$



In dit voorbeeld is er geen absoluut minimum omdat $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ en geen absoluut maximum omdat $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Opmerking 2.

- Als het domein een begrensd interval [a,b] is, vermeld je in de tabel op de eerste lijn ook de randpunten a en b.
- Om extrema te bepalen is het niet nodig of nuttig *de nulpunten van de functie* f te bepalen.

In bovenstaand voorbeeld zijn de twee relatieve extrema ook de twee kritieke punten van f. Dat is echter *niet altijd* het geval.

Eigenschap 2. Voor een functie f op $[a, b]$ en een punt $c \in]a, b[$ met f afleidbaar in c geldt:

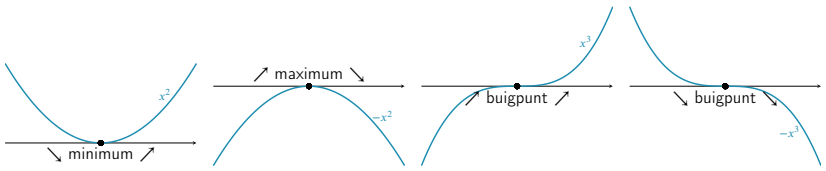
als f een relatief extremum bereikt in c **dan** is $f'(c) = 0$

Wat kunnen we besluiten uit deze eigenschap? We zijn op zoek naar de relatieve extrema van een functie.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.28)

De kritieke punten kunnen we gemakkelijk berekenen. Volgens deze eigenschap zijn, onder de punten van $]a,b[$ waar de functie f een afgeleide heeft, de kritieke punten de enige *kandidaat-extrema*. Er zijn echter twee vervelende subtiliteiten: een kritiek punt is niet altijd een extremum, en randpunten en punten waar de functie niet afleidbaar is kunnen extrema zijn zonder kritieke punten te zijn.

Een kritiek punt is ofwel een extremum ofwel *een buigpunt*.



Om te weten of een kritiek punt een relatief minimum, relatief maximum of een buigpunt is zijn er twee methodes:

- Het *tekenverloop van de afgeleide* f' bepaalt of er een minimum, een maximum dan wel een buigpunt optreedt. Er zijn de volgende mogelijkheden:

x		c	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	relatief max	↘

x		c	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	relatief min	↗

x		c	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	geen extremum	↗

x		c	
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘	geen extremum	↘

- Je kan ook het *teken van de tweede afgeleide* $f''(c)$ gebruiken als die bestaat, maar de techniek van de tweede afgeleide test behandelen we hier niet. Deze techniek kan wel nuttig zijn wanneer het moeilijk is om het tekenverloop van f' te vinden.

Je moet niet beide methodes toepassen, één van beide volstaat.

Voorbeeld 2. Onderzoek via de afgeleide het dalen en stijgen van de functie $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ en bepaal de extrema.

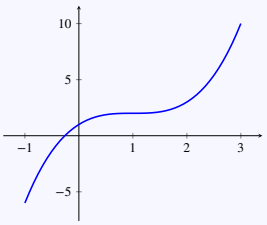
We berekenen eerst de afgeleide:

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$$

en bepalen daarvan de nulpunten (en dus de kritieke punten van f):

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x		1	
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	↗	buigpunt	↗



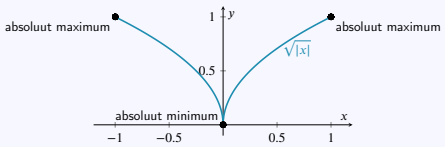
De functie gaat in het kritiek punt over van stijgend naar stijgend. We hebben dus geen relatief maximum en ook geen relatief minimum, we hebben een buigpunt.

CC BY-NC-SA 4.0

Extrema van functies kunnen *toch* voorkomen in punten die geen kritieke punten zijn.

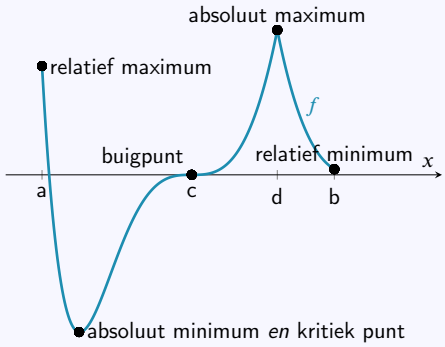
Extrema kunnen namelijk voorkomen in een *randpunt a of b van het interval* $[a, b]$ of in een punt waar de *functie niet afleidbaar* is.

Voorbeeld 3. De functie $x \mapsto \sqrt{|x|}$ op het interval $[-1, 1]$ heeft twee maxima en één minimum, en geen enkel van die drie punten zijn kritieke punten (ze behoren dus *niet* tot de punten waar de afgeleide nul is). De punten -1 en 1 zijn randpunten van $[-1, 1]$, en in 0 is de functie niet afleidbaar.



Volgend voorbeeld geeft een visueel overzicht van extrema die geen kritiek punt zijn en van kritieke punten die geen extremum zijn:

Voorbeeld 4. Onderstaande functie f, gedefinieerd op een interval $[a, b]$, bereikt een relatief maximum in a, een relatief minimum in b, een absoluut maximum in d, en een buigpunt in c. De punten a en b zijn *randpunten* (extrema, maar geen kritieke punten), de functie is *niet afleidbaar* in d (extremum, maar geen kritiek punt), en heeft een *buigpunt* in c (kritiek punt, maar geen extremum):



Opmerking 3.

- Wanneer je extrema zoekt van een functie gedefinieerd op een gesloten interval moeten de randpunten zeker bekeken worden.
- Voor functies die niet afleidbaar zijn in sommige punten van hun domein, moet je op een andere manier de extrema onderzoeken, bijvoorbeeld door de grafiek van de functie te tekenen.

In oefeningen en toepassingen zoeken we vaak geen *relatieve* extrema maar *absolute* extrema.

Eigenschap 3 (Algoritme voor absolute extrema)**.**

Voor begrensde functies is het absolute maximum het grootste van alle relatieve maxima, het absolute minimum is het kleinste van alle relatieve minima.

Voor een afleidbare functie f gedefinieerd op $[a, b]$ bepaal je absolute extrema door de *functiewaarde* te berekenen in elk relatief extremum en in de randpunten a en b. De grootste van die functiewaarden is het absolute maximum, de kleinste is het absolute minimum.

Volgende voorbeelden illustreren de werkwijze voor het vinden van extrema bij vraagstukken. Vooraleer

CC BY-NC-SA 4.0

je kritieke punten kan zoeken moet je eerst de veranderlijken, de functie die minimaal of maximaal moet zijn en het domein van deze functie vastleggen. In sommige vraagstukken zijn hievoor meerdere keuzes mogelijk.

Voorbeeld 5.

Toon aan dat van alle rechthoeken met gegeven oppervlakte $S \neq 0$ het vierkant (met oppervlakte S) de kleinste omtrek heeft.

Uitwerking:

- **Kies veranderlijken**: We noteren met x en y de lengtes van de zijden van een rechthoek met oppervlakte S.
- **Bepaal het domein**: Omdat x en y lengtes voorstellen en $S \neq 0$ weten we dat $x > 0$ en $y > 0$.
- **Bepaal de functie** die minimaal moet zijn:
  - Je zoekt het minimum van de omtrek, dus van $2x + 2y$. Deze uitdrukking bevat echter twee veranderlijken, en daarvoor werkt bovenstaande theorie niet. Je moet proberen één van de veranderlijken uit te drukken in termen van de andere.
  - Uit het gegeven halen we dat $S = x.y$ dus $y = \frac{S}{x}$. Dit geeft het **verband tussen de twee variabelen**.
  - We schrijven deze omtrek als een functie van één variabele $f(x)$, door het verband tussen beide variabelen te gebruiken:
    $f(x) = 2x + 2\frac{S}{x} = 2(x + \frac{S}{x})$ met $x > 0$
- **Zoek het (absolute) minimum van deze functie** f:
  - $f'(x) = 2(1 - \frac{S}{x^2})$
  - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{S}$
  - Omdat $x > 0$ behoud je verder alleen $\sqrt{S}$. Met behulp van het tekenverloop onderzoek je welk soort kritiek punt dit is.

x		$\sqrt{S}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	relatief min	$\nearrow$

    Nemen we $x > \sqrt{S}$, dan is $x^2 > S$, dus $1 > \frac{S}{x^2}$, dus $1 - \frac{S}{x^2} > 0$ en dus is f' groter dan 0. Vandaar het plusteken bij het tekenverloop van f'. Met een analoge redenering vind je het minteken voor $x < \sqrt{S}$.

    Omdat de functie $f(x)$ daalt tot $\sqrt{S}$ en dan stijgt, bereikt de omtrek f een *relatief minimum* in $x = \sqrt{S}$. Aangezien dit het enige minimum is voor $x > 0$ is dit ook het gezochte absolute minimum.
- **Besluit**: Als $x = \sqrt{S}$ dan is ook $y = \sqrt{S}$, en de gezochte rechthoek is dus een vierkant.

Voorbeeld 6.

Een draad van 4 meter wordt in 2 stukken geknipt. Met één stuk wordt een vierkant gemaakt, met het andere een cirkel. We willen de ingesloten oppervlakte voor beide figuren samen maximaliseren. Hoeveel draad gebruik je best voor de cirkel?

Uitwerking:

CC BY-NC-SA 4.0

- **Kies veranderlijken**: We noteren met x de omtrek van de cirkel, dan is $4-x$ de omtrek van het vierkant.
- **Domein:** Uit de opgave volgt dat $x \in [0,4]$.
- **Bepaal de functie** die maximaal moet zijn:
  - De oppervlakte van een vierkant is het kwadraat van de zijde, en de omtrek is vier keer zijde. De oppervlakte van het vierkant is dus $\frac{(4-x)^2}{4^2} = \frac{(4-x)^2}{16}$
  - De oppervlakte van een cirkel is π maal de straal in het kwadraat, de omtrek is 2π maal de straal. De straal is dus $\frac{x}{2\pi}$ en bijgevolg is de oppervlakte van de cirkel $\frac{x^2}{4\pi}$

  We zoeken bijgevolg het maximum van $f(x) = \frac{(4-x)^2}{16} + \frac{x^2}{4\pi}$ met $x \in [0,4]$
- **Zoek het (absolute) maximum van deze functie** f:
  - $f'(x) = -\frac{2(4-x)}{16} + \frac{2x}{4\pi} = -\frac{1}{2} + (\frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi})x$
  - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{\pi+4}$
  - Hieruit mogen we niet meteen besluiten dat $x = \frac{4\pi}{\pi+4}$ het gezochte maximum is. Met behulp van het tekenverloop gaan we na welk soort kritiek punt dit is.

x	0		$\frac{4\pi}{\pi+4}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	relatief min	$\nearrow$	

  Dus bereikt f een relatief *minimum* in $x = \frac{4\pi}{\pi+4}$, en dit is bijgevolg **niet** het gezochte punt.
  - Uit het tekenverloop hierboven volgt dat de maxima van f te vinden zijn in de *randpunten van het domein* $[0,4]$. We berekenen de functiewaarden in deze randpunten om te weten waar het absolute maximum zich bevindt.

x	0		$\frac{4\pi}{\pi+4}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	relatief min	$\nearrow$	$\frac{4}{\pi}$

- **Besluit:** We vinden het maximum van f in 4. De omtrek van de cirkel moet dus 4 meter zijn, deze van het vierkant 0. De ingesloten oppervlakte is dus maximaal als de draad volledig voor de cirkel gebruikt wordt.

Oefening 2. De som van twee positieve getallen a en b is 100, waarbij $a \leq b$. Zoek deze getallen als

1. hun product maximaal moet zijn: $a = \ldots\ldots$ en $b = \ldots\ldots$

2. de som van hun kwadraten minimaal moet zijn: $a = \ldots\ldots$ en $b = \ldots\ldots$

3. de som van hun kwadraten maximaal moet zijn: $a = \ldots\ldots$ en $b = \ldots\ldots$

4. het product van het kwadraat van een getal met de derde macht van het andere getal maximaal moet zijn: $a = \ldots\ldots$ en $b = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0