Kettingregel

De zogenaamde *kettingregel* laat toe om de afgeleide te berekenen van *samengestelde* functies.

Eigenschap 1 (Kettingregel)**.**

De *afgeleide van de samenstelling* van twee afleidbare functies f en g is gelijk aan:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \textbf{(kettingregel)}$$

Dezelfde kettingregel kan ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) \quad \textbf{(kettingregel)}$$

of met differentialen:

$$d(f(g(x))) = f'(g(x))\, dg(x) = f'(g(x))\, g'(x)\, dx \quad \textbf{(kettingregel)}.$$

Opmerking 1. We hebben in de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie de afgeleide van f toch genoteerd als f' om de notatie eenvoudig te houden. De kettingregel kan ook geformuleerd worden als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g}(f(g)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$$

De formules worden duidelijker met enkele voorbeelden:

Voorbeeld 1.

(a) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (5x+2)^2$:

Merk allereerst op dat je in dit voorbeeld de kettingregel niet *moet* gebruiken. Je kan ook het kwadraat eerst uitrekenen:

$$((5x+2)^2)' = (25x^2 + 20x + 4)' = 50x + 20$$

Je *mag* de kettingregel wel gebruiken en je vindt uiteraard hetzelfde resultaat.

We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

- De functie $x \mapsto (5x+2)^2$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto 5x+2$$

dan is $f(g(x)) = f(5x+2) = (5x+2)^2$. Omdat

$$f' : x \mapsto 2x$$
$$g' : x \mapsto 5$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{5x+2}^{g(x)})^2}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{2(\overbrace{5x+2}^{g(x)})}_{f'(g(x))} \cdot \overbrace{5}^{g'(x)} = 10(5x+2) = 50x+20$$

CC BY-NC-SA 4.0

Kettingregel

waarbij $f'(g(x)) = f'(5x+2) = 2(5x+2)$

Indien je vertrouwd bent met de kettingregel *moet* je de samenstellende functies geen namen geven. Je mag ook sneller rekenen als volgt:

$$((5x+2)^2)' = 2(5x+2)\cdot 5 = 10(5x+2)$$

- Je kan ook de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken. Dat geeft (enkel kort opgeschreven):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x+2)^2 = 2(5x+2)\cdot 5.$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(5x+2)^2 = 2(5x+2)\,d(5x+2) = 2(5x+2)5\,dx = 10(5x+2)\,dx$$

(b) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \sin^2 x$:
Voor de duidelijkheid schrijven we verder het kwadraat met haakjes: $x \mapsto (\sin x)^2$.
We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

- De functie $x \mapsto (\sin x)^2$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto \sin x$$

dan is $f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^2$. Omdat

$$f' : x \mapsto 2x$$
$$g' : x \mapsto \cos x$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{\sin x}^{g(x)})^2}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{2(\overbrace{\sin x}^{g(x)})}_{f'(g(x))}\cdot \overbrace{\cos x}^{g'(x)} = 2\sin x\cos x$$

waarbij $f'(g(x)) = f'(\sin x) = 2(\sin x)$

Indien je vertrouwd bent met de kettingregel *moet* je de samenstellende functies geen namen geven. Je mag ook sneller rekenen als volgt:

$$((\sin x)^2)' = 2(\sin x)\cdot\cos x = 2\sin x\cos x$$

- Je kan ook de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken. Dat geeft (enkel kort opgeschreven):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)^2 = 2(\sin x)\cdot\cos x = 2\sin x\cos x$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(\sin x)^2 = 2(\sin x)\,d(\sin x) = 2(\sin x)\cos x\,dx = 2\sin x\cos x\,dx$$

(c) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \sin x^2$:
Voor de duidelijkheid schrijven we verder haakjes rond het kwadraat: $x \mapsto \sin(x^2)$.
We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

CC BY-NC-SA 4.0

Kettingregel

- De functie $x \mapsto \sin(x^2)$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto \sin x$$
$$g : x \mapsto x^2$$

dan is $f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2)$. Omdat

$$f' : x \mapsto \cos x$$
$$g' : x \mapsto 2x$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{\sin(\overbrace{x^2}^{g(x)})}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{\cos(\overbrace{x^2}^{g(x)})}_{f'(g(x))} \cdot \overbrace{2x}^{g'(x)} = 2x\cos x^2$$

waarbij $f'(g(x)) = f'(x^2) = \cos(x^2)$

Je *moet* de samenstellende functies geen namen geven. Je kan ook sneller rekenen als volgt:

$$(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x$$

- Je kan ook de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken, dat geeft

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x^2) = \cos x^2 \cdot 2x$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(\sin x^2) = \cos x^2 d(x^2) = \cos x^2\, 2x dx$$

Oefening 1.

1. Bereken $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 5^{x^2} = \ldots\ldots$

2. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie

$$f(x) = \ln g(x)$$

in termen van de functie g en de afgeleide functie g'.

Opmerking 2. We begrijpen deze kettingregel als volgt:

- Om de afgeleide van een samenstelling $f(g(x))$ te berekenen, bereken je eerst de afgeleide van de *buitenste* functie f en die evalueer je in de enige waarde waar dat betekenis heeft: de functiewaarde van de binnenste functie g. Vervolgens vermenigvuldig je dat resultaat met de afgeleide van de binnenste functie. Dus: afleiden doe je *van buiten naar binnen*, stap per stap, en je vermenigvuldigt de tussenresultaten met elkaar.
- Indien je nog niet zo vertrouwd bent met de kettingregel kan je de samenstellende functies f en g expliciet opschrijven, of je kan werken met extra variabelen (*substitutie*). We geven een

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.49)

Kettingregel

voorbeeld met extra variabelen in de notatie met differentialen:

$$\mathrm{d}\sin(x^2) \overset{x^2=u}{=} \mathrm{d}\sin(u) = \cos(u)\mathrm{d}u \overset{u=x^2}{=} \cos(x^2)\mathrm{d}x^2 = \cos(x^2)\cdot 2x\mathrm{d}x = 2x\cos x^2\mathrm{d}x$$

en

$$\mathrm{d}(\sin^2 x) = \mathrm{d}(\sin x)^2 \overset{\sin x=v}{=} \mathrm{d}v^2 = 2v\,\mathrm{d}v \overset{v=\sin x}{=} 2\sin x\cdot \mathrm{d}\sin x = 2\sin x\cos x\mathrm{d}x$$

Zodra je vertrouwd bent met de kettingregel is het niet meer nodig om de extra variabele expliciet op te schrijven.

Eigenschap 2. De *ketting*regel berekent de afgeleide van een ketting of *keten* van samenstellingen:

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x)))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x)$$

Dus je leidt de samenstellende functies af *van buiten naar binnen* en vermenigvuldigt de afgeleiden.

Voorbeeld 2. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^3(4x^2-7)$.

We gebruiken weer de kettingregel, maar nu hebben we een samenstelling van drie functies: $f(x)=x^3$, $g(x)=\cos x$ en $h(x)=4x^2-7$.

$$f(g(h(x))) = f(g(4x^2-7)) = f(\cos(4x^2-7)) = \cos^3(4x^2-7)$$

In de eerste stap van de berekening gebruiken we:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(g(h(x)))] = f'(g(h(x)))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(g(h(x)))]$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos^3\left(4x^2-7\right)\right] &= 3\left(\cos\left(4x^2-7\right)\right)^2\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos\left(4x^2-7\right)\right]\\ &= 3\cos^2\left(4x^2-7\right)\left(-\sin\left(4x^2-7\right)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[4x^2-7\right]\right)\\ &= -3\cos^2\left(4x^2-7\right)\sin\left(4x^2-7\right)\cdot 8x\\ &= -24x\sin\left(4x^2-7\right)\cos^2\left(4x^2-7\right).\end{aligned}$$

Oefening 2.

1. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{\sin^3(e^{x^2})} = \ldots\ldots$

Opmerking 3.

De Leibniz notatie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ is bijzonder handig als x op zijn beurt afhankelijk wordt van een andere variabele (bijvoorbeeld van de tijd, of bij een substitutie) en wordt dan ook vaak gebruikt in de fysica. Stel dat bij een functie $x\mapsto f(x)$ blijkt dat x eigenlijk afhangt van t. Dan is x dus zelf een functie van t, dus $x : t\mapsto x(t)$. Dan wordt natuurlijk ook f een functie van t, namelijk $t\mapsto f(x(t))$. We

CC BY-NC-SA 4.0

krijgen dan volgende functies:

$$f : x \mapsto f(x)$$
$$x : t \mapsto x(t)$$
$$f \circ x : t \mapsto f(x(t))$$

en die functies hebben respectievelijk als afgeleide

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f : x \mapsto f'(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x : t \mapsto x'(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ x) : t \mapsto (f \circ x)'(t)$$

Een concreet voorbeeld: je rijdt met de auto van $A_{ntwerpen}$ naar B_{russel}. Je schrijft de afgelegde afstand in kilometer als x en je noemt $f(x)$ het aantal liter benzine in je tank na x km. Veronderstel dat je vertrekt met een volle tank van 50 liter en je auto 5 liter verbruikt per honderd kilometer, dan is

$$f(x) = 50 - \frac{5}{100}x.$$

Veronderstel dat je aan een constante snelheid van 75 km/u rijdt, dan is de afgelegde weg x na t uur dus $x(t) = 75 \cdot t$ km. De samengestelde functie $f(x(t))$ is dan

$$f(x(t)) = 50 - \frac{5}{100}x(t) = 50 - \frac{5}{100} \cdot 75 \cdot t = 50 - \frac{75 \cdot 5}{100}t$$

en die formule drukt uit hoeveel benzine je nog hebt na t uur, in plaats van na x kilometer.

De kettingregel zegt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t))) = f'(x(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$$

of anders geschreven:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t))) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)}$$

Als we schrijven dat $x = x(t)$ en $y = f(x)$, dus ook $y = f(x(t))$ wordt dat soms korter genoteerd als:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

We kunnen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t))) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$$

ook met gebruik van andere letters formuleren. Bijvoorbeeld met functie $u(x)$ in plaats van $x(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(u(x))) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}(u(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)$$

of met de functies u en v in plaats van f en x:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(v(x))) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}(v(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x)$$

maar het betekent natuurlijk allemaal hetzelfde.

CC BY-NC-SA 4.0