Afgeleide van de inverse functie

Voor een inverteerbare functie f geldt voor elke x in het domein dat

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

Omdat de functies $x \mapsto f^{-1}(f(x))$ en $x \mapsto x$ gelijke functies zijn, zijn ook hun afgeleiden indien deze bestaan aan elkaar gelijk:

$$(f^{-1}(f(x)))' = x'$$

Uit de kettingregel volgt dan (omdat $x' = 1$)

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \text{ of dus } (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = (f'(x))^{-1}$$

en dit verklaart volgende eigenschap:

Eigenschap 1.

De inverse van een inverteerbare afleidbare functie f met $f'(x) \neq 0$ is afleidbaar in het punt $y = f(x)$, met afgeleide gelijk aan de omgekeerde van de afgeleide van f in x:

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \textbf{(afgeleide inverse)}$$

of met $y = f(x)$, en dus $x = f^{-1}(y)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \textbf{(afgeleide inverse)}$$

Opmerking 1.

- Merk op dat de exponent $^{-1}$ in deze formules in twee verschillende betekenissen wordt gebruikt:

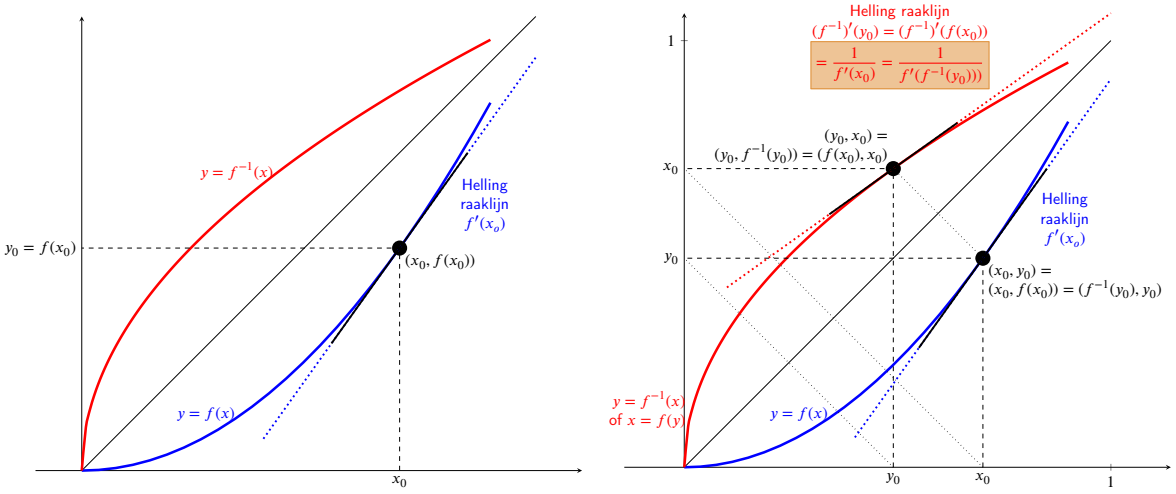
$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = y &\iff x = f(y) && \text{de inversie van een } \textit{functie} \\ (f(x))^{-1} = y &\iff \frac{1}{f(x)} = y && \text{het omgekeerde van een } \textit{getal} \end{aligned}$$

- Merk op dat het hier belangrijk is onderscheid te maken tussen de variabele voor de functie f en de variabele voor de inverse functie f^{-1}.

Op onderstaande grafiek kan je zien dat er *geen verband* is tussen de raaklijnen van f en f^{-1} boven het punt x_0. Er is wel een duidelijk verband tussen de raaklijn aan f in het punt $(x_0, f(x_0))$ en de raaklijn aan de gespiegelde grafiek f^{-1} boven het *gespiegelde punt* $(f(x_0), x_0)$: die raaklijn wordt natuurlijk gewoon mee gespiegeld, en gespiegelde rechten hebben omgekeerde hellingen.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.52)

Afgeleide van de inverse functie



De formules worden duidelijker met enkele voorbeelden:

Voorbeeld 1.

(a) De inverse van de functie $f : x \mapsto x + a$ is de functie $f^{-1} : x \mapsto x - a$. Beide hebben functies hebben als afgeleide functie de constante functie $f' = (f^{-1})' = 1$, en er geldt inderdaad $1 = 1^{-1}$.

(b) De inverse van de functie $f : x \mapsto 2x$ is de functie $f^{-1} : y \mapsto y/2$. De afgeleide van f is de constante functie $f' : x \mapsto 2$, en de afgeleide van f^{-1} is de constante functie $(f^{-1})' : y \mapsto 1/2$ en er geldt inderdaad dat $(f^{-1})'(y) = 1/2 = 2^{-1} = (f'(x))^{-1}$.

Bovenstaande voorbeelden zijn beide bedrieglijk eenvoudig omdat de afgeleiden telkens *constante* functies zijn.

Voorbeeld 2. De afgeleide van de inverse van $f : x \mapsto x^2$

De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ is niet inverteerbaar, en heeft dus geen inverse op gans haar domein $\mathbb{R}$.

De functie $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ heeft als inverse $f_1^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$ en de functie $f_2 : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ heeft als inverse $f_2^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : x \mapsto -\sqrt{x}$. In een punt x_0 is de afgeleide van zowel f_1 als f_2 gelijk aan $2x_0$, en de raaklijn in $(x_0, y_0) = (x_0, x_0^2)$ heeft dus helling $2x_0$.

In het punt $y_0 = x_0^2$ is de afgeleide van $f_1^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : y \mapsto \sqrt{y}$ gelijk aan

$$(f_1^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f_1'(f_1^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f_1'(\sqrt{y_0})} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}},$$

en de raaklijn in $(y_0, \sqrt{y_0}) = (x_0^2, x_0)$ heeft dus een helling $\dfrac{1}{2\sqrt{y_0}} = \dfrac{1}{2x_0}$.

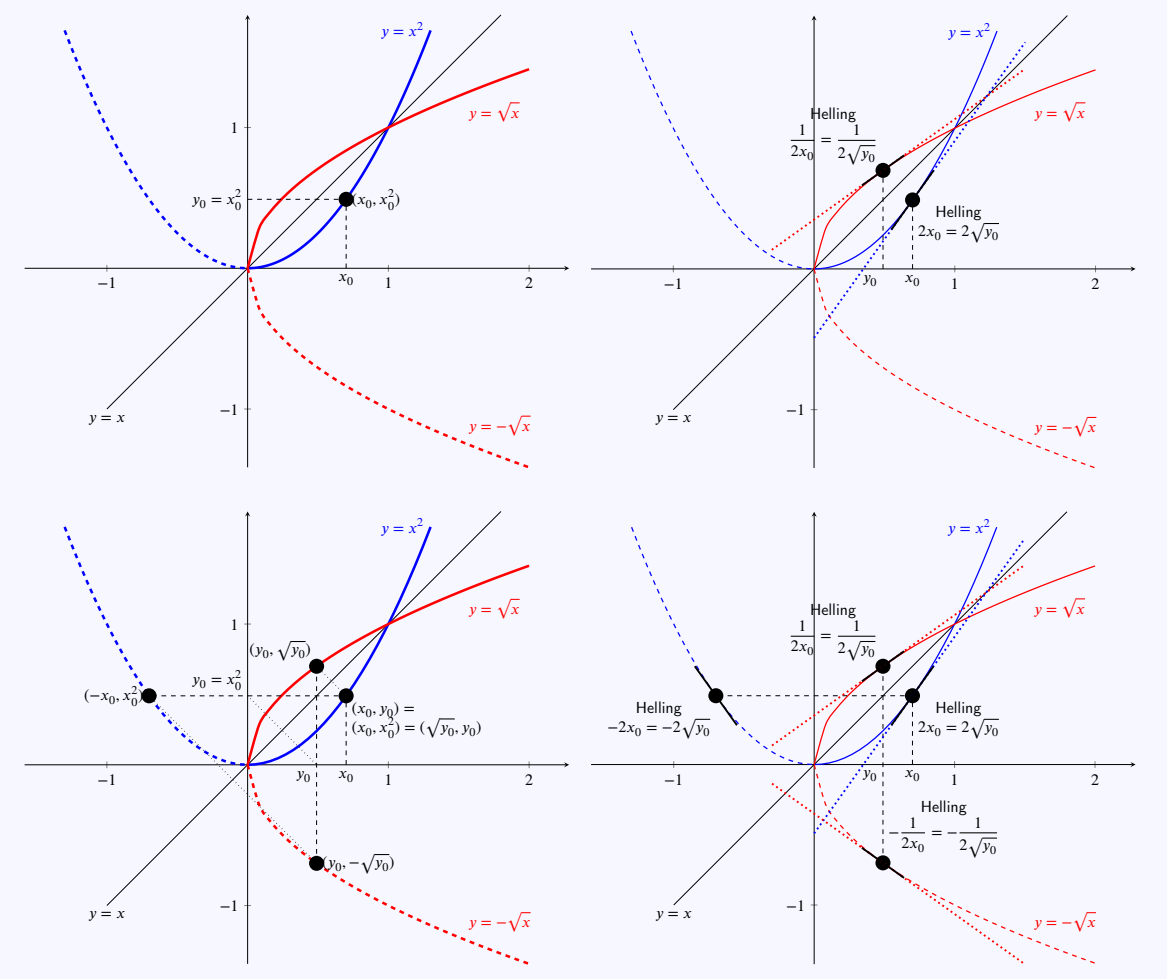
In het punt $y_0 = x_0^2$ is de afgeleide van $f_2^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : y \mapsto -\sqrt{y}$ gelijk aan

$$(f_2^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f_2'(f_2^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f_2'(-\sqrt{y_0})} = -\frac{1}{2\sqrt{y_0}},$$

en de raaklijn in $(y_0, -\sqrt{y_0}) = (x_0^2, -x_0)$ heeft dus een helling $-\dfrac{1}{2\sqrt{y_0}} = -\dfrac{1}{2x_0}$.

CC BY-NC-SA 4.0

Afgeleide van de inverse functie



Opmerking 2.

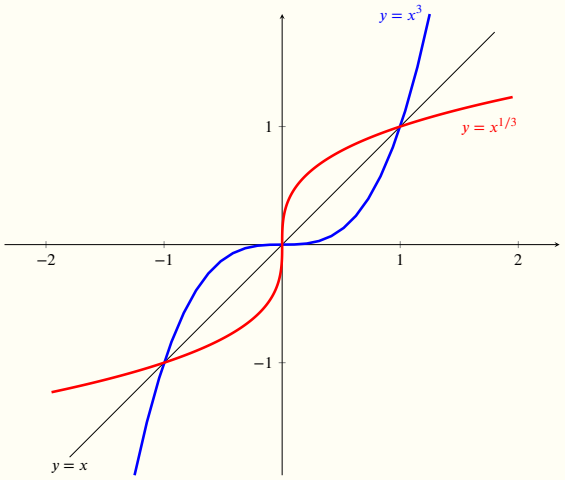
- De raaklijn in $(x_0, f(x_0))$ aan graf f is de spiegeling ten opzichte van de eerste bissectrice van de raaklijn in $(f(x_0), x_0)$ aan graf f^{-1}. Dit is evident, omdat de grafieken elkaars spiegelbeeld zijn, en dus geldt dat ook voor de *raaklijnen* aan de grafieken.
- Als $f'(x_0) = 0$, dan is de inverse functie in het punt $f(x_0)$ niet afleidbaar (want de afgeleide zou gelijk moeten zijn aan $\frac{1}{f'(x_0)}$). Dat komt overeen met het feit dat de spiegeling van een horizontale rechte (helling 'nul') een verticale rechte is (helling 'oneindig').

  Neem als voorbeeld $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ en $x_0 = 0$. In dit geval is $f'(x_0) = 3x_0^2 = 0$. De inverse functie is $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto y^{1/3}$.

  Deze inverse is niet *afleidbaar* in 0: de afgeleide van $x \mapsto x^{1/3}$ is $x \mapsto \frac{1}{3}x^{-2/3}$, en dat wordt 'oneindig groot' in $x = 0$. Dus, $x \mapsto x^{1/3}$ is niet afleidbaar in de oorsprong omdat de raaklijn er verticaal is.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.52)

Afgeleide van de inverse functie



CC BY-NC-SA 4.0