Definitie van afgeleide

We illustreren eerst aan de hand van enkele voorbeelden wat we bedoelen met *veranderingen* van functiewaarden en *verhoudingen* van *veranderingen* van *functiewaarden*.

Voorbeeld 1 (Eenvoudige voorbeelden)**.**

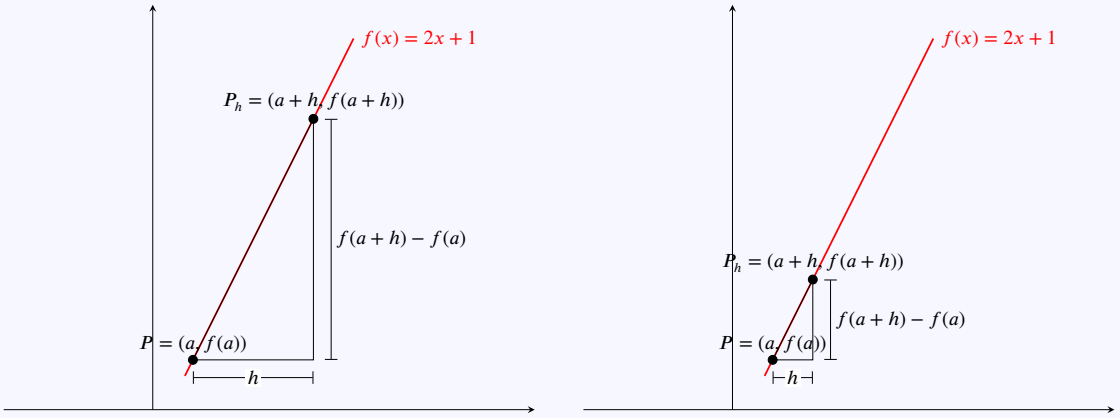
We onderzoeken hoe de functiewaarden van enkele functies veranderen als de onafhankelijke variabele (lichtjes) verandert in de omgeving van een bepaald punt.

1. Onderzoek de verandering van $f : x \mapsto 2x+1$ in de omgeving van het punt $a = 3$.

Uitwerking:

In een punt $a+h$ in de buurt van a is de functiewaarde van f gelijk aan $f(a+h)$. We berekenen voor enkele steeds kleiner wordende h telkens de functiewaarden in a en in $a+h$ en verandering $f(a+h)-f(a)$ die hoort bij deze h. Zoals te verwachten was, wordt de verandering $f(a+h)-f(a)$ ook erg klein zodra h klein wordt. Maar het is erg interessant op te merken dat de *verhouding* $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *niet* noodzakelijk klein wordt!

a	h	$a+h$	$f(a)$	$f(a+h)$	$f(a+h)-f(a)$	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
3	1	4	7	9	2	$\frac{2}{1}=2$
3	0.5	3.5	7	8	1	$\frac{1}{0.5}=2$
3	0.1	3.1	7	7.2	0.2	$\frac{0.2}{0.1}=2$
3	0.01	3.01	7	7.02	0.02	$\frac{0.02}{0.01}=2$
3	0.001	3.001	7	7.002	0.002	$\frac{0.002}{0.001}=2$



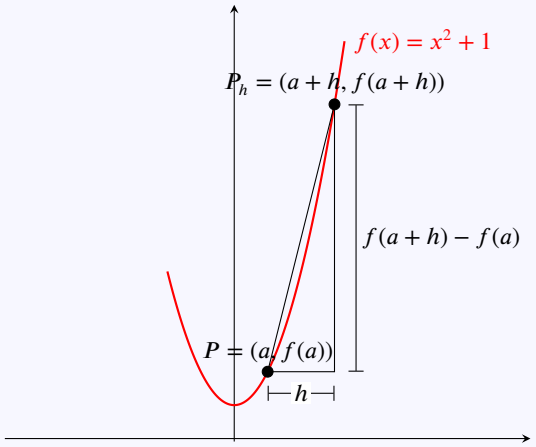
Voor een willekeurige h zien we dat $f(a+h) = 2(a+h)+1 = 2a+1+2h = f(a)+2h$. Dit maakt duidelijk dat f hier steeds met $2h$ toeneemt als x met h toeneemt. De verhouding tussen de toename in y en de toename in x is dus steeds $\dfrac{2h}{h} = 2$, wat ook precies de richtingscoëfficiënt is van de rechte met vergelijking $y = 2x+1$.

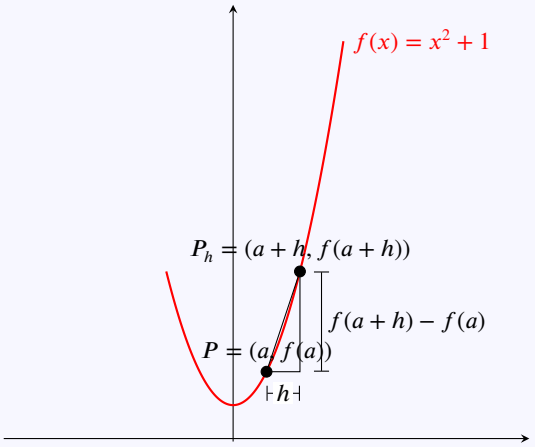
2. Onderzoek de verandering van $f : x \mapsto x^2+1$ in de omgeving van het punt $a = 1$.

Uitwerking:

a	h	$a+h$	$f(a)$	$f(a+h)$	$f(a+h)-f(a)$	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
1	1	2	2	5	3	3
1	0.5	1.5	2	3.25	1.25	2.5
1	0.1	1.1	2	2.21	0.21	2.1
1	0.01	1.01	2	2.0201	0.00201	2.01
1	0.001	1.001	2	2.0020	0.00020	2.001

CC BY-NC-SA 4.0



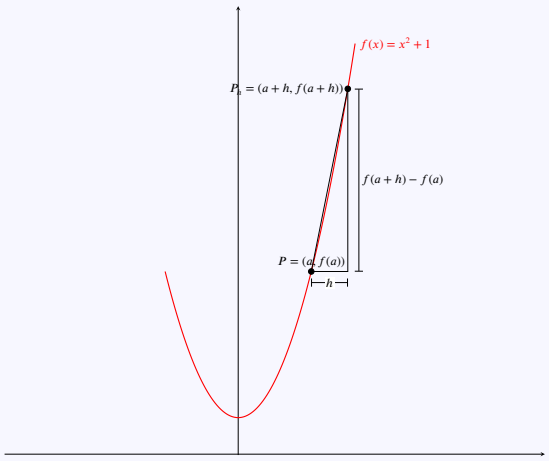


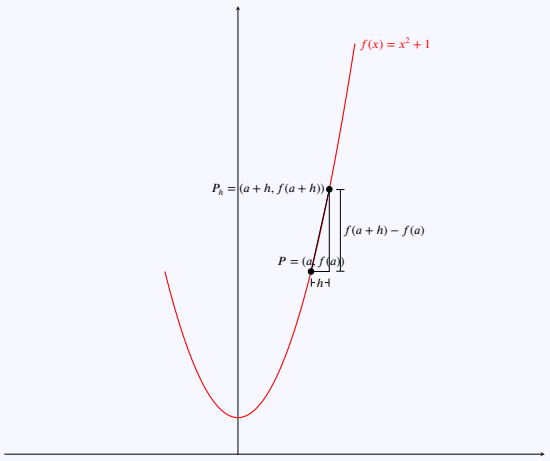
We zien in de tabel dat de verhouding $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ hier afhangt van h, wat niet het geval was in het vorige voorbeeld. Maar als h kleiner wordt, ligt de verhouding steeds dichter bij 2. 2 is ook de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de kromme $y = x^2 + 1$ in het punt met x-coördinaat 1.

3. Onderzoek de verandering van $f : x \mapsto x^2 + 1$ in de omgeving van het punt $a = 3$.

Uitwerking:

a	h	$a+h$	$f(a)$	$f(a+h)$	$f(a+h)-f(a)$	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
3	1	4	10	17	7	7
3	0.5	3.5	10	13.25	3.25	6.5
3	0.1	3.1	10	10.61	0.61	6.1
3	0.01	3.01	10	10.0601	0.0601	6.01
3	0.001	3.001	10	10.006	0.006001	6.001





Hier hangt de verhouding $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ ook af van h, maar als h kleiner wordt, ligt de verhouding steeds dichter bij 6. Dat is ook de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de kromme $y = x^2+1$ in het punt met x-coördinaat 3.

Voorbeeld 2. We onderzoeken de *helling van de raaklijn aan de grafiek* van een functie f in een punt $(a, f(a))$.

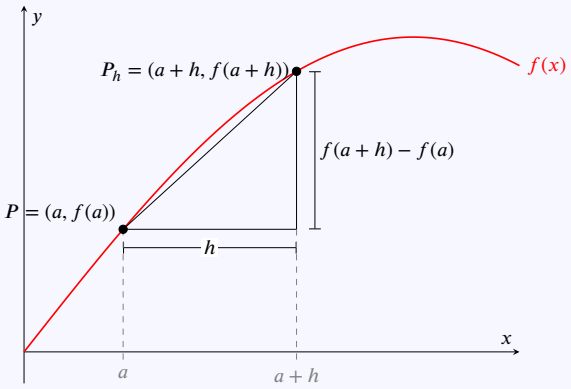
CC BY-NC-SA 4.0

Definitie van afgeleide

De richtingscoëfficiënt van de rechte in het vlak door de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) (met $x_1 \neq x_2$) is:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Op onderstaande figuur staat de grafiek van een functie f en een willekeurig punt met x-coördinaat a.



De rico van de rechte door de punten $(a, f(a))$ en $(a+h, f(a+h))$, twee punten op de grafiek van f, is

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Die rico hangt af van h (en van a, maar a is vast gekozen). Als we h kleiner laten worden, dan beweegt het punt $(a+h, f(a+h))$ op de grafiek van f naar het punt $(a, f(a))$. De rechte door $(a, f(a))$ en $(a+h, f(a+h))$ draait en heeft als limietstand de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$.
De rico van de raaklijn is dus gelijk aan

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

en deze limiet noemen we *de afgeleide van f in a*.

In het algemeen is het niet eenvoudig om die limiet uit te rekenen, want hij is van de vorm $\frac{0}{0}$, en dat is een onbepaaldheid. Maar het zal blijken dat er relatief eenvoudige technieken zijn om afgeleiden toch te berekenen.

Definitie 1 (Afgeleide in een punt)**.**

We noemen een reële functie f **afleidbaar** of **differentieerbaar** in een punt a van haar domein als de limiet $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *bestaat* en *eindig* is.

In dat geval noemen we die limiet de **afgeleide van f in a** en we noteren

$$f'(a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Opmerking 1.

CC BY-NC-SA 4.0

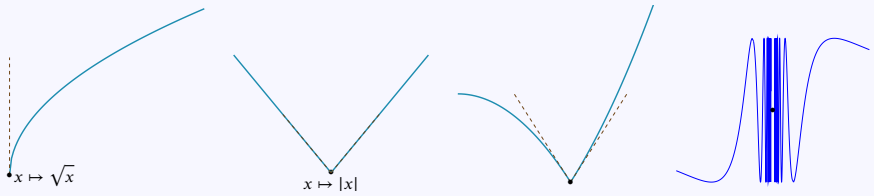
Definitie van afgeleide

Je kan de limiet in de definitie van afgeleide ook schrijven als

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

door $b = a + h$ te stellen, en dus $h = b - a$.

Voorbeeld 3. Niet alle functies zijn overal afleidbaar:



(a) Het is mogelijk dat de limiet $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *oneindig* wordt. In dat geval noemen we de functie *niet afleidbaar* in a. We hebben dan een verticale raaklijn aan de grafiek van f in a. Dat is bijvoorbeeld het geval voor de functie $x \mapsto \sqrt{x}$ in het punt $a = 0$. (figuur linksboven)

(b) De limiet bestaat in sommige gevallen niet omdat de linkerlimiet verschilt van de rechterlimiet in een punt a. Er bestaat dan geen raaklijn aan de grafiek van f in a omdat de grafiek een knik maakt in a. Ook dan noemen we de functie *niet afleidbaar* in a. Dat is bijvoorbeeld het geval voor de absolute waarde $x \mapsto |x|$ in het punt $a = 0$. (figuur midden boven) Hier is

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{-h}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} (-1) = -1 \qquad \text{en} \qquad \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{h}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} 1 = 1.$$

(c) In andere gevallen bestaat de limiet mogelijk niet omdat de functie f te erg trilt in de buurt van a. Er bestaan zelfs functies die *nergens* afleidbaar zijn. Hier gaan we niet verder op in.

De vergelijking van de rechte door het punt (x_1, y_1) met rico m is $y - y_1 = m(x - x_1)$. Deze vergelijking gebruiken we om de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van een functie op te stellen.

Eigenschap 1 (Vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f)**.**

De *afgeleide* in een punt is de *rico* van de raaklijn aan de grafiek in dat punt (Zie voorbeeld 2). De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ is dus

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

We berekenen nu *als voorbeeld* enkele afgeleiden van eenvoudige functies rechtstreeks op basis van deze definitie. In de praktijk zal je deze afgeleiden echter altijd met *rekenregels* berekenen.

Voorbeeld 4. Bepaal op basis van de definitie de afgeleide van volgende functies:

1. $f : x \mapsto 2x + 1$ in het punt $a = 3$

CC BY-NC-SA 4.0

Uitwerking:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2(3+h)+1-(2\cdot 3+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{6+2h+1-7}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0} 2 = 2 \end{aligned}$$

2. $f : x \mapsto 2x+1$ in een willekeurig punt a

Uitwerking:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2(a+h)+1-(2a+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h} = 2 \end{aligned}$$

3. $f : x \mapsto x^2+1$ in het punt $a = 3$

Uitwerking:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2+1-(3^2+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2+1-9-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6 \end{aligned}$$

4. $f : x \mapsto x^2+1$ in het punt $a = 4$

Uitwerking:

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2+1-(4^2+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{16+8h+h^2+1-16-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{8h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(8+h) = 8 \end{aligned}$$

5. $f : x \mapsto x^2+1$ in een willekeurig punt a

Uitwerking:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2+1-(a^2+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2+1-a^2-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.0)

Definitie van afgeleide

We kunnen nu de afgeleide van f in *elk* punt a proberen berekenen. Op die manier verkrijgen we een nieuwe functie die we de afgeleide functie noemen:

Definitie 2 (Afgeleide functie)**.** Zij f een reële functie.

In de punten waar de afgeleide bestaat definiëren we de **afgeleide functie van** f, genoteerd f', als:

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

Het is mogelijk dat de afgeleide functie gedefinieerd is op een kleiner domein dan de functie zelf, omdat in een aantal punten de afgeleide niet bestaat.

Voorbeeld 5. Bepaal de afgeleide functie van volgende functies:

(a) $f : x \mapsto 2x + 1$

We hebben boven gezien dat voor willekeurige a, de afgeleide van $f : x \mapsto 2x + 1$ in a gelijk is aan 2. De afgeleide functie is dus $f' : x \mapsto 2$.

(b) $f : x \mapsto x^2 + 1$

We hebben boven gezien dat voor willekeurige a, de afgeleide van $f : x \mapsto x^2 + 1$ in a gelijk is aan $2a$. De afgeleide functie is dus $f' : x \mapsto 2x$.

Om historische en praktische redenen worden er in de literatuur en de verschillende wetenschappen een aantal verschillende notaties gebruikt voor afgeleiden.

Definitie 3 (Notaties afgeleide)**.**

Men gebruikt ook volgende notatie voor de afgeleide functie van een functie f:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f \overset{\text{def}}{=} f' \quad \text{(Leibniz notatie)}$$

of

$$Df \overset{\text{def}}{=} f' \quad \text{(Euler notatie)}$$

Voor de afgeleide van f in a wordt dat:

$$f'(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$$

Voorbeeld 6. We kunnen dus afgeleiden van functies op meerdere manieren schrijven:

(a) $(\sin x)' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \dfrac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}\sin}{\mathrm{d}x}(x)$

(b) $(x^5 + 4x^4 + 1)' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^5 + 4x^4 + 1) = \dfrac{\mathrm{d}(x^5 + 4x^4 + 1)}{\mathrm{d}x}$

Opmerking 2.

- We schrijven in het vervolg zowel f' als $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f$ als $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Deze schrijfwijzen worden door elkaar gebruikt en hebben dezelfde betekenis.
- We gebruiken de notatie met f' alleen als de variabele waarnaar wordt afgeleid duidelijk is uit de context. In de praktijk is die variabele meestal x, maar t, u of y komt ook voor. Als

CC BY-NC-SA 4.0

verwarring mogelijk is, gebruikt je beter de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ (of $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}$).

- Als een functie geschreven wordt als $y = f(x)$ (in deze cursus gebruiken we de notatie $f : x \mapsto f(x)$), wordt ook y' gebruikt voor de afgeleide. Dat is zeker bij differentiaalvergelijkingen erg gebruikelijk.
- Onder andere in cursussen fysica gebruikt men ook $\dot{y}$ voor de afgeleide van een functie $y = f(x)$.

CC BY-NC-SA 4.0