Basisregels

De meest eenvoudige regels voor het berekenen van afgeleiden gaan over afgeleiden van machten, sommen en scalaire veelvouden. Die basisregels moeten later worden aangevuld met de regels voor producten en quotiënten en voor samenstellingen.

Er worden telkens drie versies gegeven van de regels: eerst de notatie met f', vervolgens de notatie met $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, en tenslotte een notatie met differentialen.

Het is belangrijk om na verloop van tijd met elke notatie vertrouwd te worden. Bij het begin van je studie kan je *zelf kiezen* welke notatie voor jou het meest duidelijk is. We vermelden hier niet de notatie Df die in vele handboeken van het secundair onderwijs voorkomt, maar als je er vertrouwd mee bent kan je die natuurlijk ook nog toevoegen.

Eigenschap 1 (Basisregels voor afgeleiden)**.**

De afgeleide van constante en machtsfunctie $x \mapsto c$ en $x \mapsto x^r$ (met $c, r \in \mathbb{R}$) zijn:

$$(x^r)' = rx^{r-1} \qquad (c)' = 0$$

Dezelfde regel kan geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^r) = rx^{r-1} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c = 0$$

of met differentialen:

$$\mathrm{d}x^r = rx^{r-1}\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}c = 0$$

Merk op dat de machtregel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^r) = rx^{r-1}$ niet alleen geldt voor natuurlijke getallen r als exponent, maar voor *alle* exponenten $r \in \mathbb{R}$.

Oefening 1.

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7) = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\pi^2) = \ldots\ldots$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = \ldots\ldots$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3) = \ldots\ldots$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{n+42}) = \ldots\ldots$
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\pi) = \ldots\ldots$

Opmerking 1. We begrijpen deze regels als volgt:

- de afgeleide van een constante functie $x \mapsto c$ is de nulfunctie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5 + \sqrt{2}) = 0$
- de identieke functie $x \mapsto x$ is de functie $x \mapsto x^r$ met $r = 1$, dus de afgeleide functie van de identieke functie is de functie $x \mapsto 1x^0$, wat de constante functie $x \mapsto 1$ is
- bij de afgeleide van een macht $x \mapsto x^r$ komt een kopie van de exponent naar voor en wordt de exponent zelf met 1 verminderd: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^5 = 5x^4$

Voorbeeld 1. Berekening afgeleiden van rationale machten:

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-2}) = (-2) \cdot x^{-2-1} = -2x^{-3}$

(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-42}) = (-42) \cdot x^{-42-1} = -42x^{-43}$

CC BY-NC-SA 4.0

(c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Oefening 2. Bereken volgende afgeleiden:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-1/2}) = \ldots\ldots$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{\sqrt{x}}) = \ldots\ldots$

Uitweiding 1 (Waarom gelden deze regels?)**.**

De afgeleide van een functie f in een punt x is gedefinieerd als

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Als we die definitie toepassen op

- $f(x) = c$, dan wordt dat

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

- $f(x) = x$, dan wordt dat

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1 \end{aligned}$$

- $f(x) = x^2$, dan wordt dat

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

Basisregels

- $f(x) = x^n$ met $n \in \mathbb{N}$, dan wordt dat

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \text{andere binomiaaltermen met minstens } h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (nx^{n-1} + h \cdot (\text{andere termen})) = nx^{n-1} \end{aligned}$$

De redeneringen voor rationale en reële machten worden iets ingewikkelder en we geven ze hier niet.

Er zijn ook eenvoudige regels voor de som en scalaire veelvouden:

Eigenschap 2 (Lineariteit van afleiden)**.** De afgeleide van de som $f + g$ en het scalair veelvoud cf van afleidbare functies f en g (met $c \in \mathbb{R}$) wordt gegeven door:

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g'$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cf) = c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g$$

of met differentialen:

$$\mathrm{d}(cf) = c\mathrm{d}f \qquad \mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$$

Oefening 3.

1. $(7x)' = \ldots\ldots$
2. $(7x^2)' = \ldots\ldots$
3. $(7x+1)' = \ldots\ldots$
4. $(7x^2 + 7x)' = \ldots\ldots$
5. $(x(x+1))' = \ldots\ldots$

Opmerking 2. We begrijpen deze regels als volgt:

- de afgeleide van een scalair veelvoud is het scalair veelvoud van de afgeleide
  Dus: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x) = 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 5 \cdot 1 = 5$
- je kan de formule $(cf)' = cf'$ ook lezen als: 'constanten mag je bij afgeleiden buiten brengen'.
- de afgeleide van een som is de som van de afgeleiden
  Dus: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7+5x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}7 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x) = 0 + 5 = 5$
- je kan de formule $(f+g)' = f' + g'$ ook lezen als: 'afgeleiden mag je term per term berekenen'.
- deze twee regels zijn equivalent met volgende regel:

$$(af+bg)' = af' + bg' \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(af+bg) = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g \qquad \mathrm{d}(af+bg) = a\mathrm{d}f + b\mathrm{d}g$$

CC BY-NC-SA 4.0

die we lezen als:
de afgeleide van een lineaire combinatie is de lineaire combinatie van de afgeleiden

Met deze beperkte set van regels kunnen de afgeleiden van *alle* veeltermen berekend worden.

Oefening 4. Bereken volgende afgeleiden van veeltermen:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2) = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2) \overset{\text{(somregel)}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 \overset{\text{(rekenregels)}}{=} 0 + 1 + 2x = 1 + 2x$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3) = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3 = 0 + 1 + 2x + 3x^2 = 1 + 2x + 3x^2$

Maar je kan ook het resultaat van vorige oefening gebruiken: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3 = 1 + 2x + 3x^2$

En je kan dit antwoord ook in één keer opschrijven, door term per term af te leiden: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3) = (0+)1 + 2x + 3x^2$

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3+x^4) = \ldots\ldots$

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+2x^2+3x^3+4x^4) = \ldots\ldots$

5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(17+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3) = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(17+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3) = 0 + 1 + \frac{1}{2}\cdot 2x + \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = 1 + x + x^2$

6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{\pi}+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4) = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{\pi}+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4) = 0 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot 2x + \frac{1}{3!}\cdot 3x^2 + \frac{1}{4!}\cdot 4x^3 = 1 + \frac{1}{2}\cdot 2x + \frac{1}{3\cdot 2!}\cdot 3x^2 + \frac{1}{4\cdot 3!}\cdot 4x^3 = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$

Oefening 5. Bereken volgende afgeleiden

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x^2+8x+9) = \ldots\ldots$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x^2+8x+3^2) = \ldots\ldots$

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((2x)^2+8x+3^2) = \ldots\ldots$

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x(x+2)+3^2) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0