Scheiden van veranderlijken

Stappenplan:

Stap 1: In dit geval zijn de veranderlijken y en x. We zorgen ervoor dat alle uitdrukkingen waarin y voorkomt aan de linkerkant van het gelijkheidsteken staan en alle uitdrukkingen waarin x voorkomt aan de rechterkant. We schrijven ook de integratietekens.

$$\frac{dy}{dx} = f(y)\cdot g(x) \Rightarrow \frac{dy}{f(y)} = g(x)\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)\,dx$$

Stap 2: Los beide integralen op. Je krijgt nu een uitdrukking van de vorm

$$F(y) = G(x) + C \qquad C \in \mathbb{R},$$

waarbij $F(y) = \int \frac{dy}{f(y)}$ en $G(x) = \int g(x)\,dx$.

Stap 3: Vorm de bovenstaande uitdrukking om naar een uitdrukking in de vorm $y = \ldots$. In het rechterlid mag enkel nog x staan, geen y.

Stap 4: Noteer de algemene oplossing als $y(x) = \ldots$. In deze oplossing moet nog een constante staan.

Stap 5: Indien er beginvoorwaarden gegeven zijn, gebruik je deze om de constante te bepalen. Noteer dan de particuliere oplossing als $y(x) = \ldots$, waarbij je de constante nu vervangen hebt door een concrete waarde.

Opmerking 1. In stap 2 integreren we beiden leden. We lossen hier tweemaal een onbepaalde integraal op. We krijgen dus eigenlijk de uitdrukking

$$F(y) + C_1 = G(x) + C_2.$$

Aangezien C_1 en C_2 beiden constanten zijn, is $C = C_2 - C_1$ ook een constante. Het is dus voldoende om enkel $+C$ te schrijven in één van de leden.

Voorbeeld 1.

1. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$\frac{dN}{dt} = 5 - N, \qquad \text{met } N(2) = 3$$

Uitwerking: Stap 1:

$$\frac{dN}{dt} = 5 - N \Leftrightarrow \frac{dN}{5-N} = dt \Leftrightarrow \int \frac{dN}{5-N} = \int dt.$$

Stap 2:

$$\int \frac{dN}{5-N} = \int \frac{-du}{u} \qquad (u = 5-N; du = -dN)$$
$$= -\ln|u| + C_1 = -\ln|5-N| + C_1$$
$$\int dt = t + C_2$$
$$\int \frac{dN}{5-N} = \int dt$$
$$\Leftrightarrow -\ln|5-N| = t + C \qquad (C = C_2 - C_1)$$

CC BY-NC-SA 4.0

Scheiden van veranderlijken

Stap 3:

$$
\begin{aligned}
&-\ln|5-N| = t + C \\
\Leftrightarrow\ &\ln|5-N| = -(t+C) \\
\Leftrightarrow\ &|5-N| = e^{-(t+C)} \\
\Leftrightarrow\ &5-N = \pm e^{-(t+C)} = \pm e^{-C}\cdot e^{-t} \\
\Leftrightarrow\ &5-N = Ke^{-t} \qquad (K = \pm e^{-C}) \\
\Leftrightarrow\ &-N = Ke^{-t} - 5 \\
\Leftrightarrow\ &N = 5 - Ke^{-t}
\end{aligned}
$$

Stap 4: $N(t) = 5 - Ke^{-t}$

Stap 5:

$$
\begin{aligned}
&N(2) = 5 - Ke^{-2} = 3 \\
\Leftrightarrow\ &Ke^{-2} = 5 - 3 \\
\Leftrightarrow\ &K = 2e^{2} \\
&N(t) = 5 - Ke^{-t} = 5 - 2e^{2}e^{-t} = 5 - 2e^{2-t}.
\end{aligned}
$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/18H.15)