Splitsen in partieelbreuken

0.1 Stappenplan

In sommige toepassingen is het handig om een rationale functie te kunnen schrijven als een som van eenvoudige rationale functies. We beschouwen een rationale functie:

$$f(x) = \frac{px+q}{ax^2+bx+c}.$$

Stap 1: Ontbind de noemer in factoren. Dit wil zeggen dat je nulpunten x_1 en x_2 zoekt van de noemer en de noemer herschrijft in de vorm $a(x-x_1)(x-x_2)$.

Stap 2: Splits de breuk in partieelbreuken van de vorm $\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}\right)$.

Stap 3: Na het schrijven van de breuk als een som zijn er nog enkele onbekende constanten. Deze kunnen bepaald worden door de partieelbreuken terug op gelijke noemer te zetten. Door dan te eisen dat de tellers gelijk moeten zijn kan je de onbekenden bepalen.

Opmerking 1. Een veelgemaakte fout bij het ontbinden in factoren is dat de coëfficiënt a bij de hoogstegraadsterm vergeten wordt. We lichten dit toe in het volgende voorbeeld. Controleer je ontbinding steeds door de termen weer met elkaar te vermenigvuldigen. Indien je niet dezelfde vergelijking uitkomt, heb je ergens een fout gemaakt.

Voorbeeld 1.

1. Ontbind $2x^2-10x+12$ in factoren: $2(x-2)(x-3)$

Uitwerking: We zoeken de nulpunten van de functie $f(x)=2x^2-10x+12$:

$$\begin{aligned} D &= 10^2-4\cdot 2\cdot 12 = 4\\ x &= \frac{-(-10)\pm\sqrt{4}}{2\cdot 2}\\ &= \frac{10\pm 2}{4} = \frac{5\pm 1}{2}\\ x_1 &= \frac{5+1}{2} = 3\\ x_2 &= \frac{5-1}{2} = 2 \end{aligned}$$

We weten nu dat de functie f factoren $(x-2)$ en $(x-3)$ heeft. Echter is $2x^2-10x+12 \neq (x-2)(x-3) = x^2-5x+6$. Vermenigvuldigen we de factoren met de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm,in dit geval 2, dan zien we dat de vergelijking wel klopt:

$$2(x-2)(x-3) = 2(x^2-2x-3x+6) = 2x^2-10x+12.$$

0.2 Voorbeelden: splitsen in partieelbreuken

Voorbeeld 2. Splits de volgende functies in partieelbreuken:

1. $f(x) = \dfrac{px+q}{ax+bx+c} = \dfrac{x+2}{x^2+x-12} = \dfrac{x+2}{x^2+x-12} = \dfrac{5}{7(x-3)} + \dfrac{2}{7(x+4)}$

CC BY-NC-SA 4.0

Splitsen in partieelbreuken

Uitwerking: Stap 1: Om de noemer te ontbinden in factoren zoeken we eerst de nulpunten van de noemer.

$$x^2+x-12=0$$
$$D=1-4\cdot(-12)=49$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm 7}{2}=3 \text{ en } -4$$

Zo vinden we

$$\frac{x+2}{x^2+x-12}=\frac{x+2}{(x-3)(x+4)}$$

Stap 2: De coëfficiënt van de hoogstegraadsterm, a, is hier 1. We krijgen dus een partieelbreuk van de volgende vorm:

$$\frac{x+2}{x^2+x-12}=1\cdot\left(\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+4}\right)$$

Stap 3: Nu rest ons nog de onbekenden A en B te bepalen. Hiervoor brengen we de breuken in het rechterlid op gelijke noemer:

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x^2+x-12}&=\frac{A(x+4)}{(x-3)(x+4)}+\frac{B(x-3)}{(x-3)(x+4)}\\&=\frac{Ax+4A+Bx-3B}{(x-3)(x+4)}\\&=\frac{(A+B)x+4A-3B}{(x-3)(x+4)}\end{aligned}$$

Om deze gelijkheid te doen kloppen, moeten de veeltermen in de tellers van beide leden, $x-2$ en $(A+B)x+4A-3B$, gelijk zijn aan elkaar. Herinner je dat twee veeltermen gelijk zijn aan elkaar als en slechts als de coëfficienten bij elke macht van x aan elkaar gelijk zijn. Bijvoorbeeld: $3x+5=cx+d$ als en slechts als $c=3$ en $d=5$. We moeten dus het volgende stelsel oplossen:

$$\begin{cases} A+B=1 & \text{(coefficienten voor } x\text{)}\\ 4A-3B=2 & \text{(constante term)}\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} B=1-A\\ 4A-3+3A=2\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} B=1-A\\ 7A=5\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} B=\frac{2}{7}\\ A=\frac{5}{7}\end{cases}$$

Zo vinden we dat

$$\frac{x+2}{x^2+x-12}=\frac{5}{7(x-3)}+\frac{2}{7(x+4)}.$$

2. $f(x)=\dfrac{px+q}{ax+bx+c}=\dfrac{3x}{2x^2-2x-12}=\dfrac{3}{10}\cdot\left(\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{2}{x+2}\right)$

Uitwerking: Stap 1: Om de noemer te ontbinden in factoren zoeken we eerst de nulpunten van de noemer.

$$2x^2-2x-12=0$$
$$x^2-x-6=0$$
$$D=1-4\cdot(-6)=25$$
$$x_{1,2}=\frac{1\pm 5}{2}=3 \text{ en } -2$$

CC BY-NC-SA 4.0

Stap 2: De coëfficiënt van de hoogstegraadsterm, a, is hier 2. We krijgen dus een partieelbreuk van de volgende vorm:

$$\frac{3x}{2x^2-2x-12} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}\right)$$

Stap 3: Nu rest ons nog de onbekenden A en B te bepalen. Hiervoor brengen we de breuken in het rechterlid op gelijke noemer:

$$\begin{aligned}\frac{3x}{2x^2-2x-12} &= \frac{A(x+2)}{2(x-3)(x+2)}+\frac{B(x-3)}{2(x-3)(x+2)}\\ &= \frac{Ax+2A+Bx-3B}{2(x-3)(x+2)}\\ &= \frac{(A+B)x+2A-3B}{2(x-3)(x+2)}\end{aligned}$$

Om deze gelijkheid te doen kloppen, moeten de veeltermen in de tellers van beide leden gelijk zijn aan elkaar. Merk op dat de constante term in het linkerlid, $3x$, gelijk is aan nul, want $3x = 3x+0$. We moeten dus het volgende stelsel oplossen:

$$\begin{cases} A + B = 3 & \text{(coefficienten voor } x\text{)}\\ 2A - 3B = 0 & \text{(constante term)}\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} A+B = 3\\ A = \frac{3}{2}B\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} \frac{3}{2}B+B = 3\\ A = \frac{3}{2}B\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} \frac{5}{2}B = 3\\ A = \frac{3}{2}B\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} B = \frac{6}{5}\\ A = \frac{9}{5}\end{cases}$$

Zo vinden we dat

$$\frac{3x}{2x^2-2x-12} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{9}{5(x-3)}+\frac{6}{5(x+2)}\right) = \frac{3}{10}\cdot\left(\frac{3}{x-3}+\frac{2}{x+2}\right).$$

CC BY-NC-SA 4.0