## Integratie door substitutie

De *kettingregel voor afgeleiden* leidt tot de interessante methode van '*integratie door substitutie*'.

**Eigenschap 1** (Substitutieregel)**.**

Als in een integraal $\int h(x)\,dx$ de *integrand* $h(x)$ kan beschouwd worden als

een *product* (dus $h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$)

van een *samengestelde* functie (dus $h_1(x) = f(u(x))$)

met de *afgeleide* van de *binnenste* functie (dus $h_2(x) = u'(x)$),

dan kunnen we de integraal reduceren tot

de *integraal van de buitenste functie* (dus $\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$).

In een formule: voor reële, afleidbare functies $f$ en $u$ waarvoor $f \circ u$ bestaat geldt

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int f(u(x))\,du(x) = \int f(u)\,du.$$

Volgend voorbeeld legt in detail de methode van substitutie uit:

**Voorbeeld 2.** Bereken $\int e^{x^2} 2x\,dx$.

Merk eerst op dat $e^{x^2} = e^{(x^2)}$ en $e^{x^2} \neq (e^x)^2 = e^{2x}$.

We herkennen de functie $x^2$ en haar afgeleide $2x$ in de integrand. Het ligt dus voor de hand te proberen of we met $u(x) = x^2$ ergens geraken, want van de functie $u(x)$ komen zowel de functie als de afgeleide voor in de formule van de substitutieregel. De enige mogelijkheid is dan dat $f(x) = e^x$, of met andere letters genoteerd $f(u) = e^u$, want dan is $f(u(x)) = e^{x^2}$. We passen de substitutieregel toe:

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} 2x\,dx &= \int f(u(x))u'(x)\,dx \\
&= \int f(u(x))\,d(u(x)) \\
&= \int f(u)\,du \\
&= \int e^u\,du \\
&= e^u + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
&= e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Het gebruik van de substitutieregel wordt meestal korter genoteerd.

We schrijven niet expliciet $u(x) = x^2$ zoals hierboven, maar noteren korter $u = x^2$. Dan is $du = dx^2 = 2x\,dx$.

CC BY-NC-SA 4.0

Deze beide uitdrukkingen *substitueer* je in $\int e^{x^2} 2x\, dx$ en je vindt

$$\begin{aligned}\int e^{x^2} 2x\, dx &= \int e^u\, du && \text{(want } x^2 = u \text{ en } 2x\, dx = du\text{)}\\ &= e^u + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(basisintegraal)}\\ &= e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(terug als functie van } x\text{).}\end{aligned}$$

Besluit: Omdat de afgeleide van $x^2$ gelijk is aan $2x$ is het nodig dat de factor $x$ in de integrand voorkomt, anders kan je substitutie niet toegepassen, maar de constante factor mag willekeurig zijn.

**Voorbeeld 3.** Bereken $\int 3x^2(x^3+5)^7\, dx$

Stel $u = x^3 + 5$, dan is $du = d(x^3+5) = 3x^2\, dx$. Dit *substitueren* we in $\int 3x^2(x^3+5)^7\, dx$:

$$\int 3x^2(x^3+5)^7\, dx = \int u^7\, du = \frac{u^8}{8} + c = \frac{(x^3+5)^8}{8} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

**Voorbeeld 4.** Bereken $\int 2x\cos(x^2)\, dx$

Stel $u = x^2$, dan is $du = dx^2 = 2x\, dx$. Dit *substitueren* we in $\int 2x\cos(x^2)\, dx$:

$$\int 2x\cos(x^2)\, dx = \int \cos(u)\, du = \sin(u) + c = \sin(x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

**Oefening 1.** Bereken volgende integralen:

1. $\int e^{2x}\, dx = \ldots\ldots$
2. $\int 2^{3x}\, dx = \ldots\ldots$
3. $\int \frac{4}{2x-3}\, dx = \ldots\ldots$

Volgende voorbeelden berekenen enkele integralen die in sommige boeken en cursussen in de lijst van basisintegralen staan. We hebben er hier voor gekozen om te werken met een eenvoudige lijst basisintegralen, omdat onderstaande integralen met de substitutieregel gemakkelijk berekend kunnen worden.

**Voorbeeld 5.** Bereken volgende integralen (met $a \in \mathbb{R}_0$)

(a) $\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

Deze integraal lijkt op de basisintegraal $\int \cos x\, dx$. Merk ook op dat we de $a$ *niet* uit de cosinus kunnen halen, want $\cos ax \neq a\cos x$. We stellen hier $u = ax$, want veel andere keuze is er niet.

CC BY-NC-SA 4.0

Stel $u = ax$, dan is $du = a\,dx$, dus $dx = \frac{1}{a}\,du$.

$$\int \cos ax\,dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{a}\,du = \frac{1}{a}\int \cos u\,du = \frac{1}{a}\sin u + c = \frac{1}{a}\sin ax + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(b) $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$

Het enige startpunt om $\int \tan x\,dx$ te kunnen berekenen lijkt het toepassen van de definitie:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

Twee kandidaat substituties zijn dan $u(x) = \sin x$ en $u(x) = \cos x$. Nemen we $u(x) = \sin x$, dan is $du = \cos x\,dx$. In de teller staat echter $\sin x\,dx$. Daarom kiezen we voor $u(x) = \cos x$.

Stel $u = \cos x$, dan is $du = d\cos x = -\sin x\,dx$, dus $\sin x\,dx = -du$.
Dit *substitueren* we in $\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Merk op dat we de substitutieregel $\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$ hebben toegepast met $f(u) = \frac{1}{u}$. Dan wordt de substitutieregel $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du$. Dit is een voorbeeld waar de substitutieregel gebruikt wordt om de integraal van een quotiënt van 2 functies te berekenen.

Wanneer en welke substitutie moet uitgevoerd worden is niet altijd even duidelijk. Hier geldt de regel "Oefening baart kunst". De volgende oefening behandelt een typische situatie.

**Oefening 2.**

**1.** $\int (x+2)\sqrt{x-2}\,dx = \ldots\ldots$

**Opmerking 1.** Integralen van het type $\int \frac{1}{px^2 + qx + r}\,dx$:

- met $D = q^2 - 4pr < 0$: worden in deze cursus niet behandeld
- met $D = q^2 - 4pr = 0$: noemer ontbinden in 2 identieke factoren en verder uitrekenen met substitutie
- met $D = q^2 - 4pr > 0$: noemer ontbinden in 2 verschillende factoren en splitsing in partieelbreuken, zie verder.

CC BY-NC-SA 4.0