Basisintegralen

De onbepaalde integraal van een functie f is per definitie $\int f(x)dx = F(x)+c$ met $F' = f$. Dit betekent dat integreren en differentiëren elkaars inverse zijn. Voor een aantal functies is het zeer gemakkelijk om de onbepaalde integraal te vinden: namelijk voor de uitkomsten van de basisafgeleiden. Inderdaad, neem als voorbeeld $(\sin x)' = \cos x$. Stel dat je een functie F zoekt waarvan de afgeleide gelijk is aan het rechterlid, dus gelijk aan $f(x) = \cos x$. De formule voor de afgeleide zegt dan dat $F(x) = \sin x$ als afgeleide $f(x) = \cos x$ heeft. Het volstaat dus om de reeks basis*afgeleiden* van *rechts naar links* te lezen om een hele reeks basis*integralen* te vinden. In onderstaand overzicht is de afgeleide van het rechterlid steeds de integrand in het linkerlid.

Eigenschap 1 (Basisintegralen)**.** (met $c \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
\int 0\,dx &= c & \int dx &= x + c \\
\int x^r\,dx &= \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c \quad (r \in \mathbb{R}, r \neq -1) & \int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x| + c \\
\int e^x\,dx &= e^x + c & \int a^x\,dx &= \frac{a^x}{\ln a} + c \\
\int \sin x\,dx &= -\cos x + c & \int \cos x\,dx &= \sin x + c
\end{aligned}$$

De rekenregels voor som en scalaire veelvouden zijn analoog aan deze voor afgeleiden:

Eigenschap 2. Voor integreerbare functies f en g en $a, b \in \mathbb{R}$ gelden volgende formules:

$$\begin{aligned}
\int af(x)\,dx &= a\int f(x)\,dx && \text{(veelvoud)} \\
\int (f(x)+g(x))\,dx &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx && \text{(som)} \\
\int (af(x)+bg(x))\,dx &= a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx && \text{(lineaire combinatie)}
\end{aligned}$$

De rekenregel voor de som noemt men ook *integratie door splitsing*.

Voorbeeld 1. Basisintegralen:

(a) $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

(b) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

(c) $\int 7^x\,dx = \frac{7^x}{\ln 7} + c$

(d) $\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2\frac{x^2}{2} = x^2 + c$

Oefening 1. Bereken volgende onbepaalde integralen:

1. $\int x^{-2}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Basisintegraal $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$ voor $r = -2$

2. $\int 2y\,dy = \ldots\ldots$

Uitwerking: De naam van de integratievariabele heeft geen belang: $\int f(x)dx = \int f(u)du = \int f(y)dy$. We hebben hier enkel de letter x vervangen door y.

CC BY-NC-SA 4.0

Basisintegralen

3. $\int ax\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Hier is a een constante en $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met a een constante.

4. $\int tx\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Hier is t is een constante.

5. $\int tx\,dt = \ldots\ldots$

Uitwerking: Hier is t de integratievariabele en x dus een constante.

6. $\int 2^8 x\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Hier is 2^8 een constante en $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met a een constante.

7. $\int \cos y\,dy = \ldots\ldots$

Uitwerking: Want $(\sin y)' = \cos y$. Dit is een basisintegraal.

8. $\int \sin t\,dt = \ldots\ldots$

Uitwerking: Want $(\cos t)' = -\sin t$. Dit is een basisintegraal.

9. $\int e^x\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Dit is een basisintegraal.

10. $\int 8^x\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Dit is een basisintegraal.

11. $\int 2^{3x}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Gebruik $2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$. Dit kan ook met substitutie (zie verder).

12. $\int e^{2x}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Gebruik $e^{2x} = (e^2)^x$ en $\ln(e^2) = 2$. Dit kan ook met substitutie (zie verder).

Merk op dat je ook kan schrijven $e^{2x} = (e^x)^2$, maar dan kan je toch nog *niet* de formule voor $\int x^2 dx$ toepassen.

CC BY-NC-SA 4.0

Basisintegralen

Oefening 2. Bereken volgende onbepaalde integralen door splitsing:

1. $\int 3x^2 + 2x + 1 \, dx = \ldots\ldots$
2. $\int 3x^2 + 2x + \cos x + 7^x \, dx = \ldots\ldots$

Opmerking 1.

- De onbepaalde integraal heeft volgende eigenschappen WEL:

  som $\int (\cos x + x^2) \, dx = \int \cos x \, dx + \int x^2 \, dx = \sin x + \frac{x^3}{3} + c$

  constante factor $\int 3x^2 \, dx = 3 \int x^2 \, dx = 3 \, \frac{x^3}{3} + c = x^3 + c$

- Een onbepaalde integraal heeft volgende eigenschappen NIET:

  integraal van *product* ~~$\int \cos x \cdot x^2 \, dx = \int \cos x \, dx \cdot \int x^2 \, dx$~~

  integraal van *samenstelling* ~~$\int (\cos x)^2 \, dx = \frac{(\cos x)^3}{3} + c$~~

  Er bestaan *geen algemene regels*, maar wel een aantal *technieken* die we verder zullen bespreken.

Oefening 3. Zijn volgende gelijkheden juist of fout? Verklaar.

1. Juist | Fout $\int (x \cdot x) \, dx \stackrel{?}{=} (\int x dx) \cdot (\int x \, dx)$
2. Juist | Fout $\int (2 \cdot x) \, dx \stackrel{?}{=} (\int 2 dx) \cdot (\int x \, dx)$
3. Juist | Fout $\int (2 \cdot x) \, dx \stackrel{?}{=} 2 \cdot (\int x \, dx)$
4. Juist | Fout $\int x^2 \, dx \stackrel{?}{=} (\int x \, dx)^2$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/17H.36)