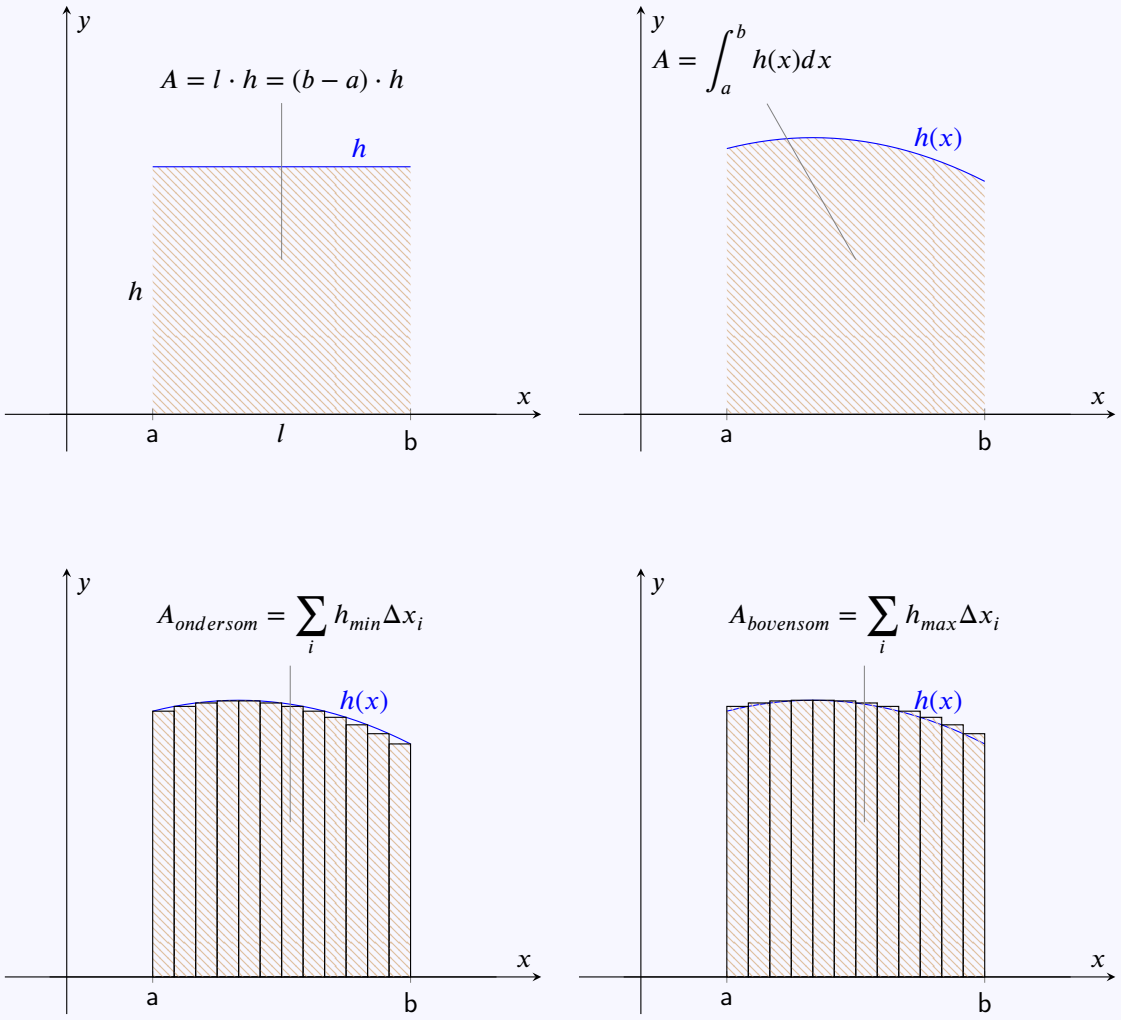
Bepaalde integralen

0.1 Definitie bepaalde integraal

Voorbeeld 1 (Oppervlakte)**.** Voor een rechthoek met lengte l en hoogte h kent iedereen de formule voor de oppervlakte: $A = l \cdot h$. De bepaalde integraal is in zekere zin een veralgemening van deze formule, waarbij de bovenzijde van de rechthoek niet meer 'recht' is, maar ook een kromme kan zijn. We kunnen dan niet meer vermenigvuldigen met de vaste hoogte h, maar we moeten vermenigvuldigen met een 'variërende hoogte' $h(x)$. De notatie en de berekening daarvan gaat via de zogenaamde *bepaalde integraal*, die kan worden gedefinieerd als een limiet van een som van kleine rechthoekjes.



We geven kort de meetkundige (pseudo-)definitie van een bepaalde integraal:

Definitie 1 (Bepaalde integraal)**.**

Zij f een continue, *positieve* functie op een interval $[a, b]$.

De **bepaalde integraal** van f over het interval $[a, b]$, genoteerd als

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

CC BY-NC-SA 4.0

is per definitie gelijk aan de *oppervlakte* van het gebied tussen de grafiek van f, de x-as en de verticale rechten $x = a$ en $x = b$.

We noemen a en b de **integratiegrenzen** en $[a, b]$ het **integratie-interval**, en we **integreren over** dat interval.

Uitweiding 1 (Subtiele subtiliteiten over oppervlaktes)**.** In bovenstaande definitie hebben we aangenomen dat we weten wat de oppervlakte is tussen de grafiek van f, de x-as en de verticale rechten $x = a$ en $x = b$. Strikt wiskundig wordt de definitie in de omgekeerde zin gegeven: we definiëren *de grootte van de oppervlakte onder de kromme* als het getal dat door de bepaalde integraal wordt berekend. De bepaalde integraal zelf wordt dan gedefinieerd als een limiet van ondersommen en bovensommen (zogenaamde Riemannsommen). Die Riemannsommen benaderen steeds beter de oppervlakte onder de kromme, en daarom is het zinvol om (de grootte van) de oppervlakte onder de kromme wiskundig te definiëren als de limiet van die sommen, en dus als de *bepaalde integraal*.

0.2 Verband met de onbepaalde integraal

Volgende belangrijke stelling zegt dat we de bepaalde integraal (dus een oppervlakte, of meer algemeen een oneindige-som-van-oneindig-kleine-dingen) kunnen berekenen met behulp van de onbepaalde integraal.

Eigenschap 1 (Verband tussen bepaalde en onbepaalde integralen)**.**

Zij f een continue functie op een interval $[a, b]$ en F een primitieve functie van f (dus $\int f(x)\,dx = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$). Dan geldt

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a) \qquad \overset{\text{notatie}}{=} \qquad \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Deze formule laat toe om het berekenen van een *bepaalde* integraal te reduceren tot het berekenen van de *onbepaalde* integraal, en dan de integratiegrenzen in te vullen.

Merk op dat het hierbij geen probleem is dat een primitieve functie slechts op een constante na bepaald is:

$$\big(F(b) + c\big) - \big(F(a) + c\big) = F(b) - F(a).$$

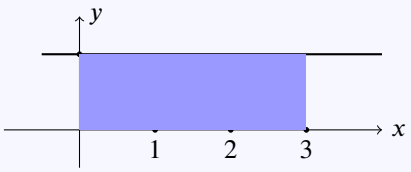
Elke primitieve functie F van f is dus geschikt om de bepaalde integraal uit te rekenen.

Hierbij is $\Big[F(x)\Big]_a^b \overset{\text{def}}{=} F(b) - F(a)$ een handige notatie. Soms gebruikt men ook $F(x)\Big|_a^b \overset{\text{def}}{=} F(b) - F(a)$.

Voorbeeld 2. Eenvoudige bepaalde integralen:

1. $\displaystyle\int_0^3 1\,dx = \Big[x\Big]_0^3 = 3 - 0 = 3$

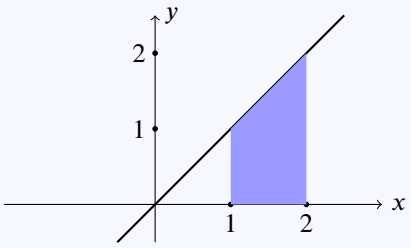
De berekende oppervlakte is de oppervlakte van het gebied tussen de de rechte $y = 1$ (dit is de grafiek van $f(x) = 1$), de x-as en de verticale rechten $x = 0$ en $x = 3$.



2. $\displaystyle\int_1^2 x\,dx = \Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_1^2 = \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) = \frac{1}{2}(4 - 1) = \frac{3}{2}$

CC BY-NC-SA 4.0

De berekende oppervlakte is de oppervlakte van het gebied tussen de de rechte $y = x$ (dit is de grafiek van $f(x) = x$), de x-as en de verticale rechten $x = 1$ en $x = 2$.



3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$

Uit de formule $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$ volgen onmiddellijk de basiseigenschappen:

Eigenschap 2.

Zij F en G functies gedefinieerd op een interval $[a, b]$, $c \in [a, b]$ en $k, l \in \mathbb{R}$. Dan is

$$\begin{aligned}
\big[F(x)\big]_a^a &= F(a) - F(a) = 0 \\
\big[kF(x)\big]_a^b &= k\big[F(x)\big]_a^b \\
\big[F(x) + G(x)\big]_a^b &= \big[F(x)\big]_a^b + \big[G(x)\big]_a^b \\
\big[kF(x) + lG(x)\big]_a^b &= k\big[F(x)\big]_a^b + l\big[G(x)\big]_a^b \\
\big[F(x)\big]_b^a &= -\big[F(x)\big]_a^b = \big[-F(x)\big]_a^b \\
\big[F(x)\big]_a^b &= \big[F(x)\big]_a^c + \big[F(x)\big]_c^b
\end{aligned}$$

Uit deze eigenschappen van het symbool $\big[F(x)\big]_a^b$ volgt dan onmiddellijk:

Eigenschap 3 (Eigenschappen van de bepaalde integraal)**.**

Zij f een functie gedefinieerd op $[a, b]$ en $c \in [a, b]$. Dan is

$$\begin{aligned}
\int_a^a f(t)\,dt &= 0 && \text{(integreren over een leeg interval)} \\
\int_b^a f(t)\,dt &= -\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b (-f(t))\,dt && \text{(integreren in omgekeerde richting)} \\
\int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt && \text{(integratie-interval opsplitsen)}
\end{aligned}$$

Voorbeeld 3.

CC BY-NC-SA 4.0

Bepaalde integralen

1. $\displaystyle\int_4^8 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_4^8 = \frac{1}{2}(8^2 - 4^2) = \frac{1}{2}(64 - 16) = 24$

2. $\displaystyle\int_8^4 x\,dx = -\int_4^8 x\,dx = -24,$

of anders berekend $\displaystyle\int_8^4 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_8^4 = \frac{1}{2}(4^2 - 8^2) = \frac{1}{2}(16 - 64) = -24$

3.

$$\begin{aligned}\int_4^8 x\,dx &= \int_4^6 x\,dx + \int_6^8 x\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_4^6 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_6^8 = \frac{1}{2}(6^2 - 4^2) + \frac{1}{2}(8^2 - 6^2) = \frac{1}{2}(36 - 16 + 64 - 36) = 24\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/18H.31)