Complexe getallen

Veeltermvergelijkingen hebben niet altijd reële oplossingen. Zo hebben vierkantsvergelijkingen met een negatieve discriminant geen reële wortels. Een erg eenvoudig voorbeeld is de vergelijking $x^2 + 1 = 0$ of, anders geschreven, $x^2 = -1$. Deze vergelijking heeft geen reële wortels, omdat het kwadraat van een reëel getal nooit negatief kan zijn, en dus nooit gelijk aan -1.

De zogenaamde *complexe getallen* vormen een uitbreiding van de reële getallen. Aan de reële getallen wordt een nieuw 'getal' toegevoegd dat traditioneel i genoemd wordt, en i is *per definitie* een oplossing van de vergelijking $x^2 + 1 = 0$. Er geldt dus per definitie dat $i^2 = -1$. Het is een hoogst merkwaardig feit dat door een oplossing van deze vergelijking $x^2 + 1 = 0$ toe te voegen, ineens *alle* veeltermvergelijkingen met reële coëfficiënten oplossingen blijken te hebben.

Definitie 1.

We noemen de uitdrukking $a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en $i^2 = -1$ een **complex getal**. Het symbool i noemen we de **imaginaire eenheid**. De verzameling van alle complexe getallen noemen we $\mathbb{C}$.

Per definitie zijn twee complexe getallen $a + bi$ en $c + di$ enkel aan elkaar gelijk als $a = c$ en $b = d$.

We noteren een willekeurig complex getal dikwijls met z. Stel $z = a + bi$.

- We noemen a het **reëel deel** van z en noteren $\mathrm{Re}(z) \overset{\text{def}}{=} a$.
- We noemen b het **imaginair deel** van z en noteren $\mathrm{Im}(z) \overset{\text{def}}{=} b$.
- Als $b = 0$ noemen we $z = a$ een **(zuiver) reëel getal** ($\mathbb{R}$ is dus een deelverzameling van $\mathbb{C}$).
- Als $a = 0$ noemen we $z = bi$ een **(zuiver) imaginair getal**.

Voorbeeld 1. Volgende uitdrukkingen zijn allemaal complexe getallen:

(a) $2 + 3i$ (c) $42i$ (e) $1 + i\sqrt{2}$

(b) 42 (d) $1 + \pi$ (f) $\dfrac{1 - i\sqrt{5}}{2}$

De getallen 42 en $1 + \pi$ zijn zuiver reële getallen, en $42i$ is een zuiver imaginair getal.

0.1 Rekenen met complexe getallen

Voor complexe getallen kan, met de gebruikelijke rekenregels, de optelling en vermenigvuldiging gedefinieerd worden, waarbij steeds i^2 vervangen wordt door -1.

Definitie 2 (Som en product)**.**

Als $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, en dus $z_1 = a + bi, z_2 = c + di \in \mathbb{C}$ geldt:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Opmerking 1.

Als je twee complexe getallen kan optellen, is het ook eenvoudig om ze van elkaar af te trekken: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$. Je kan twee complexe getallen ook *delen* door elkaar, maar daar gaan we in deze cursus niet verder op in.

CC BY-NC-SA 4.0

Oefening 1.

1. $(1+2i)+(3+4i) = \ldots\ldots$

2. $(1+2i)\cdot(3+4i) = \ldots\ldots$

3. $(1+2i)\cdot(1-2i) = \ldots\ldots$

4. $(1+2i)\cdot\dfrac{1-2i}{2} = \ldots\ldots$

5. $(1+2i)\cdot i = \ldots\ldots$

6. $i^3 = \ldots\ldots$

7. $i^4 = \ldots\ldots$

0.2 Vierkantsvergelijkingen

Voorbeeld 2. Bepaal alle oplossingen van volgende veeltermvergelijkingen.

1. $x^2 = 64$. Antwoord: $x = \pm 8$.

2. $x^2 = -64$

Uitwerking: We schrijven eerst -1 als i^2, dan wordt de vergelijking $x^2 = (i\,8)^2$ en vinden dan de oplossingen $x = 8i$, en $x = -8i$.

3. $x^2 = -3$

Uitwerking: We schrijven eerst -1 als i^2, dan wordt de vergelijking $x^2 = (i\sqrt{3})^2$ en vinden dan de oplossingen $x = i\sqrt{3}$, en $x = -i\sqrt{3}$.

We kunnen dus complexe getallen vinden waarvan het kwadraat een negatief reëel getal is. Stel dat we een vierkantsvergelijking hebben met negatieve disciminant D, bijvoorbeeld

$$z^2 + z + 1 = 0$$

met

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -3,$$

dan zijn er geen reële oplossingen, maar kunnen we toch twee complexe oplossingen vinden. We weten dat $D = -3 = (i\sqrt{3})^2$, of ook $i\sqrt{3} = i\sqrt{-D}$ want $-D = 3$. We spreken af om het symbool $\sqrt{\cdot}$ enkel te gebruiken voor positieve reële getallen, niet voor complexe getallen, maar in andere cursussen kunnen andere afspraken gemaakt worden. De oplossingen van de vierkantsvergelijking zijn

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{en} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

Inderdaad $z_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ is een oplossing van $z^2 + z + 1 = 0$ want

$$\begin{aligned}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + 1 &= \frac{(-1+i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})}{4} + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + 1\\ &= \frac{1 - i\,2\sqrt{3} - 3}{4} + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + 1\\ &= \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{-2}{2} + 1 = 0.\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

Met een analoge berekening kan je nagaan dat ook z_2 een oplossing is van $z^2 + z + 1 = 0$.

Zo maken de complexe getallen de theorie van het oplossen van vergelijkingen in zekere zin makkelijker. Bij vierkantsvergelijkingen moeten we geen gevalsonderscheid meer maken naargelang de waarde van de discriminant $D = b^2 - 4ac$. Bij $D < 0$ zijn de oplossingen dan geen reële getallen, maar twee complexe getallen.

Eigenschap 1 (Oplossen van vierkantsvergelijkingen met negatieve discriminant)**.**

De twee oplossingen z_1 en z_2 van een vierkantsvergelijking $az^2 + bz + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ met discriminant $D = b^2 - 4ac < 0$ zijn

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}$$

Oefening 2. Los volgende vergelijkingen op over de complexe getallen

1. $x^2 + 4 = 0$. Antwoord: … …

2. $x^2 + 2x + 5 = 0$. Antwoord: … …

3. $x^2 + 3x + 7 = 0$. Antwoord: … …

CC BY-NC-SA 4.0