Matrixvermenigvuldiging

Definitie 1 (Herhaling matrix-vector-product).

Het product van een $m \times n$ matrix met een $n \times 1$ kolomvector is de $m \times 1$ kolomvector gegeven door

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + \ldots b_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1}b_1 + a_{1,2}b_2 + \ldots + a_{1,n}b_n \\ a_{2,1}b_1 + a_{2,2}b_2 + \ldots + a_{2,n}b_n \\ \\ a_{m,1}b_1 + a_{m,2}b_2 + \ldots + a_{m,n}b_n \end{bmatrix}.$$

Definitie 2 (Matrix-matrix-product).

Het product van $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is $m \times n$ matrix $\mathbf{C} = [c_{i,j}]$ waarbij het element $c_{i,j}$ op de i-de rij en de j-de kolom gelijk is aan het product van de i-de rij van $\mathbf{A}$ met j-de kolom van $\mathbf{B}$:

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \ldots + a_{i,p}b_{p,j}$$

Visueel zien we dit als

$$AB = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & b_{p,2} & \cdots & b_{p,n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,n} \end{bmatrix}$$

waarbij $c_{1,2} = a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + \ldots + a_{1,p}b_{p,2}$

Voorbeeld 1.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 19 & 22 \end{bmatrix}.$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 31 & 36 \end{bmatrix}.$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 19 & 22 \\ 18 & 31 & 36 \end{bmatrix}.$

Opmerking 1. Optellen van twee matrices werkt enkel als ze dezelfde vorm hebben: evenveel rijen en evenveel kolommen. De vermenigvuldiging daarentegen werkt enkel voor $m \times p$ met $p \times n$ matrices, dus als het aantal *kolommen* van de eerste matrix gelijk is aan het aantal *rijen* van de tweede. Het product van een 5×3 matrix $\mathbf{A}$ en een 3×2 matrix $\mathbf{B}$ is de 5×2 matrix $\mathbf{AB}$. Maar een matrix $\mathbf{BA}$ *bestaat dan niet*. Het product $\mathbf{BA}$ is in dit geval *niet gedefinieerd*! Dit toont al meteen aan dat in het algemeen matrixvermenigvuldiging niet commutatief kan zijn: er geldt niet altijd dat $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

CC BY-NC-SA 4.0