Matrices

Net zoals een vector een manier is om veel *getallen* bij te houden, is een *matrix* een manier om veel *vectoren* (van dezelfde dimensie) bij te houden. Een matrix is *een rechthoek van getallen*, met m rijen van telkens n getallen. Matrices zijn erg nuttig bij de studie van stelsels van vergelijkingen maar komen ook voor in andere contexten.

0.1 Definitie van een matrix

Voorbeeld 1. Examenresultaten voor verschillende vakken kan je bijhouden in een tabel:

	Wiskunde	Nederlands	Engels	Duits
An	80	80	40	20
Bart	72	62	23	11
Chris	74	65	38	10
Dirk	73	70	29	17
Els	75	71	30	15

Je kan dezelfde gegevens ook in volgende (punten)matrix $\mathbf{A}$ opschrijven

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 80 & 80 & 40 & 20 \\ 72 & 62 & 23 & 11 \\ 74 & 65 & 38 & 10 \\ 73 & 70 & 29 & 17 \\ 75 & 71 & 30 & 15 \end{bmatrix}.$$

In deze voorstelling bevat elke rij de punten van een bepaalde leerling, en elke kolom de punten van een bepaald vak. We noemen deze matrix $\mathbf{A}$ een 5×4-matrix met 5 *rijen* en 4 *kolommen*. Het getal op rij 3 en kolom 2 zijn de punten van Chris voor Nederlands.

Definitie 1 (Matrix)**.**

Een reële $m \times n$ **matrix** $\mathbf{A}$ is een rechthoekig rooster van reële getallen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{met } m \text{ rijen en } n \text{ kolommen.}$$

- De **matrixelementen** (of soms ook *componenten*) van $\mathbf{A}$ zijn de getallen $a_{11}, \ldots a_{ij}, \ldots, a_{mn}$.
- Men noteert ook $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.
- Een $m \times n$ matrix heeft m rijen en n kolommen.
- Een $n \times n$ matrix (dus met evenveel rijen als kolommen) noemen we een **vierkante matrix**.
- Een $m \times 1$ **kolommatrix** (of **kolomvector**) is een matrix met één kolom.
- Een $1 \times n$ **rijmatrix** (of **rijvector**) is een matrix met één rij.
- De **diagonaal** van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ bestaat uit de elementen a_{ii} die we de **diagonaalelementen** van de matrix noemen. Voor een vierkante matrix vormen ze inderdaad de diagonaal van de matrix. In volgende voorbeelden zijn de diagonaalelementen blauw gekleurd:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

Voorbeeld 2.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ is een 2×2 matrix met $a_{11} = 1, a_{21} = 3, a_{12} = 2$ en $a_{22} = 4$
- $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ -1 & 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 2×3 matrix en $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 3×2 matrix.
- $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ is een rijmatrix, en $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ is een kolommatrix.

Opmerking 1.

- De eerste index i geeft het nummer van de *rij* aan, de tweede index j die van de *kolom*.
- In sommige cursussen gebruikt men ronde haakjes in plaats van rechte haakjes: $\mathbf{A} = (a_{ij})$.
- Strikt wiskundig zijn vectoren, rijmatrices en kolommatrices *verschillend*,dus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \neq (1, 3, -2).$$

Enkele speciale types van vierkante matrices krijgen een eigen naam:

Definitie 2 (Speciale matrices)**.**

De **nulmatrix** $\mathbf{O}_n$	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen 0 zijn.
De **eenheidsmatrix** $\mathbf{I}_n$	is een $n \times n$ matrix waarvan de diagonaalelementen gelijk zijn aan 1 en alle andere elementen gelijk zijn aan 0.
Een **diagonaalmatrix**	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen buiten de diagonaal 0 zijn.
Een **bovendriehoeksmatrix**	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen *onder* de diagonaal 0 zijn.
Een **onderdriehoeksmatrix**	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen *boven* de diagonaal 0 zijn.

Voorbeeld 3. Een eenheidsmatrix, een diagonaalmatrix en een bovendriehoeksmatrix:

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Definitie 3. Zij $\mathbf{A}$ een $m \times n$ matrix.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{met } m \text{ rijen en } n \text{ kolommen.}$$

De **getransponeerde** matrix $\mathbf{A}'$ is een $n \times m$ matrix waarbij de rij-elementen van $\mathbf{A}'$ overeenkomen met de kolomelementen van $\mathbf{A}$ en de kolomelementen van $\mathbf{A}'$ overeenkomen met de rij-elementen van

CC BY-NC-SA 4.0

$\mathbf{A}$. Dus

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{met } n \text{ rijen en } m \text{ kolommen.}$$

Voorbeeld 4. Zij $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ een 2×3 matrix.

Dan is $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ een 3×2 matrix.

0.2 Rekenen met matrices

We definiëren de optelling en de scalaire vermenigvuldiging van matrices op dezelfde manier als voor vectoren: element-per-element. Voor de optelling is het dus belangrijk dat beide matrices dezelfde afmetingen hebben: allebei evenveel rijen en evenveel kolommen.

Definitie 4 (Optelling en scalair veelvoud van matrices)**.**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$r \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \cdots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \cdots & ra_{mn} \end{bmatrix}$$

Het verschil van matrices en de tegengestelde matrix worden gedefinieerd net zoals voor vectoren.

Voorbeeld 5 (Som, verschil, tegengestelde en scalair veelvoud van matrices)**.**

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 22 \\ 33 & 36 \end{bmatrix} \qquad 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 44 \end{bmatrix} \qquad -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

maar de sommen $\begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 40 & 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 10 & 200 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ bestaan niet.

Het product van een matrix met een kolomvector:

Definitie 5 (Matrix-vector-product)**.**

Het product van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ met een $n \times 1$ kolomvector $\mathbf{b}$ is de $m \times 1$ kolomvector $\mathbf{Ab}$ gegeven

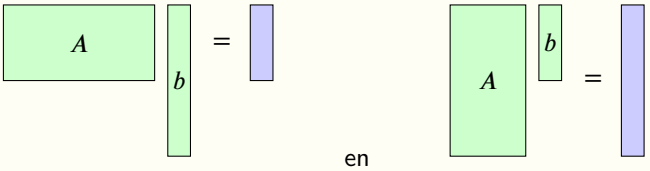
CC BY-NC-SA 4.0

door

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \ldots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \ldots + a_{2n}b_n \\ \\ \vdots \\ \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \ldots + a_{mn}b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_k \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_k \end{bmatrix}.$$

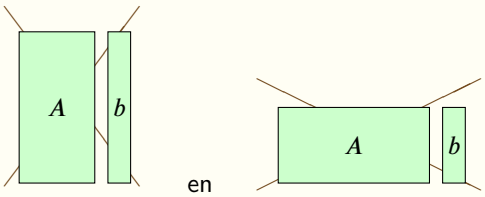
Opmerking 2.

(a) Het product $\mathbf{Ab}$ is enkel gedefinieerd als het aantal *kolommen* van $\mathbf{A}$ gelijk is aan het aantal *rijen* van $\mathbf{b}$. Het resultaat is een *kolomvector* met evenveel rijen als $\mathbf{A}$. Visueel betekent dit:



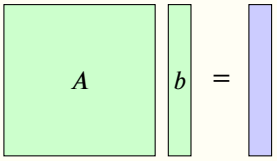
en

maar volgende producten zijn onmogelijk:



en .

Enkel voor *vierkante* matrices heeft $\mathbf{Ab}$ dezelfde vorm als $\mathbf{b}$:



(b) Zoals gebruikelijk bij producten schrijft men soms ook een punt: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{Ab}$. Bij matrices wordt de punt echter meestal weggelaten.

(c) Als $\mathbf{A}$ een rijvector is schrijven we dergelijke matrix soms ook met een kleine letter $\mathbf{a}$, dan is het product $\mathbf{ab}$ het reële getal gegeven door

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k \quad \in \mathbb{R}.$$

en dit komt neer op het *scalair product* van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.

Voorbeeld 6.

CC BY-NC-SA 4.0

(a) $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix} = 1\cdot 5 + 2\cdot 7 = 19$ en $\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix} = 3\cdot 5 + 4\cdot 7 = 43.$

(b) $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix} = 1\cdot 6 + 2\cdot 8 = 22$ en $\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix} = 3\cdot 6 + 4\cdot 8 = 50.$

(c) $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 5 + 2\cdot 7\\3\cdot 5 + 4\cdot 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19\\43\end{bmatrix}.$

(d) $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 6 + 2\cdot 8\\3\cdot 6 + 4\cdot 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}22\\50\end{bmatrix}.$

(e) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\3 & 4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 + 4\cdot 2\\3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 1 + 6\cdot 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 + 6 + 3 + 8\\6 + 12 + 5 + 12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19\\35\end{bmatrix}.$

CC BY-NC-SA 4.0