KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Voorkennisles 3

WEEK 3

(Versie 2026/09/18H.45)

Inhoudsopgave

1 Exponentiele en logaritmische functies 1.1

1.1 Exponentiële functies 1.1

1.2 Logaritmische functies 1.5

1.2.A Oefeningen exponentiële en logaritmische functies 1.9

2 Limieten 2.1

2.1 Inleiding limieten 2.1

2.2 Rekenregels limieten 2.6

2.3 Limieten in $\pm\infty$ 2.9

2.4 Limieten in nulpunten van de noemer 2.13

2.4.A Extra oefeningen limieten 2.16

1.1 Exponentiële functies

Met twee positieve getallen a en r kunnen we altijd een derde getal a^r construeren. We noemen a het grondtal, r de exponent en a^r de macht (die gelezen wordt als *a tot de r-de macht*). Door nu één van beide getallen constant te houden en het andere in waarde te laten variëren kunnen we twee soorten *functies* definiëren.

- We kunnen een vaste waarde geven aan de exponent, bv. $r = 2$, en het *grondtal laten variëren*. Op deze manier bekomen we de functie

  $$f(x) = x^2 \quad (a^r \text{ met } r = 2).$$

  Op dezelfde manier bekomen we ook de functies

  $$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x} \quad (a^r \text{ met } r = -1)$$

  of

  $$f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x} \quad (a^r \text{ met } r = 1/2)$$

  of

  $$f(x) = x^r \quad (a^r \text{ met r vast gekozen}).$$

- Als we een vaste waarde geven aan het grondtal, bv. $a = 2$, kunnen we de *exponent laten variëren*. Zo bekomen we de functie

  $$f(x) = 2^x \quad (a^r \text{ met } a = 2).$$

  Deze functie noemen we een *exponentiële functie*.

  Op dezelfde manier bekomen we bijvoorbeeld ook de functies

  $$f(x) = 10^x \quad (a^r \text{ met } a = 10)$$

  of

  $$f(x) = a^x \quad (a^r \text{ met } a > 0 \text{ en } a \neq 1).$$

Opmerking 1.1.1.

Er moeten beperkingen worden opgelegd aan mogelijke grondtallen a van een exponentiële functie:

- a mag niet negatief zijn, want dat geeft problemen voor niet-gehele waarden van de exponent x (bv. $(-3)^{\frac{1}{2}}$)
- a mag niet gelijk zijn aan 0, want dat geeft problemen voor negatieve exponenten x (bv. $0^{-1} = 1/0$)
- a mag niet gelijk zijn aan 1, want $1^x = 1$ voor alle x, en de functie $f(x) = 1^x = 1$ is een *constante functie* met waarde 1. Deze functie beschouwen we niet als een exponentiële functie.

We bestuderen nu de *grafiek* van een exponentiële functie $f(x) = a^x$. Het zal blijken dat er een belangrijk onderscheid is tussen de gevallen a groter dan 1 en a tussen 0 en 1.

Voorbeeld 1.1.1 (Het geval $a > 1$:).

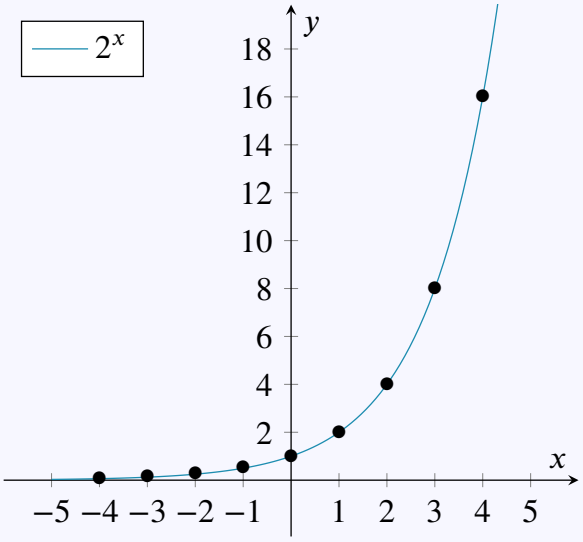
We nemen als voorbeeld $a = 2$. We schetsen de grafiek van de exponentiële functie $f(x) = 2^x$ met grondtal 2 door een aantal punten van de grafiek te bepalen.
In onderstaande tabel staan de functiewaarden voor $x = -4, -3, \ldots, 3, 4$:

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Exponentiële functies

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16

Dit levert een aantal punten op op de gezochte grafiek (zie de bolletjes op de figuur). Met een rekentoestel kunnen we ook functiewaarden berekenen voor niet-gehele waarden van x, bv. $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1.4142$. Op die manier krijgen we een vrij precies beeld van de grafiek:



Voorbeeld 1.1.2 (Het geval $0 < a < 1$:).

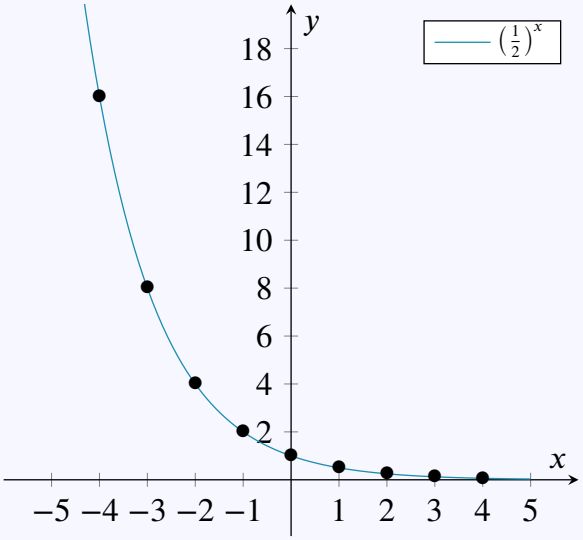
We nemen als voorbeeld $a = \frac{1}{2} = 0.5$. We schetsen de grafiek van de exponentiële functie $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ met grondtal $\frac{1}{2}$ door een aantal punten op de grafiek te bepalen.
In onderstaande tabel staan de functiewaarden voor $x = -4, -3, \ldots, 3, 4$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125	0.0625

Dit levert weer een aantal punten op op de grafiek. Met een rekentoestel kunnen we opnieuw functiewaarden voor niet-gehele waarden van x berekenen, bv. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.7071$. Op die manier krijgen we weer een vrij precies beeld van de grafiek:

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Exponentiële functies



Deze voorbeelden bestudeerden de specifieke grondtallen $a = 2$ en $a = \frac{1}{2}$, maar ze vertonen een aantal eigenschappen die gelden voor *alle* exponentiële functies:

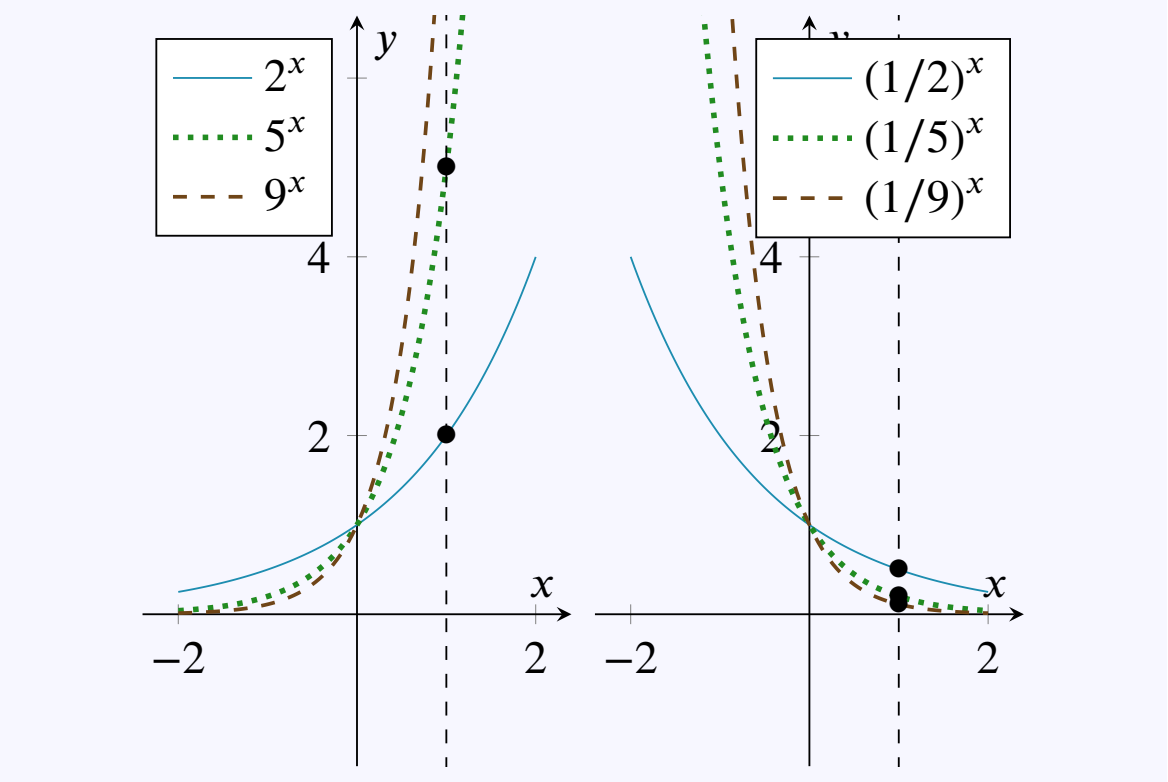
Eigenschap 1.1.1 (Exponentiële functies)**.**

- Als $a > 1$ dan is de functie $f(x) = a^x$ *strikt stijgend*: $x < y \iff a^x < a^y$
- Als $0 < a < 1$ dan is de functie $f(x) = a^x$ *strikt dalend*: $x < y \iff a^x > a^y$
- De functie $f(x) = a^x$ is gedefinieerd voor alle reële getallen x, dus het domein is $\mathbb{R}$.
- De functiewaarden van $f(x) = a^x$ zijn strikt positief.
- De grafiek van $f(x) = a^x$ snijdt de y-as steeds in het punt $(0, 1)$ (want $a^0 = 1$).
- De grafiek van $f(x) = a^x$ snijdt de x-as niet ($f(x) = a^x$ heeft geen nulpunten).
- De grafiek van $f(x) = a^x$ snijdt de rechte $x = 1$ in het punt $(1, a)$ (want $a^1 = a$).

Voorbeeld 1.1.3.

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Exponentiële functies



Wanneer we als grondtal a de specifieke waarde $e = 2,7182818\ldots$ kiezen, dan verkrijgen we een veel voorkomende exponentiële functie $f(x) = e^x$, die we meestal *de* exponentiële functie noemen. We noteren deze functie met exp.

Definitie 1.1.1 (*De* exponentiële functie)**.**

De functie $f(x) = e^x$ noemen we *de* exponentiële functie en wordt genoteerd met exp:

$$\exp(x) = e^x$$

Als we in de gelijkheid (zie De logaritme)

$$x = e^{\ln x}$$

x vervangen door a^x dan bekomen we

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

Hiermee kunnen we een *willekeurige* exponentiële functie $f(x) = a^x$ herschrijven in termen van *de* exponentiële functie $f(x) = e^x$.

Merk op dat $\ln a$ positief of negatief is naargelang $a > 1$ of $0 < a < 1$.

Eigenschap 1.1.2 (Herschijf een willekeurige exponentiële functie a^x in termen van e^x)**.**

als $a > 1$	dan is $a^x = e^{kx}$	met $k = \ln a > 0$
als $0 < a < 1$	dan is $a^x = e^{-kx}$	met $k = -\ln a = \ln(1/a) > 0$

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Logaritmische functies

We herhalen de definitie van logaritme

$$\log_a b = r \Leftrightarrow a^r = b,$$

en de belangrijke eigenschappen

$$\log_a a^x = x \qquad \text{en} \qquad a^{\log_a x} = x.$$

Door in de uitdrukking voor de logaritme $\log_a b$ het grondtal a constant te houden en het getal b te laten variëren, bekomen we een *functie*, namelijk een zogenaamde *logaritmische functie*:

Definitie 1.2.1 (Logaritmische functie)**.** De **logaritmische functie met grondtal** a ($a > 0$ en $a \neq 1$), is de reële functie

$$f(x) = \log_a(x)$$

waarbij x enkel *strikt positieve waarden* mag aannemen.

Opmerking 1.2.1.

- Bij de invoering van de logaritme $\log_a b$ (voorkennisles 2) hebben we de noodzaak besproken om beperkingen op te leggen aan het grondtal a en het argument b.
- $f(x) = a^x$ en $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ zijn **inverse** functies want

$$f(f^{-1}(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$$

en

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(a^x) = \log_a a^x = x.$$

We bestuderen nu de *grafiek* van een logaritmische functie $f(x) = \log_a(x)$. Het zal blijken dat er een belangrijk onderscheid is tussen de gevallen a groter dan 1 en a tussen 0 en 1. In de cursus Wiskunde I wordt enkel het geval $a > 1$ besproken, voor de volledigheid en de analogie met exponentiële functies behandelen we hier beide gevallen (zeker nuttig voor andere vakken).

Voorbeeld 1.2.1 (Het geval $a > 1$:)**.**

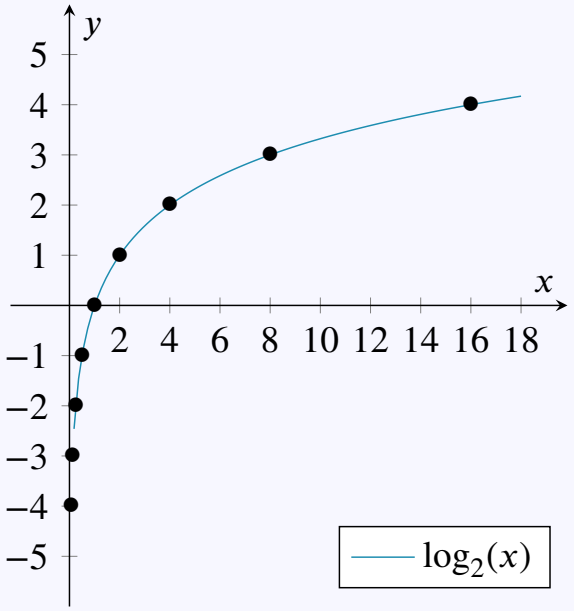
We nemen als voorbeeld $a = 2$. We schetsen de grafiek van de logaritmische functie $f(x) = \log_2(x)$ door een aantal punten van de grafiek te bepalen. Het ligt voor de hand om voor de x-waarden machten van 2 te kiezen, omdat daarvoor de 2-logaritme gemakkelijk te bepalen is.

x	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16
$y = \log_2(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Dit levert voldoende punten op om de grafiek betrouwbaar te schetsen:

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Logaritmische functies

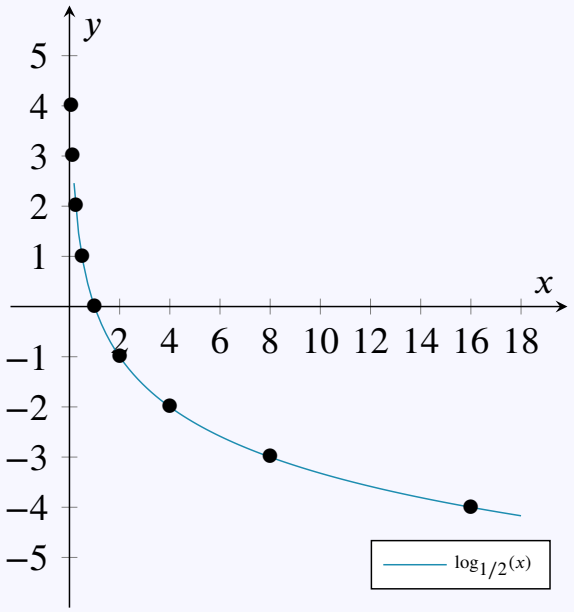


Voorbeeld 1.2.2 (Het geval $0 < a < 1$:).

We nemen als voorbeeld $a = \frac{1}{2} = 0.5$. We schetsen de grafiek van de logaritmische functie $f(x) = \log_{1/2}(x)$ met grondtal $\frac{1}{2}$ door een aantal punten van de grafiek te bepalen. We kunnen dezelfde tabel hergebruiken:

x	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16
$y = \log_{1/2}(x)$	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4

Dit levert opnieuw voldoende punten op om de grafiek betrouwbaar te schetsen:



CC BY-NC-SA 4.0

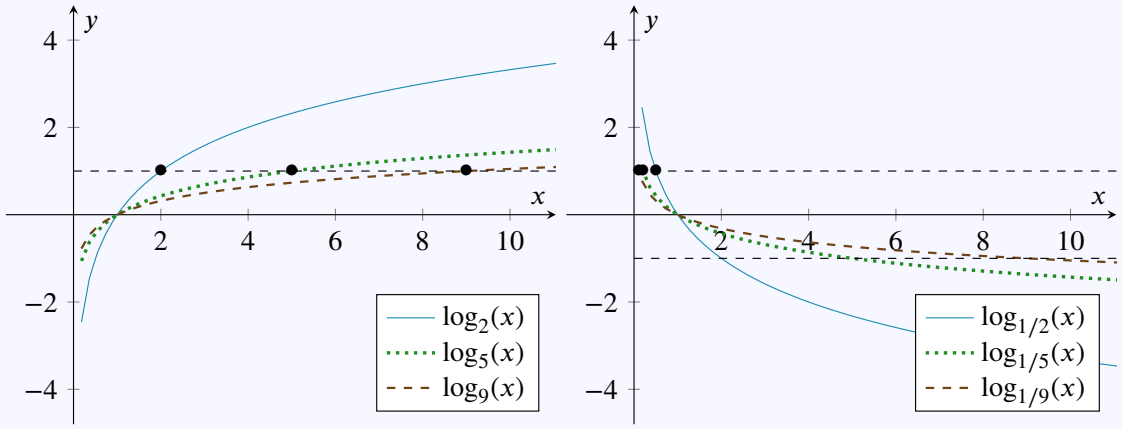
1.2 Logaritmische functies

Deze voorbeelden bestudeerden de specifieke grondtallen $a = 2$ en $a = 1/2$, maar ze vertonen een aantal eigenschappen die gelden voor *alle* logaritmische functies:

Eigenschap 1.2.1 (Logaritmische functies)**.**

- Als $a > 1$ dan is de functie $f(x) = \log_a(x)$ *strikt stijgend*: $x < y \iff \log_a(x) < \log_a(y)$
- Als $0 < a < 1$ dan is de functie $f(x) = \log_a(x)$ *strikt dalend*: $x < y \iff \log_a(x) > \log_a(y)$
- De functie $f(x) = \log_a(x)$ is enkel gedefinieerd voor $x > 0$.
- De functiewaarden $\log_a(x)$ kunnen alle reële waarden aannemen.
- De grafiek van $f(x) = \log_a(x)$ snijdt de x-as steeds in het punt $(1, 0)$ (want $\log_a 1 = 0$)
- De grafiek van $f(x) = \log_a(x)$ snijdt de y-as niet ($\log_a$ is niet gedefinieerd in 0)
- De grafiek van $f(x) = \log_a(x)$ snijdt de rechte $y = 1$ in het punt $(a, 1)$ (want $\log_a(a) = 1$)
- De functies $f(x) = \log_a(x)$ en $f(x) = a^x$ zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de eerste bissectrice.

Voorbeeld 1.2.3.



Definitie 1.2.2.

Als het grondtal a de waarde $e = 2.71\ldots$ heeft, dan schrijven we de functie $f(x) = \log_e(x)$ als

$$f(x) = \ln x$$

en geldt dus

$$\ln x = r \Leftrightarrow e^r = x$$

We herhalen de eigenschappen voor $f(x) = \ln x$

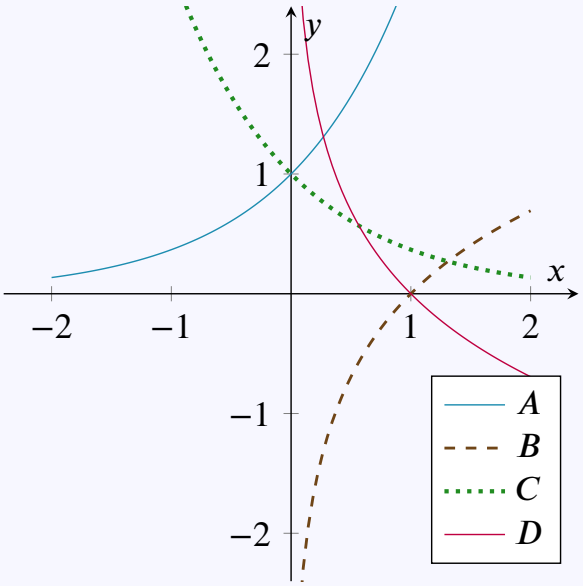
$$\ln e^x = x \qquad \text{en} \qquad e^{\ln x} = x.$$

Voorbeeld 1.2.4 (Grafiek van $f(x) = \ln x$)**.**

Welk van onderstaande grafieken is van de functie $f(x) = \ln(x)$?

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Logaritmische functies



Deze vraag kunnen we beantwoorden louter op basis van de vorm van de grafieken. Omdat $f(x) = \ln(x)$ een logaritmische functie is, is deze enkel gedefinieerd voor strikt positieve waarden van x. Omdat het grondtal $e > 1$, moet de grafiek stijgend zijn. Enkel grafiek B voldoet hieraan.

Opmerking 1.2.2 (Eigenschappen logaritmische functies)**.**

Je kan soms extra eigenschappen van logaritmische functies terugvinden op basis van de rekenregels voor logaritmen. Zo kan je de op het eerste zicht tamelijk ingewikkelde functie $f(x) = \log_4(2^x)$ herschrijven als

$$f(x) = \log_4(2^x) = x \cdot \log_4(2) = x \cdot \log_4(4^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}.$$

en vaststellen dat dit gewoon de lineaire functie $f(x) = \frac{1}{2}x$ is.

Voorbeeld 1.2.5 (Domein logaritmische functie)**.**

Bepaal het domein van de functie $f(x) = \log_3\left(\frac{3}{4-x}\right)$. Bepaal dus alle mogelijke reële waarden van x waarvoor het functievoorschrift geldig is.

- De noemer van de breuk binnen de logaritme mag niet nul mag zijn: $4 - x \neq 0$ en dus $x \neq 4$.
- Een logaritme kan enkel berekend worden voor een strikt positief getal. Dus moet $\frac{3}{4-x} > 0$. Omdat de teller van deze breuk strikt positief is, moet ook de noemer dat zijn: $4 - x > 0$ of $x < 4$.

Alleen als aan deze twee voorwaarden voldaan is, kan de functiewaarde bepaald worden.

Het domein van deze functie is dus het interval $]-\infty, 4[$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2.A Oefeningen exponentiële en logaritmische functies

Oefening 1.2.1. Vereenvoudig $e^{3\ln 2} = \ldots\ldots$

Oefening 1.2.2. Herschrijf volgende uitdrukkingen zonder exponentiële of logaritmische functies:

1. $4^{\log_2(x)} = \ldots\ldots$

2. $27^{\log_3(x)} = \ldots\ldots$

Oefening 1.2.3. Bepaal het domein van de functie $f(x) = \ln(\sqrt{2x} - 4)$: $\ldots\ldots$

Oefening 1.2.4. Los volgende vergelijkingen op:

1. $5^x = 7 \qquad x = \ldots\ldots$

2. $\ln(x^3) = -1 \qquad x = \ldots\ldots$

3. $e^{3x} = 2 \qquad x = \ldots\ldots$

Oefening 1.2.5. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $e^{2x} + e^x - 6 = 0 \qquad x = \ldots\ldots$

2. $e^x - 4e^{-x} = 3 \qquad x = \ldots\ldots$

Oefening 1.2.6. De vergelijking $4^x - 5 \cdot 2^x = 24$ werd opgelost naar x. Toch klopt de oplossing niet als we deze terug invullen in de vergelijking. Zoek de fout in de redenering en geef de juiste oplossing.

$$\begin{aligned} 2^{2x} - 5 \cdot 2^x &= 24 \\ \log_2 2^{2x} - \log_2(5 \cdot 2^x) &= \log_2 24 \\ 2x - \log_2 5 - \log_2 2^x &= \log_2 24 \\ 2x - \log_2 5 - x &= \log_2 24 \\ x &= \log_2 24 + \log_2 5 \\ x &= \log_2(24 \cdot 5) \\ x &= \log_2 120 \end{aligned}$$

De juiste oplossing: $x = \ldots\ldots$

Oefening 1.2.7. Schets de grafiek van de functie $\ln C(t)$ met $C(t) = 3e^{-2t}$.

Volgende oefening is enkel voor studenten die het vak chemie volgen. Je hoeft de betekenis van de gebruikte symbolen niet te kennen om de oefening te kunnen oplossen.

Oefening 1.2.8.

1. Gegeven $\Delta G^0 = -n \cdot F \cdot \Delta E^0$ en $\Delta G^0 = -R \cdot T \cdot \ln(K_{ev})$.

Toon aan dat $K_{ev} = 10^{\dfrac{n \cdot F \cdot \Delta E^0}{2,303 \cdot R \cdot T}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2.A Oefeningen exponentiële en logaritmische functies

2. Gegeven $0,89 = 1,5 - \frac{0,059}{2} \log\left(\frac{1}{\frac{10^{-14}}{K_a}10^{-14}}\right)$.

Toon aan dat $K_a = 4,7.10^{-8}$.

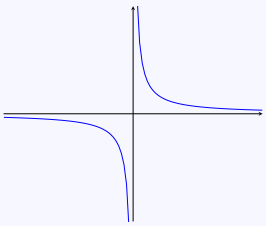
CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/18H.45)

2.1 Inleiding limieten

We beginnen met een belangrijk voorbeeld om het begrip limiet te begrijpen.

Voorbeeld 2.1.1 (Belangrijk voorbeeld)**.**

Beschouw de functie $f(x) = \frac{1}{x}$. Het domein van deze functie is $\mathbb{R}_0$ want deze functie is niet gedfinieerd in 0, en de grafiek is:



We onderzoeken waar de functiewaarde $f(x)$ naar toe gaat als x naar een bepaalde waarde c gaat in het domein of op de rand van het domein. Voor bijvoorbeeld $c = 2$ is dat een eenvoudige vraag: als x naar 2 gaat, dan gaat $f(x)$ naar $\frac{1}{2}$. We kunnen immers $x = 2$ gewoon invullen in het functievoorschrift. We schrijven *als x naar 2 gaat, dan gaat $f(x)$ naar $\frac{1}{2}$* korter als

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

.

Een interessantere vraag is waar de functiewaarde naartoe gaat wanneer we x naar $+\infty$ of $-\infty$ gaat, of wanneer we x naar $c = 0$ laten gaan, omdat we in deze gevallen $x = c$ niet meer kunnen invullen in het functievoorschrift: $+\infty$, $-\infty$ en 0 zijn de punten 'op de rand' van het domein.

Wanneer we x heel groot laten worden, wordt natuurlijk $\frac{1}{x}$ heel klein. Wanneer x *oneindig groot* is, $x = +\infty$, kunnen we x niet meer invullen in het functievoorschrift. We kunnen wel redelijkerwijs zeggen dat 'als x steeds groter wordt, $\frac{1}{x}$ steeds kleiner wordt en steeds dichter bij nul zal liggen'. We schrijven *als x steeds groter wordt, wordt $\frac{1}{x}$ steeds kleiner* korter als:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Wanneer we x naar $-\infty$ laten gaan, zal $\frac{1}{x}$ ook steeds dichter bij nul liggen:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ook $x = 0$ kunnen we niet invullen in het functievoorschrift, want delen door nul kan niet. Voor x heel klein (in de betekenis van heel dicht bij 0), lijkt het nochtans ook eenvoudig: als x naar 0 gaat, dat wordt $\frac{1}{x}$ immers oneindig groot. Maar, er is jammer genoeg een complicatie: als x negatief is en dicht bij 0 ligt, dan wordt x niet heel groot, maar net heel klein (in de betekenis van heel erg negatief). Dus: voor x dicht bij 0, kan $1/x$ ofwel heel groot zijn (als $x > 0$), ofwel net heel erg negatief (als $x < 0$). Dus: het hangt er van af 'langs welke kant' we x naar 0 laten gaan, of we in $+\infty$ dan wel in $-\infty$ uitkomen.

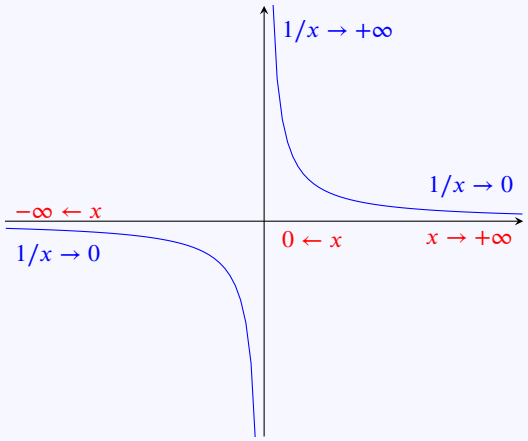
We spreken in dit geval niet van een limiet: $\lim_{x \to 0} f(x)$ bestaat niet. We hebben wel een *linkerlimiet* als we 0 langs links benaderen, dus met $x < 0$ en een *rechterlimiet* voor naderen langs rechts (dus

2.1 Inleiding limieten

$x > 0$). We noteren dit als:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty \quad \text{en} \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$$

De situatie wordt verduidelijkt op volgende tekening:



Zoals in vorig voorbeeld $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ kan je ook volgende limieten eenvoudig berekenen:

Oefening 2.1.1. Bereken volgende limieten.

1. $\lim_{x\to 0} e^x = \ldots\ldots$
2. $\lim_{x\to 1}(3x^2 - 4x + 2) = \ldots\ldots$

Als f een continue functie is, $c \in \mathbb{R}$ (dus niet $+\infty$ of $-\infty$) en c geen nulpunt van de noemer is, dan geldt:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

We bestuderen verder dan ook enkel limieten

- in $c = +\infty$ of $c = -\infty$
- in nulpunten van de noemer

We gebruiken volgende notatie:

Zij f een reële functie, en L en c telkens ofwel een reëel getal, ofwel één van de symbolen $+\infty$ of $-\infty$. Dan zeggen en schrijven we dat

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Inleiding limieten

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ $\iff$ de limiet van f als x naar c gaat is gelijk aan L

$\iff$ als x naar $c$gaat, dan gaat de functiewaarde $f(x)$ naar L

$\lim_{x\to c-} f(x) = L$ $\iff$ de linkerlimiet van f als x naar c gaat is gelijk aan L

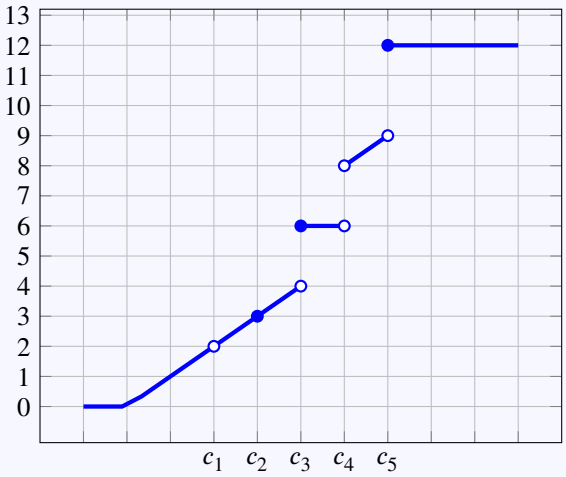
$\iff$ als x naar c gaat langs links (dus $x < c$), dan gaat de functiewaarde $f(x)$ naar L

$\lim_{x\to c+} f(x) = L$ $\iff$ de rechterlimiet van f als x naar c gaat is gelijk aan L

$\iff$ als x naar c gaat langs rechts (dus $x > c$), dan gaat de functiewaarde $f(x)$ naar L

Voorbeeld 2.1.2 (Linker- en rechterlimiet)**.**

We beschouwen de functie f met onderstaande grafiek:



We hebben volgende limieten in de punten c_i:

c_1	$\lim_{x\to c_1-} f(x) = 2$	$\lim_{x\to c_1+} f(x) = 2$	$\lim_{x\to c_1} f(x) = 2$
c_2	$\lim_{x\to c_2-} f(x) = 3$	$\lim_{x\to c_2+} f(x) = 3$	$\lim_{x\to c_2} f(x) = 3$
c_3	$\lim_{x\to c_3-} f(x) = 4$	$\lim_{x\to c_3+} f(x) = 6$	$\lim_{x\to c_3} f(x)$ bestaat niet
c_4	$\lim_{x\to c_4-} f(x) = 6$	$\lim_{x\to c_4+} f(x) = 8$	$\lim_{x\to c_4} f(x)$ bestaat niet
c_5	$\lim_{x\to c_5-} f(x) = 9$	$\lim_{x\to c_5+} f(x) = 12$	$\lim_{x\to c_5} f(x)$ bestaat niet

Opmerking 2.1.1.

- Als we de uitdrukking $\lim_{x\to c} f(x) = L$ samen met de grafiek van f bekijken, dan bevindt c zich op de x-as, en bevindt L (en dus de limiet zelf) zich op de y-as.
- De limiet bestaat als en slechts als zowel de linker- als de rechterlimiet bestaan en beide aan elkaar gelijk zijn. Dus:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \lim_{x\to c-} f(x) = L \text{ en } \lim_{x\to c+} f(x) = L$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Inleiding limieten

- We beperken ons tot limieten in punten of randpunten van het domein van f. Dus, we kunnen spreken van de limiet van $f(x) = \sqrt{x}$ in de punten 1 en π en 81 (punten van het domein), of in 0 of $+\infty$ (punten 'op de rand van het domein'), maar de limiet in de punten -1 en -314 heeft *geen* betekenis. Zo zijn bijvoorbeeld ook de limieten $\lim_{x\to-\infty} \ln x$ en $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x}$ duidelijk niet te bepalen.

Voorbeeld 2.1.3 (Linker- en rechterlimiet)**.**

$\lim_{x\to 7}(-2+\sqrt{x-7})$ bestaat niet omdat x alleen langs rechts ($x > 7$) naar 7 kan gaan. De **rechterlimiet** bestaat wel:

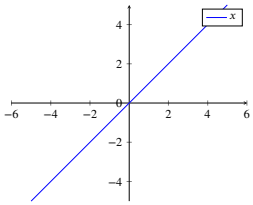
$$\lim_{x\to 7+}(-2+\sqrt{x-7}) = -2$$

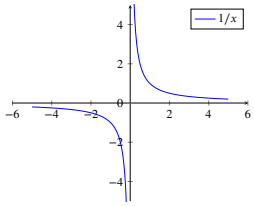
Limieten kunnen op volgende wijze worden bepaald:

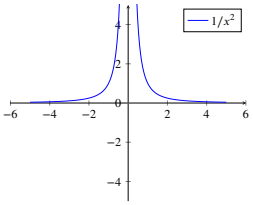
(a) enkele basislimieten lezen we af op een *grafiek*

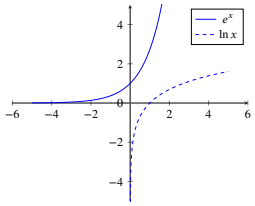
(b) voor ingewikkeldere functies gebruiken we betrouwbare *rekenregels*

Oefening 2.1.2. Bepaal de limieten op basis van de grafieken:









1. $\lim_{x\to+\infty} x =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
2. $\lim_{x\to-\infty} x =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
4. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
5. $\lim_{x\to0+} \frac{1}{x} =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
6. $\lim_{x\to0-} \frac{1}{x} =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
7. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
8. $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
9. $\lim_{x\to+\infty} e^x =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
10. $\lim_{x\to-\infty} e^x =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Inleiding limieten

11. $\lim_{x\to+\infty} \ln x =$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

12. $\lim_{x\to-\infty} \ln x =$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

13. $\lim_{x\to0+} \ln x =$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

14. $\lim_{x\to0-} \ln x =$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

15. $\lim_{x\to0} \ln x =$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

Opmerking 2.1.2.

Let op: je kan dikwijls ook een limiet bepalen door enkele waarden te berekenen 'in de buurt', zoals bijvoorbeeld voor $\frac{\sin(0,01)}{0,01} = 0,999983\ldots$ waaruit zou kunnen blijken dat dus allicht $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Maar soms zijn berekeningen erg misleidend of volledig foutief.

Oefening 2.1.3. Bepaal deze limieten via een redenering op basis van de grafieken van de functies $e^x, \ln x$ en $\frac{1}{x}$. Je hoeft de grafieken van $e^{1/x}$ en $\ln(1+\frac{1}{x})$ hiervoor niet te kennen.

1. $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} =$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

2. $\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} =$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

3. $\lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x}} =$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

4. $\lim_{x\to0+} e^{\frac{1}{x}} =$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

5. $\lim_{x\to0-} e^{\frac{1}{x}} =$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

6. $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{x}) =$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

7. $\lim_{x\to-\infty} \ln(1+\frac{1}{x}) =$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

8. $\lim_{x\to0+} \ln(1+\frac{1}{x}) =$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

9. $\lim_{x\to0-} \ln(1+\frac{1}{x}) =$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Rekenregels limieten

Om efficiënt te rekenen met limieten is het belangrijk om over handige rekenregels te beschikken.

De rekenregels gaan als volgt:

- de limiet van een som is de som van de limieten,
- de limiet van een verschil is het verschil van de limieten,
- de limiet van een product is het product van de limieten,
- de limiet van een quotiënt is het quotiënt van de limieten,

tenzij je daardoor een **onbepaalde vorm** krijgt.

We bekijken eerst in een voorbeeld wat we bedoelen met een onbepaalde vorm:

Voorbeeld 2.2.1 (Is de limiet van de som gelijk aan de som van de limieten?)**.**

Beschouw de functies $f : x \mapsto x$ en $g : x \mapsto a - x$, met $a \in \mathbb{R}$. Dan is $f(x) + g(x) = x + (a - x) = a$ en kennen we volgende limieten op basis van de grafieken van deze eenvoudige functies:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (a - x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \big(g(x) + f(x)\big) = \lim_{x\to+\infty} a = a$$

Stel dat volgende regel overal zou gelden

$$\lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to c} \big(f(x) + g(x)\big)$$

dan zou dit in dit geval willen zeggen dat

$$(+\infty) + (-\infty) \stackrel{?}{=} a$$

Maar a is willekeurig (of *onbepaald*): we kunnen voor a even goed 0 kiezen als 2 of $2\pi/3$ .... We noemen daarom $(+\infty) + (-\infty)$ een onbepaaldheid of een onbepaalde vorm. De regel dat de limiet van een som de som is van de limieten, $\lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} \big(f(x) + g(x)\big)$, geldt enkel wanneer $\lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$ geen onbepaaldheid oplevert.

Om de rekenregels van limieten te kunnen toepassen bekijken we hoe we kunnen rekenen met $+\infty$ en $-\infty$. Je kan zonder problemen rekenen met $+\infty$ en $-\infty$ op voorwaarde dat je zogenaamde *onbepaalde vormen* vermijdt.

Afspraak: $\pm\infty$ betekent $+\infty$ of $-\infty$, in die volgorde, zodat we verder ook kunnen schrijven dat $-(\pm\infty) = \mp\infty$.

Eigenschap 2.2.1 (Rekenen met de symbolen $+\infty$ en $-\infty$)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Rekenregels limieten

De symbolen $+\infty$ en $-\infty$ voldoen aan volgende rekenregels (waarbij $a \in \mathbb{R}$):

$$-(+\infty) = -\infty$$
$$-(-\infty) = +\infty$$
$$-(\pm\infty) = \mp\infty$$
$$-(\mp\infty) = \pm\infty \qquad (+\infty \text{ en } -\infty \text{ zijn elkaars tegengestelde})$$

SOM en VERSCHIL

$$a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$$
$$-a + (+\infty) = (+\infty) - a = +\infty$$
$$\boxed{(+\infty) + (+\infty) = +\infty} \qquad ((+\infty) + X = +\infty \text{ behalve als } X = -\infty)$$

$$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$$
$$-a + (-\infty) = (-\infty) - a = -\infty$$
$$\boxed{(-\infty) + (-\infty) = -\infty} \qquad ((-\infty) + X = -\infty \text{ behalve als } X = +\infty)$$

PRODUCT

Als $a > 0$
$$a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty$$
$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty \qquad (X \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \text{ als } X > 0)$$
Als $a < 0$
$$a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty$$
$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty \qquad (X \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \text{ als } X < 0)$$
$$\boxed{(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty}$$
$$\boxed{(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty}$$

QUOTIENT

$$\boxed{\frac{a}{+\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0} \qquad (\frac{X}{\pm\infty} = 0 \text{ als } X \neq \pm\infty)$$

Het symbool X in de uitleg hierboven staat voor een reëel getal $x \in \mathbb{R}$ of $\pm\infty$.

Voorbeeld 2.2.2. Voorbeelden van het gebruik van de rekenregels bij het berekenen van een limiet:

1. $\lim_{x\to 0+} (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} + \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2} = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$
2. $\lim_{x\to+\infty} (-4x) = (-4)(+\infty) = -\infty$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{x} = \frac{-4}{+\infty} = 0$
4. $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Rekenregels limieten

Al deze regels zijn erg natuurlijk, en stellen op zich geen probleem. Maar er ontbreken enkele combinaties, namelijk de zogenaamde onbepaalde vormen:

Eigenschap 2.2.2 (**Onbepaalde vormen** met $\pm\infty$)**.**

Volgende uitdrukkingen zijn **onbepaalde vormen** of **onbepaaldheden**. Dit wil zeggen dat ze *geen betekenis* hebben.

$$\infty - \infty \qquad (+\infty) + (-\infty) \qquad (-\infty) + (+\infty) \qquad (+\infty) - (+\infty)$$
$$0 \cdot \infty \qquad 0 \cdot (\pm\infty) \qquad (\pm\infty) \cdot 0$$
$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{\pm\infty}{\mp\infty}$$

Opmerking 2.2.1.

Ook 0^0, ∞^0 en 1^∞ zijn onbepaald, maar deze behandelen we niet in de voorkennislessen.

Voorbeeld 2.2.3.

De rekenregels kunnen dus niet gebruikt worden wanneer ze een onbepaaldheid geven. Zo is

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} + \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2} = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

maar

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \neq \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} - \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2}$$

want dit geeft de onbepaaldheid $(+\infty) - (+\infty)$.

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Limieten in $\pm\infty$

Voorbeeld 2.3.1. Bereken $\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2)$.

Uitwerking: Als we proberen de regel 'limiet van de som is som van de limieten' te gebruiken, krijgen we

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2) &= \lim_{x\to+\infty}3x^2-\lim_{x\to+\infty}4x+\lim_{x\to+\infty}2\\ &= 3\cdot(+\infty)-4\cdot(+\infty)+2\\ &= \infty-\infty, \text{ en dus ONBEPAALD}\end{aligned}$$

Conclusie: we mogen de rekenregel *niet* toepassen. We hebben een fout gemaakt. De eerste gelijkheid geldt niet:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2)\neq\lim_{x\to+\infty}3x^2-\lim_{x\to+\infty}4x+\lim_{x\to+\infty}2$$

Er is echter een manier om de onbepaaldheid te omzeilen, en de limiet *toch* te berekenen met behulp van de rekenregels. We kunnen namelijk *de hoogstegraadsterm buiten haakjes te brengen*, en daardoor de limiet van een som omzetten in de limiet van een product. Verder gebruiken we dan de rekenregel voor limieten van een product. We beginnen de berekening met:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2)=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})$$

We weten dat

$$\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})=\lim_{x\to+\infty}(3)-\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=3+0+0=3$$

dus als we de limiet van dit product van functies schrijven als het product van de limieten krijgen we geen onbepaalde vorm:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2) &= \lim_{x\to+\infty}x^2\cdot(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})\\ &= \lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\lim_{x\to+\infty}(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})\\ &= (+\infty)\cdot 3=+\infty, \text{ en dus GEEN onbepaaldheid}\end{aligned}$$

Als de rekenregels voor limieten een onbepaaldheid opleveren, probeer je de onbepaaldheid te *omzeilen*. Een mogelijke oplossing bij de limiet in $c=\pm\infty$ van een som is om de term die het snelst naar oneindig gaat buiten haakjes te brengen en zo een som om te zetten in een product. Bij de limiet van een veelterm is dit de hoogstegraadsterm. We zetten enkel de macht van x buiten haakjes, de coëfficiënt laten we binnen haakjes staan. Dit idee beperkt zich echter niet tot veeltermen. We geven nog enkele voorbeelden:

Voorbeeld 2.3.2. Bereken $\lim_{x\to+\infty}(2e^{3x}-5e^{2x})$

Uitwerking: $\lim_{x\to+\infty}(2e^{3x}-5e^{2x})=\lim_{x\to+\infty}e^{3x}(2-\frac{5}{e^x})=(+\infty).2=+\infty$

Voorbeeld 2.3.3. Bereken $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-6x+1}{2x^2+11x-8}$

Uitwerking: Dit is de limiet van een quotiënt, maar het quotiënt van de limieten geeft $\frac{+\infty}{+\infty}$, en dus kunnen we de gewone rekenregel niet toepassen. We zetten nu zowel in teller als in noemer de hoogstegraadsterm

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Limieten in $\pm\infty$

buiten haken:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-6x+1}{2x^2+11x-8}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(3-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(2+\frac{11}{x}-\frac{8}{x^2})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{11}{x}-\frac{8}{x^2}}=\frac{3}{2}$$

Opmerking 2.3.1.

- Door het toepassen van de rekenregels zie je dat de limiet voor $x\to\pm\infty$ gelijk is aan de limiet van de hoogstegraadsterm voor een veeltermfunctie, en gelijk is aan het quotiënt van de hoogstegraadstermen in teller en noemer voor een rationale functie. In de oefeningen wordt echter verwacht dat je niet gewoon het eindresultaat opschrijft, maar dat je telkens met de rekenregels uitwerkt hoe je hier aan komt.
- Het heeft geen zin om de termen die het snelst naar oneindig gaan buiten haken te brengen bij een limiet in een nulpunt van de noemer zoals bijvoorbeeld:

$$\lim_{x\to1+}\frac{x^2+x-1}{x-1}$$

Ook bij irrationale functies zetten we de term die het snelst naar oneindig gaat buiten haken:

Voorbeeld 2.3.4. Bereken $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x}+3x\right)$

Uitwerking: Dit is de limiet van een som, maar som van de limieten geeft $\infty-\infty$, en dus kunnen we deze rekenregel niet toepassen. We zetten stap voor stap de hoogste macht van x buiten haken:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x}+3x\right)&=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{7}{x}\right)}+3x\right)\\
&=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3x\right)\\
&=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3x\right)\\
&=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3\right)\\
&=\left(\lim_{x\to-\infty}x\right)\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3\right)\right)\\
&=(-\infty)\cdot\left(-\sqrt{4}+3\right)\\
&=-\infty
\end{aligned}$$

Merk op: we hebben $|x|$ vervangen door $-x$ omdat we de limiet in $-\infty$ moeten berekenen, en voor negatieve x is inderdaad $|x|=-x$.

Opmerking 2.3.2.

Let op bij het berekenen van limieten met vierkantswortels:

$\sqrt{x^2}=|x|$ dus

- $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to+\infty}|x|=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Limieten in $\pm\infty$

- $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to-\infty}|x|=\lim_{x\to-\infty}-x=-(-\infty)=+\infty$

Deze techniek werkt echter niet altijd. We nemen een voorbeeld dat erg lijkt op het vorige voorbeeld, maar toch op een heel andere manier uitgerekend moet worden:

Voorbeeld 2.3.5. Bereken $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)&=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{7}{x}\right)}+2x\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2x\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2x\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2\right)\\&=\left(\lim_{x\to-\infty}x\right)\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2\right)\right)\\&=(-\infty)\cdot\left(-\sqrt{4}+2\right)\\&=(-\infty)\cdot 0\end{aligned}$$

Met deze berekeningen krijgen we een onbepaaldheid, dus moeten we een andere techniek gebruiken om deze limiet te kunnen uitrekenen. We vermenigvuldigen teller en noemer met de toegevoegde tweeterm. De toegevoegde tweeterm nemen wil zeggen dat we het plusteken tussen de twee termen vervangen door een minteken, of omgekeerd. Dit wordt ook de *worteltruc* genoemd.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)&=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+7x}+2x)(\sqrt{4x^2+7x}-2x)}{\sqrt{4x^2+7x}-2x}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+7x-4x^2}{\sqrt{4x^2+7x}-2x}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{7x}{|x|\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2x}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{7x}{-x\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2x}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{7}{-\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2}\\&=\frac{7}{-\sqrt{4}-2}=-\frac{7}{4}\end{aligned}$$

Bij de oefeningen op limieten is het niet enkel van belang de uitkomst te vinden, maar ook om correct te kunnen uitleggen hoe je deze uitkomst vindt.

Oefening 2.3.1. Bereken volgende limieten in $\pm\infty$ met behulp van de rekenregels:

1. $\lim_{x\to+\infty}(-4x^5+7x^4-11)=$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Limieten in $\pm\infty$

2. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{-x^2+3x-2}{3x-7} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

3. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-3}{x^3-x+2} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

4. $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{2x^2+3}-x) =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

5. $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{2x^2+3}-x) =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

6. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}+2x}{3x-1} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

7. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}+2x}{3x-1} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

8. $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{16x^2+9x}+4x) =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Limieten in nulpunten van de noemer

1. Limieten van de vorm $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ met $f(c)=0$

We hebben in het inleidend voorbeeld gezien dat $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$ en dat $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ niet bestaat.
Analoog kunnen we volgende situaties tegenkomen bij het berekenen van $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ met $f(c)=0$, $c\in\mathbb{R}$

- Als $f(x)>0$ in een omgeving van c dan is $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=+\infty$.
- Als $f(x)<0$ in een omgeving van c dan is $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.
- Als $f(x)>0$ voor $x>c$ en $f(x)<0$ voor $x<c$ dan is $\lim_{x\to c+}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ en $\lim_{x\to c-}\frac{1}{f(x)}=-\infty$
- Als $f(x)<0$ voor $x>c$ en $f(x)>0$ voor $x<c$ dan is $\lim_{x\to c+}\frac{1}{f(x)}=-\infty$ en $\lim_{x\to c-}\frac{1}{f(x)}=+\infty$

Om deze limieten te berekenen (om te weten of het $+\infty$ of $-\infty$ is) moeten we dus het tekenverloop van $f(x)$ kennen in de buurt van c.

Voorbeeld 2.4.1.

$$\lim_{x\to 1+}\frac{1}{x-1}=+\infty$$

want de noemer $x-1$ is >0 voor $x>1$.

Opmerking 2.4.1. Merk ook op dat $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ met $f(c)=0$, steeds $+\infty$ of $-\infty$ is, tenzij linker- en rechterlimiet verschillen, dan bestaat $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ niet.

2. Limieten van de vorm $\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}$ met $f(c)=0$

(a) **c is geen nulpunt van de teller**

In dit geval is dus $g(c)\neq 0$.
Dan kunnen we de limiet als volgt herschrijven:

$$\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to c}g(x)\cdot\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=g(c)\cdot\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}.$$

Dit is geen onbepaalde vorm vermits $g(c)\neq 0$. Om de limiet verder uit te rekenen moeten we het tekenverloop van $f(x)$ kennen in de buurt van c. Het tekenverloop van de teller moet je niet zoeken, we moeten enkel de waarde kennen van $g(c)$.

Voorbeeld 2.4.2.

$$\lim_{x\to 1+}\frac{x^2+x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+}(x^2+x-1)\cdot\lim_{x\to 1+}\frac{1}{x-1}=(1^2+1-1)\cdot(+\infty)=+\infty$$

(b) **c is een nulpunt van teller en noemer**

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Limieten in nulpunten van de noemer

In dit geval krijgen we de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$.

Bij **rationale functies** kunnen we in dit geval teller en noemer ontbinden in factoren en de factor $x-c$ wegdelen in teller en noemer.

Voorbeeld 2.4.3.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

Bij **irrationale functies** kunnen we teller en noemer vermenigvuldigen met de toegevoegde uitdrukking van teller of noemer (de worteltruc).

Voorbeeld 2.4.4.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}$$

Opmerking 2.4.2. Limieten die de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$ geven kunnen ook berekend worden met de regels van de l'Hôpital. De regels van de l'Hôpital behandelen we hier niet, deze staan in Hoofdstuk 5 van de cursus Wiskunde I. Vaak zijn limieten die de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$ geven gemakkelijker te berekenen met de regels van de l'Hôpital, maar niet altijd. Omdat de regels van de l'Hôpital hier niet behandeld worden staan er slecht enkele oefeningen van het type $\frac{0}{0}$ in deze voorkennisles.

Eigenschap 2.4.1. Overzicht limieten in nulpunten van de noemer

- Geval $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ met $f(c)=0$: $+\infty$ of $-\infty$, tekenverloop van noemer in de buurt van c.
- Geval: $\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}$ met $f(c)=0$:
  - c is geen nulpunt van de teller: $\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to c}g(x)\cdot\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=g(c)\cdot\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$.
  - c is een nulpunt van teller en noemer: $\frac{0}{0}$

    l'Hôpital OF
    - Bij rationale functies: teller en noemer ontbinden in factoren en de factor $x-c$ wegdelen in teller en noemer.
    - Bij irrationale functies: teller en noemer vermenigvuldigen met de toegevoegde uitdrukking van teller of noemer.

Oefening 2.4.1. Bereken de volgende limieten in een nulpunt van de noemer dat geen nulpunten is van de teller:

1. $\lim_{x\to 2-}\frac{1}{x-2}=$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

2. $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Limieten in nulpunten van de noemer

3. $\lim_{x\to 2+} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} =$

4. $\lim_{x\to 3-} \dfrac{4x-20}{2x-6} =$

5. $\lim_{x\to 0+} \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) =$

6. $\lim_{x\to 1+} \dfrac{x-3}{x^2-1} =$

7. $\lim_{x\to 1-} \dfrac{x-3}{x^2-1} =$

8. $\lim_{x\to \pi-} \dfrac{x}{\sin x} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

Oefening 2.4.2. Bereken de volgende limieten in een nulpunt van teller en noemer:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{x^3} =$

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2} =$

3. $\lim_{x\to 3-} \dfrac{x-3}{|x-3|} = \ldots\ldots$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

CC BY-NC-SA 4.0

2.4.A Extra oefeningen limieten

Nog enkele extra oefeningen:

Oefening 2.4.3. Bereken volgende limieten met behulp van de rekenregels:

1. $\lim_{x\to-\infty}\left(12x^{503}+7x^{404}+25x^{200}\right)=$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

2. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+42x-12}{2x^2-17}=$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

3. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{6x^2-7x}+20x)=$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

4. $\lim_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

5. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2-7x}+3x)=$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

Volgende oefening is iets moeilijker en daardoor niet echt voorkennis. Je moet dezelfde technieken gebruiken als bij de vorige oefeningen maar in elke opgave is een getal vervangen door een parameter. Je neemt deze parameter gewoon mee in je berekening en het resultaat zal ook afhangen van deze parameter.

Oefening 2.4.4. Bereken volgende limieten met parameters $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+ax}{\sqrt{x^2+2}}=\ldots\ldots$

2. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+ax}{\sqrt{x^2+2}}=\ldots\ldots$

3. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{ax+b}{7x-\sqrt{x^2+10}}=\ldots\ldots$

4. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+ax)=\ldots\ldots$

5. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+7x}+ax)=\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0