KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Voorkennisles 2

WEEK 2

(Versie 2026/09/22H.49)

Inhoudsopgave

1 Veeltermen deel 2 1.1

1.1 Veeltermen . . . 1.1
1.2 Deling van veeltermen . . . 1.4
1.3 Deling door $x - a$ . . . 1.7
1.4 Veeltermen ontbinden in factoren . . . 1.10

2 Functies 2.1

2.1 Functies . . . 2.1
2.2 Inverse functies . . . 2.4

3 Goniometrie 3.1

3.1 Radialen . . . 3.1
3.2 Goniometrische cirkel en goniometrische getallen . . . 3.3
3.2.1 Rechthoekige driehoeken . . . 3.5
3.2.2 Standaardhoeken . . . 3.6
3.3 Verwante hoeken . . . 3.8
3.4 Goniometrische functies . . . 3.11
3.5 Cyclometrische functies . . . 3.15

4 Poolcoordinaten 4.1

4.1 Poolcoördinaten . . . 4.1

5 De logaritme 5.1

5.1 De logaritme . . . 5.1
5.1.A Basisoefeningen logaritmen . . . 5.4
5.2 Rekenregels voor logaritmen . . . 5.5
5.2.A Oefeningen rekenregels logaritmen . . . 5.9

1.1 Veeltermen

Veronderstelde voorkennis: eenvoudige stelsels oplossen

Naar analogie met eerste- en tweedegraadsveeltermen definiëren we nu n-de graadsveeltermen.

Definitie 1.1.1 (Veelterm)**.** Zij $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ met $a_n \neq 0$.

- Een n-**de graadsveelterm in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

  De $a_i x^i$ zijn **termen** van de veelterm, de a_i zijn **coëfficiënten**, en n is de **graad**.
  Men noteert de graad van $p(x)$ met $\text{gr}(p(x)) \stackrel{\text{def}}{=} n$.

- Aan dergelijke veelterm $p(x)$ is volgende **veeltermfunctie** p geassocieerd:

$$p : x \mapsto p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- Een n-**de graadsvergelijking in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

- De **getalwaarde** van $p(x)$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ is het getal $p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0$.

Voorbeeld 1.1.1.

- $2x + 3$ is een eerstegraadsveelterm. De getalwaarde van $2x + 3$ in 3 is 9.
- $5x^2 + 7x + 1$ is een tweedegraadsveelterm.
- $x^{2026} - 1$ is een veelterm van graad 2026.
- 7 is een veelterm van graad 0.
- $ax + b$ met $a \neq 0$ kan gezien worden als een eerstegraadsveelterm, met 'parameters' of 'constanten' a en b in plaats van concrete getallen.
- $\sqrt{\pi} x^5 - e^y + \alpha^2$ kan gezien worden als een veelterm in x van de vijfde graad, met parameters y en α.
- $x^2 - e^x$ is *geen* veelterm in x wegens de exponentiële functie.
- Je kan ook veeltermen in andere letters tegenkomen: $5t^2 + 3t$ en $t + \cos\alpha$ zijn veeltermen in t, en $e^{2x} u^2 - 1$ is een veelterm in u (maar niet in x).

Opmerking 1.1.1.

- Volgens deze definitie is een veelterm dus een formele *uitdrukking* (of een *formule*: een reeks letters, cijfers en enkele symbolen zoals + en −). We *rekenen* met dergelijke uitdrukkingen volgens voor de hand liggende rekenregels zoals:

$$2x + 3x = 5x$$

$$2 \cdot (5x) = 10x$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Veeltermen

$$(2x) \cdot (5x) = 10x^2$$

- Veeltermen zijn de functies die met enkel de elementaire bewerkingen optellen en vermenigvuldigen kunnen worden berekend. Je zal later zien dat veel functies goed kunnen worden *benaderd* door veeltermen.
- Een veelterm met één term noemen we een *term*, *éénterm* of *monoom*. Een veelterm met twee termen is een *tweeterm* of *binoom*. En één met *veel termen* is dus een *veel*term of *polynoom*.
- De getalwaarde van een veelterm in 0 is precies de constante term a_0 van de veelterm:

$$p(0) = a_n 0^n + a_{n-1} 0^{n-1} + \ldots + a_2 0^2 + a_1 0 + a_0 = a_0$$

- Met het sommatieteken kunnen we een veelterm ook schrijven als

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Oefening 1.1.1. Voor een veelterm $p(x)$ van graad 2 geldt: de hoogstegraadscoëfficiënt is 2, $p(1) = 3$ en $p(-1) = -3$. Wat is de constante term van $p(x)$? ... ...

Definitie 1.1.2 (Nulpunten van veeltermen)**.**

Een **nulpunt** (ook **nulwaarde** of **wortel**) van een veelterm $p(x)$ is een reëel getal a waarvoor $p(a) = 0$.

Oefening 1.1.2. Voor een veelterm $p(x)$ van graad 2 geldt: de constante term is 2, $x = 1$ is een nulpunt en $p(-1) = 6$. Wat is $p(2)$?

$p(2) = \ldots \ldots$

Het zoeken van nulpunten is precies hetzelfde als het oplossen van vergelijkingen:

Eigenschap 1.1.1 (Verband tussen nulpunten van veeltermen en oplossingen van vergelijkingen)**.**

De *nulpunten* van een veelterm $p(x)$ zijn de *oplossingen* van de *vergelijking* $p(x) = 0$.

Voorbeeld 1.1.2 (Nulpunten van eenvoudige veeltermen)**.**

1. Het getal 3 is een nulpunt van $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ omdat $p(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$.
2. Het getal 3 is een oplossing van de vergelijking $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.
3. De veelterm $x - 5$ heeft 5 als nulpunt(en).
4. De veelterm $x^2 - 4$ heeft -2 en 2 als nulpunt(en).
5. De veelterm $x^2 + 4$ heeft geen enkel reëel getal als nulpunt(en).

Er zijn relatief eenvoudige procedures om nulpunten te vinden van eerstegraadsveeltermen en tweedegraadsveeltermen. Er bestaan ook (ingewikkeldere) algoritmes voor het vinden van de nulpunten van veeltermen van de derde en vierde graad. Evariste Galois heeft in het begin van de negentiende eeuw aangetoond dat er voor vijfdegraadsveeltermen *geen* algemene procedure *kan* bestaan die alleen gebruik maakt van zogenaamde algebraïsche bewerkingen: optellen/aftrekken, vermenigvuldigen/delen en machtsverheffen/worteltrekken.

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Veeltermen

Een veelterm $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ is per definitie een *som* van termen (vandaar de naam *veel-term*). Het is dikwijls handig om dergelijke som van termen ook te kunnen schrijven als een *product* van factoren. De uitdrukking 'ontbinden in factoren' betekent precies het schrijven van dergelijke som als een product:

Definitie 1.1.3 (Ontbinden in factoren)**.**

Een veelterm $d(x)$ is een **factor** van een veelterm $p(x)$ als we $p(x)$ kunnen schrijven als een product van $d(x)$ met een andere veelterm.

Dus: $d(x)$ is een *factor* van $p(x)$ als $p(x) = d(x) \cdot q(x)$ voor een zekere veelterm $q(x)$.

Een factor van de nulde graad (dus een getal) is een **triviale factor**. We beschouwen die niet als 'echte' factor.

Een veelterm $p(x)$ **ontbinden in factoren** betekent hem schrijven als een product van zo veel mogelijk niet-triviale factoren.

Voorbeeld 1.1.3 (Ontbinden in factoren)**.**

1. $x + 1$ is een factor van $x^2 - 1$ want $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.

2. De veelterm $x^2 - 1$ kan ontbonden worden in de factoren $x+1$ en $x-1$ want $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

Tot slot definiëren we nog wanneer twee veeltermen van dezelfde graad gelijk zijn aan elkaar. Veeltermen die niet dezelfde graad hebben kunnen niet gelijk zijn aan elkaar.

Definitie 1.1.4 (Gelijkheid van veeltermen)**.**

Twee veeltermen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

en

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

van dezelfde graad n zijn **gelijk** als de overeenkomstige coëfficiënten gelijk zijn:

$$a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_1 = b_1, a_0 = b_0.$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Deling van veeltermen

We bekijken eerst terug de deling met rest in de verzameling van de natuurlijke getallen.

Voorbeeld 1.2.1 (Delen-met-rest voor natuurlijke getallen.).

Zeggen dat de deling van 13 door 4 gelijk is aan 3 met rest 1, betekent dat

$$13 = 3 \cdot 4 + 1$$

omdat 4 hoogstens 3 keer in 13 kan, en er blijft dan nog 1 over.

Op dezelfde manier betekent 20 delen door 3 dat

$$20 = 6 \cdot 3 + 2$$

of met symbolen: als we *deeltal* D delen door *deler* d, krijgen we *quotiënt* q en *rest* r als volgende formule geldt:

$$D = q \cdot d + r \text{ met } r < d.$$

Daarbij is het erg belangrijk dat $r < d$: als dat niet het geval is, heb je nog niet ver genoeg gedeeld, want je kan dan de rest r nog verder delen door d.

Men kan voor veeltermen een analoge eigenschap bewijzen:

Eigenschap 1.2.1 (Euclidische deling).

Als $p(x)$ en $d(x)$ twee willekeurige veeltermen zijn,

dan bestaan er unieke veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ zodat volgende gelijkheid geldt

$$p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x) \quad \text{met } \mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$$

Definitie 1.2.1 (Euclidische deling van veeltermen).

Als $p(x)$ en $d(x)$ twee willekeurige veeltermen zijn, en $q(x)$ en $r(x)$ zijn de bijhorende unieke veeltermen zodat $p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$, waarbij $\mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$,

dan noemen we $p(x)$ het **deeltal**, $d(x)$ de **deler**, $q(x)$ het **quotiënt** en $r(x)$ de **rest**.

Als $r(x) = 0$ zegt men dat de veelterm $p(x)$ **deelbaar is door** de veelterm $d(x)$.

Opmerking 1.2.1.

Let op de strikte ongelijkheid $\mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$. Dus $\mathrm{gr}(r(x))$ mag niet gelijk zijn aan $\mathrm{gr}(d(x))$.

Er bestaat een algoritme dat voor een gegeven veelterm $p(x)$ en een gegeven deler $d(x)$ het quotiënt en de rest berekent. Het algoritme levert dus twee veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ op zodat

$$p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x) \quad \text{met } \mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$$

Voorbeeld 1.2.2 (Euclidische deling stap per stap uitgelegd).

Bereken het quotiënt en de rest van de deling van de veelterm $2x^3 + x^2 - 5x + 2$ door de veelterm $x - 3$.

Volgens de definitie hierboven moeten we dus op zoek naar de veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ die horen bij $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ (het deeltal) en $d(x) = x - 3$ (de deler).

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Deling van veeltermen

We gebruiken een aangepaste vorm van de staartdeling van natuurlijke getallen. Bestudeer het schema samen met de uitleg.

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 2x^3 & + & x^2 & - & 5x & + & 2 & x-3 \\ \cline{9-9}
(b)\ - & 2x^3 & - & 6x^2 & & & & & 2x^2+7x+16 \\ \cline{2-4}
 & & & 7x^2 & - & 5x & + & 2 & (a)\quad (c)\quad (e) \\
 & & (d)\ - & 7x^2 & - & 21x & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & & 16x & + & 2 & \\
 & & & & (f)\ - & 16x & - & 48 & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 50 & \\
 & & & & & & & (g) &
\end{array}
$$

(a) Deel de hoogstegraadsterm van $p(x)$ door de hoogstegraadsterm van $d(x)$. Dus deel $2x^3$ door x. Schrijf dit 'voorlopig quotiënt' $2x^3/x = 2x^2$ in de rechterkolom.

(b) Vermenigvuldig de deler $x-3$ met het 'voorlopig quotiënt' $2x^2$ en schrijf dit product $(x-3)\cdot 2x^2 = 2x^3 - 6x^2$ onder het deeltal. Trek dit product $2x^3 - 6x^2$ af van het deeltal $2x^3 + x^2 - 5x + 2$. Per constructie vallen de hoogste-graadstermen tegen elkaar weg. De 'voorlopige rest' is $2x^3 + x^2 - 5x + 2 - (2x^3 - 6x^2) = 7x^2 - 5x + 2$. Die 'voorlopige rest' is nog te groot, want de graad 2 van de 'voorlopige rest' is niet strikt kleiner dan de graad 1 van de deler. We gaan dus verder met de procedure.

(c) Deel opnieuw de hoogstegraadsterm van de 'voorlopige rest' (dus $7x^2$) door de hoogstegraadsterm van de deler $x-3$, dus door x. Voeg deze component $7x^2/x = 7x$ toe aan het 'voorlopig quotiënt' in de rechterkolom.

(d) Vermenigvuldig opnieuw de deler $x-3$ met deze nieuwe component $7x$ en schrijf het product $7x \cdot (x-3)$ onder de 'voorlopige rest' $7x^2 - 5x + 2$. Trek het product $7x^2 - 21x$ af van de 'voorlopige rest' $7x^2 - 5x + 2$. Per constructie vallen de hoogste-graadstermen weer tegen elkaar weg. De nieuwe 'voorlopige rest' is $7x^2 - 5x + 2 - (7x^2 - 21x) = 16x + 2$. Deze 'voorlopige rest' $16x + 2$ is nog te groot, want de graad van de 'voorlopige rest' is niet strikt kleiner dan de graad van de deler. We gaan dus verder met de procedure.

(e) Deel opnieuw de hoogstegraadsterm van de nieuwe 'voorlopige rest' ($16x$) door x. Voeg 16 toe als nieuwe component van het 'voorlopig quotiënt'.

(f) Vermenigvuldig opnieuw de deler $x-3$ met die nieuwe component 16 en trek het product $16(x-3)$ af van de huidige 'voorlopige rest' $16x + 2$. Dit geeft de nieuwe 'voorlopige rest' 50.

(g) Omdat de graad van deze 'voorlopige rest' strikt kleiner is dan de graad van de deler, is het onmogelijk dat we de rest nog kunnen schrijven als een product van de deler met nog iets. Dit beëindigt dus de procedure. 50 is de uiteindelijke rest, en $2x^2 + 7x + 16$ is het uiteindelijke quotiënt.

Besluit: $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (2x^2 + 7x + 16)(x-3) + 50$

Voorbeeld 1.2.3. Deel $2x^3 - 8$ door $x + 2$.

Uitwerking:

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Deling van veeltermen

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & 2x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & - & 8 & x+2 \\
- & 2x^3 & + & 4x^2 & & & & & \hline 2x^2-4x+8 \\
\hline
 & & - & 4x^2 & + & 0x & - & 8 & \\
 & & - & 4x^2 & - & 8x & & & \\
\hline
 & & & & & 8x & - & 8 & \\
 & & & & & 8x & + & 16 & \\
\hline
 & & & & & & - & 24 &
\end{array}
$$

Besluit: $2x^3 - 8 = (2x^2 - 4x + 8)(x + 2) - 24$

Voorbeeld 1.2.4. Deel $-x^3 + 9x + 2$ door $x + 4$.

Uitwerking:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & - & x^3 & + & 0x^2 & + & 9x & + & 2 & x+4 \\
- & - & x^3 & - & 4x^2 & & & & & \hline -x^2+4x-7 \\
\hline
 & & & & 4x^2 & + & 9x & + & 2 & \\
 & & & & 4x^2 & + & 16x & & & \\
\hline
 & & & & & - & 7x & + & 2 & \\
 & & & & & - & 7x & - & 28 & \\
\hline
 & & & & & & & & 30 &
\end{array}
$$

Besluit: $-x^3 + 9x + 2 = (-x^2 + 4x - 7)(x + 4) + 30$

Voorbeeld 1.2.5. Deel $4x^4 + x^3 + 2x + 1$ door $2x^2 + 1$.

Uitwerking:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr|l}
 & 4x^4 & + & x^3 & + & 0x^2 & + & 2x & + & 1 & 2x^2+1 \\
- & 4x^4 & & & + & 2x^2 & & & & & \hline 2x^2+0.5x-1 \\
\hline
 & & & x^3 & - & 2x^2 & + & 2x & + & 1 & \\
 & & & x^3 & & & + & 0.5x & & & \\
\hline
 & & & & - & 2x^2 & + & 1.5x & + & 1 & \\
 & & & & - & 2x^2 & & & - & 1 & \\
\hline
 & & & & & & & 1.5x & + & 2 &
\end{array}
$$

Besluit: $4x^4 + x^3 + 2x + 1 = \left(2x^2 + \frac{1}{2}x - 1\right)(2x^2 + 1) + \left(\frac{3}{2}x + 2\right)$

Oefening 1.2.1. Zoek het quotiënt en de rest van volgende delingen met behulp van een Euclidische deling.

1. Deel $4x^3 + 4x^2 - 5x - 3$ door $2x^2 - x - 1$.

2. Deel $5x^3 + 125$ door $x + 5$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Deling door $x-a$

We bestuderen nu het delen van een veelterm door een veelterm van de *eerste graad*, dus een deler van de vorm $x-a$, met $a \in \mathbb{R}$.

Eigenschap 1.3.1 (Rest bij deling door $x-a$)**.**

Bij deling van een veelterm $p(x)$ door $x-a$ is de rest gelijk aan de getalwaarde $p(a)$ van $p(x)$ in a.

Bewijs. Uit de formule van de Euclidische deling volgt dat $p(x) = (x-a)q(x)+r(x)$ met $q(x)$ het quotiënt en $r(x)$ de rest met $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(x-a) = 1$. De rest $r(x)$ is dus een veelterm van graad nul, een getal. Noteer de rest dus als $r \in \mathbb{R}$, en bereken de getalwaarde van $p(x)$ in a: $p(a) = (a-a)q(a)+r = 0+r = r$, en dus $p(a) = r$. De rest is dus inderdaad gelijk aan de getalwaarde van $p(x)$ in a.

Voorbeeld 1.3.1.

De rest bij de deling van $p(x) = 2x^3 - 8$ door $x+2$ is $p(-2) = 2\cdot(-2)^3 - 8 = -16-8 = -24$.

Eigenschap 1.3.2 (Deelbaarheidscriterium)**.**

Een veelterm $p(x)$ is deelbaar door $x-a$ als en slechts als $p(a) = 0$.

Bewijs. $p(x)$ is deelbaar door $x-a$ als de rest van de deling van $p(x)$ door $x-a$ gelijk is aan nul. Uit vorige eigenschap volgt dat de rest van de deling van $p(x)$ door $x-a$ gelijk is aan $p(a)$. Dus de rest is nul als en slechts als $p(a) = 0$, en dat is precies het te bewijzen.

Opmerking 1.3.1. Als we een nulpunt a kennen van een veelterm $p(x)$ (met $\text{gr}(p(x)) > 1$), dan weten we wegens vorige eigenschap dat $p(x)$ deelbaar is door $x-a$. Dit wil zeggen dat er een unieke veelterm $q(x)$ bestaat zodat $p(x) = q(x)(x-a)$. We kunnen $q(x)$ vinden als quotiënt van de deling van $p(x)$ door $x-a$. Als we $p(x)$ schrijven als $p(x) = q(x)(x-a)$ hebben we $p(x)$ ontbonden in de factoren $q(x)$ en $x-a$. Als $\text{gr}(q(x)) > 1$ en $q(x)$ heeft minstens 1 nulpunt, dan kan $q(x)$ nog verder ontbonden worden in factoren. Om veeltermen te ontbinden in factoren moeten we dus zoeken naar nulpunten.

Voorbeeld 1.3.2.

Voor de veelterm $p(x) = 2x^4 - 4x^3 + x^2 - x - 2$, kunnen we berekenen dat $p(2) = 0$.

We kunnen $p(x)$ dus schrijven als $p(x) = q(x)(x-2)$, waarbij we $q(x)$ kunnen vinden als quotiënt van de deling van $p(x)$ door $x-2$. Na het uitvoeren van de Euclidische deling vinden we dat $q(x) = 2x^3+x+1$.

Hoe vind je een nulpunt van een veelterm? In het algemeen zal je hier een benaderingmethode voor moeten gebruiken. Voor het speciale maar toch veel voorkomend geval van veeltermen met *gehele* coefficiënten bestaat er wel een procedure:

Eigenschap 1.3.3.

Als een veelterm $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$, *met gehele coëfficiënten* a_i, deelbaar is door $x-a$, met a een *geheel getal*, **dan** is a *een gehele deler van de constante term* a_0 van deze veelterm $p(x)$.

Bewijs. Omdat $p(x)$ deelbaar is door $x-a$ volgt dat $p(a) = 0$. Welnu, a invullen in $p(x) = 0$ en de

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Deling door $x - a$

constante term naar het rechterlid brengen levert dan

$$a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \dots a_1 a = -a_0$$

waarbij in het linkerlid een factor a kan worden afgezonderd. Dat betekent precies dat a een deler is van $-a_0$, en dus ook van a_0.

Opmerking 1.3.2.

- We kunnen bovenstaande eigenschap ook formuleren als:

  Als a een geheel nulpunt is van een veelterm $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$, *met gehele coëfficiënten* a_i, **dan** is a *een gehele deler van de constante term* a_0 van deze veelterm $p(x)$.

- De eigenschap zegt **niet** dat elke gehele deler van de constante term a_0 van een veelterm een nulpunt is van deze veelterm, maar **wel** dat *alle mogelijke gehele nulpunten* te vinden zijn in de (eindige) verzameling van gehele delers van de constante term a_0.

Voorbeeld 1.3.3. Bepaal alle gehele a zodat $p(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ deelbaar is door $x - a$.

We moeten dus alle gehele nulpunten van $p(x)$ bepalen. Uit vorige eigenschap volgt dat enkel gehele delers van de constante term in aanmerking komen, dus $\pm 1, \pm 3, \pm 9$:

$$\begin{array}{llll}
p(x) & \text{is deelbaar door} & (x-1) & \text{omdat} \quad p(\ 1) = 0 \\
p(x) & \text{is deelbaar door} & (x+1) & \text{omdat} \quad p(-1) = 0 \\
p(x) & \text{is deelbaar door} & (x-3) & \text{omdat} \quad p(\ 3) = 0 \\
p(x) & \text{is deelbaar door} & (x+3) & \text{omdat} \quad p(-3) = 0 \\
p(x) & \text{is niet deelbaar door} & (x-9) & \text{omdat} \quad p(\ 9) \neq 0 \\
p(x) & \text{is niet deelbaar door} & (x+9) & \text{omdat} \quad p(-9) \neq 0.
\end{array}$$

Voorbeeld 1.3.4. Bepaal alle gehele a zodat $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ deelbaar is door $x - a$.

We moeten dus alle gehele nulpunten van $p(x)$ bepalen. Uit vorige eigenschap volgt dat enkel delers van de constante term in aanmerking komen, dus ± 1 en ± 2:

$$\begin{array}{llll}
p(x) & \text{is niet deelbaar door} & (x-1) & \text{omdat} \quad p(\ 1) \neq 0 \\
p(x) & \text{is niet deelbaar door} & (x+1) & \text{omdat} \quad p(-1) \neq 0 \\
p(x) & \text{is deelbaar door} & (x-2) & \text{omdat} \quad p(\ 2) = 0 \\
p(x) & \text{is niet deelbaar door} & (x+2) & \text{omdat} \quad p(-2) \neq 0.
\end{array}$$

We vinden enkel dat $p(x)$ deelbaar is door $x - 2$. Het quotiënt van de deling van $x^3 - 2x^2 + x - 2$ door $x - 2$ kunnen we bepalen met het algoritme van de Euclidische deling.

regel van Horner: hoef je niet te gebruiken maar rekent wel sneller dan Euclidische deling. We leggen het Rekenschema van Horner uit aan de hand van een voorbeeld. Als je deze regel kent kan je deze verder gebruiken, want je kan hiermee sneller rekenen. Als je deze regel niet kent gebruik je best de Euclidische deling, omdat die veel duidelijker is.

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Deling door $x - a$

Voorbeeld1.3.5. Deel $x^3 - 2x^2 + x - 2$ door $x - 2$.

Noem de veelterm $p(x)$.

Het startschema ziet eruit als volgt

	1	−2	1	−2
2				

waarbij de coefficiënten van $p(x)$ in de bovenste rij staan. We laten nu de eerste coëfficiënt (dus 1) zakken, vermenigvuldigen die met de 2 links, en schrijven het resultaat op de tweede rij, onder de tweede coëfficiënt (dus onder -2):

	1	−2	1	−2
2		2		
	1			

We tellen de -2 en 2 bij elkaar op, schrijven het resultaat $-2+2=0$ onderaan en vermenigvuldigen 0 met de linkse 2 en schrijven het resultaat 0 weer op de tweede rij, onder de 1, en tellen dan 0 op bij die 1:

	1	−2	1	−2
2		2	0	
	1	0	1	

We vermenigvuldigen opnieuw de onderste 1 met de linkse 2, schrijven het product 2 onder de -2, tellen op en krijgen rechts onderaan het getal 0:

	1	−2	1	−2
2		2	0	2
	1	0	1	0

Het schema is nu volledig, en men kan bewijzen dat het meest rechtse getal onderaan de rest is van de deling van $p(x)$ door $x - 2$, en dat de overige getallen in de onderste rij steeds de coëfficiënten zijn van het quotiënt van $p(x)$ gedeeld door $x - 2$.

Het quotiënt is dus $x^2 + 1$ en de rest is 0, of

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x - 2)(x^2 + 1)$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Veeltermen ontbinden in factoren

Stel dat een veelterm $p(x)$ deelbaar is door $x - a$. Dan bestaat er een unieke veelterm $q(x)$ zodat $p(x) = q(x)(x - a)$. De veelterm $p(x)$ is dan ontbonden in de factoren $q(x)$ en $x - a$. Als de veelterm $q(x)$ minstens één nulpunt heeft, kan $q(x)$ verder ontbonden worden in factoren. Wanneer $q(x)$ bijvoorbeeld een tweedegraadsveelterm is met negatieve discriminant, dan kan $q(x)$ niet verder ontbonden worden in factoren. We illustreren het ontbinden in factoren met een voorbeeld van een derdegraadsveelterm:

Voorbeeld 1.4.1. Ontbind de veelterm $p(x) = x^3 - 7x - 6$ in factoren van zo laag mogelijke graad.

Uitwerking: We zoeken eerst een nulpunt van de gegeven veelterm. We gaan na of $p(x)$ een geheel nulpunt a heeft. Hiervoor moet a een deler zijn van de constante term. De mogelijkheden zijn dus $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$.

We berekenen $p(1) = 1 - 7 - 6 \neq 0, p(2) = 8 - 14 - 6 \neq 0$, maar $p(3) = 27 - 21 - 6 = 0$.

Er bestaat dus zeker een veelterm $q(x)$ zodat $x^3 - 7x - 6 = (x - 3)q(x)$.

Deze veelterm $q(x)$ kan je berekenen met de Euclidische Deling:

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 1x^3 & + & 0x^2 & - & 7x & - & 6 & x-3 \\ \cline{9-9}
- & 1x^3 & - & 3x^2 & & & & & x^2+3x+2 \\ \cline{2-4}
 & & & 3x^2 & - & 7x & - & 6 & \\
 & & - & 3x^2 & - & 9x & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & & 2x & - & 6 & \\
 & & & & - & 2x & - & 6 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Hieruit volgt dat $x^3 - 7x - 6 = (x - 3)(x^2 + 3x + 2)$. Nu gaan we na of de factor $x^2 + 3x + 2$ nog verder kan worden ontbonden. De discriminant in positief, en de nulpunten zijn: $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = -2, -1$.

We vinden de ontbinding $x^3 - 7x - 6 = (x - 3)(x + 1)(x + 2)$.

Merk op: in dit geval had je ook voor de overige delers van de constante term 6 de getalwaarde van $p(x)$ kunnen berekenen, en vinden dat $p(-1) = -1 + 7 - 6 = 0$ en ook $p(-2) = -8 + 14 - 6 = 0$. De drie nulpunten van $p(x)$ zijn dus $3, -1$ en -2, en daaruit volgt ook dadelijk de ontbinding $x^3 - 7x - 6 = (x - 3)(x + 1)(x + 2)$. Dat werkt hier omdat *alle* nulpunten geheel zijn, de methode met de discriminant werkt ook voor niet-gehele nulpunten.

Opmerking 1.4.1.

Een veelterm van graad 3 heeft altijd minstens één reëel nulpunt. Als dit nulpunt geen geheel getal is, dan kunnen we dit niet vinden met de technieken hierboven. Als dit nulpunt wel een geheel nulpunt is, dan kunnen we dit vinden onder de gehele delers van de constante term. In dat geval kunnen we de veelterm ontbinden in ofwel 3 factoren van de eerste graad, ofwel in een factor van de eerste graad en een factor van de tweede graad met negatieve discriminant.

Oefening 1.4.1. Ontbind de volgende veeltermen in factoren:

1. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = \ldots\ldots$

2. $2x^3 + x^2 - 8x + 5 = \ldots\ldots$

3. $x^2 - 2 = \ldots\ldots$

4. $x(x + 1)(2x + 1) + 6(x + 1)^2 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Functies

Een mogelijke voorstellingswijze van een functie bestaat uit een (in dit geval blauwe) *black box*, die voor een bepaalde input I een bepaalde output O genereert:



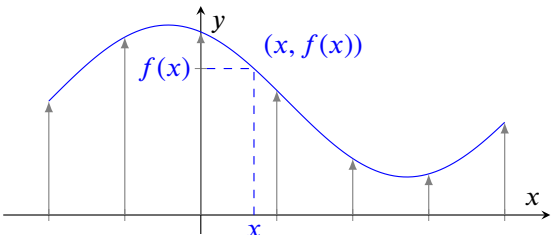
Een **functie** zet dus een *input* om in een *output*.

Een functie heeft meestal een **naam**. Dikwijls gebruiken we gewoon f van $f$unctie, maar ook h, g, f_1, f_2 komen dikwijls voor.

De **input** noemen we dikwijls x. Soms gebruiken we ook andere letters zoals t, n, x_1,x_2 of zelfs ook y en y_1 voor de input.

De **output** of het resultaat van de functie noteren we dan naargelang de keuzes voor de input en de functie met $f(x)$ of bijvoorbeeld $h(t)$. Soms geven we ook een generieke naam aan de output. De letter y is daarvoor een erg populaire keuze. We schrijven dan typisch $y = f(x)$. We bedoelen daarmee dat f een functie is waar je x kan instoppen en wat er dan uitkomt noemen we y, of $f(x)$.

Een reële functie f kunnen we *voorstellen* in een xy-vlak door voor elk getal x (op de x-as) op de verticale rechte door dat punt op 'hoogte' $f(x)$ het punt $(x, f(x))$ te markeren. Dat geeft een figuur (een kromme) die we de **grafiek** van de functie f noemen.



Het **domein** van een functie f, genoteerd $\operatorname{dom} f$, is de verzameling van alle *toegelaten inputs* van de functie.

Oefening 2.1.1. Teken (zonder een grafisch rekenmachine te gebruiken) de grafiek van de functies met volgende voorschriften.

1. $f(x) = |x|$
2. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$
3. $f(x) = \dfrac{x - |x|}{2}$
4. $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$

Oefening 2.1.2. Zoek telkens het grootst mogelijke domein voor een functie met volgend functievoorschrift.

1. $f(x) = \sqrt{x}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^+$. Onthou ook de grafiek gegeven in de uitwerking!
2. $f(x) = \sqrt{1 + x}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f = [-1, +\infty[$
3. $f(x) = \sqrt{1 - x}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f =]-\infty, 1]$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/22H.49)

2.1 Functies

4. $f(x) = 1 - |x|$. Antwoord: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

5. $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f = [-1, 1]$

6. $f(x) = \sqrt{-|x|}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f = \{0\}$

7. $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}_0$. Onthou ook de grafiek gegeven in de uitwerking!

8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}_0^+$

9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}_0$

10. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

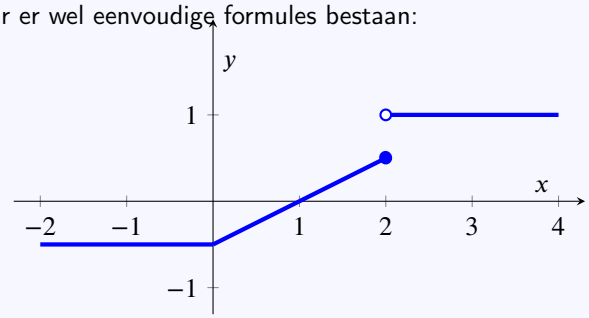
11. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

12. $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 1}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Voorbeeld 2.1.1 (Meervoudig functievoorschrift)**.**

Soms bestaat er geen eenvoudige formule die geldt voor alle x, maar kunnen we het domein opsplitsen over deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ waar er wel eenvoudige formules bestaan:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & x < 0 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} & 0 \le x \le 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$



Oefening 2.1.3. Schets de grafieken van volgende functies met meervoudige functievoorschriften:

1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \neq 0 \\ 1 & \text{als } x = 0 \end{cases}$

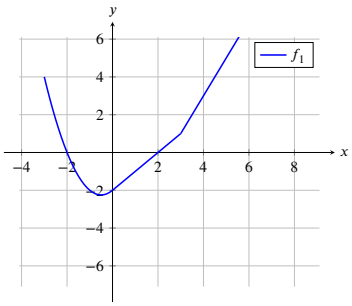
2. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{als } x < 0 \\ x & \text{als } x \geq 0 \end{cases}$

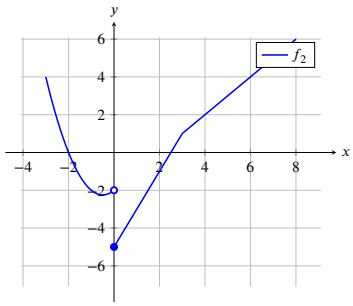
3. $f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{als } x > 1 \end{cases}$

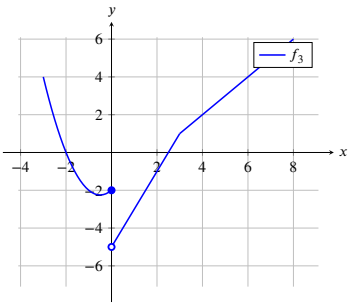
Oefening 2.1.4. Welk functievoorschrift hoort bij welke grafiek ?

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Functies







1. $\boxed{f_1}\ \boxed{f_2}\ \boxed{f_3} = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{als } x \le 0 \\ 2x-5 & \text{als } 0 < x < 3 \\ x-2 & \text{als } x \ge 3 \end{cases}$

2. $\boxed{f_1}\ \boxed{f_2}\ \boxed{f_3} = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{als } x < 0 \\ x-2 & \text{als } 0 \le x < 3 \\ 2x-5 & \text{als } x \ge 3 \end{cases}$

3. $\boxed{f_1}\ \boxed{f_2}\ \boxed{f_3} = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{als } x < 0 \\ 2x-5 & \text{als } 0 \le x < 3 \\ x-2 & \text{als } x \ge 3 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/22H.49)

2.2 Inverse functies

Een functie f is een machine die een invoer x omzet in een uitvoer $f(x)$. Die uitvoer wordt soms ook met de letter y aangeduid en dan schrijven we $y = f(x)$. De machine berekent dus voor elke x een bijhorende y. Men kan zich afvragen of er ook een 'undo-machine' bestaat die de berekening van f omkeert, en de uitvoer y terug omzet in de invoer x.

We noemen twee functies f en g *inversen* van elkaar, als ze elkaars actie ongedaan maken. Hiermee bedoelen we dat $g(f(x)) = x$ en $f(g(x)) = x$. Als f en g inverse functies zijn van elkaar dan noteren we f^{-1} in plaats van g voor de inverse functie van f. We noemen f **inverteerbaar** als er een inverse functie bestaat.

We bekijken enkele voorbeelden. De voorbeelden tonen ook aan dat het voorschrift van de inverse van een functie f te bepalen is uit het voorschrift van f. Het vinden van de inverse functie komt daarbij eigenlijk neer op het *oplossen van een vergelijking*: als $f(x) = y$, vindt dan een formule g voor x zodat geldt dat $x = g(y)$.

Voorbeeld 2.2.1. De functies $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ en $g(x) = 2x - 2$ zijn elkaars inverse. We kunnen dat *algebraïsch* bekijken door $f(g(x))$ en $g(f(x))$ te berekenen en aan te tonen dat beide uitdrukkingen gelijk zijn aan x:

$$f(g(x)) = f(2x-2) = \frac{1}{2}(2x-2) + 1 = x \tag{1}$$

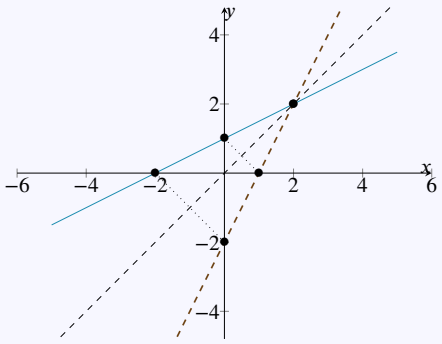
$$g(f(x)) = g(\frac{1}{2}x + 1) = 2(\frac{1}{2}x + 1) - 2 = x \tag{2}$$

We kunnen dus schrijven dat $g = f^{-1}$ en dat $f = g^{-1}$.

We kunnen ook *meetkundig* onderzoeken wat dat betekent voor de grafiek van f en g.

Onderstaande tabel en grafiek van de functies f en g toont dat voor elk paar (x, y) op de grafiek van f, het punt (y, x) op de grafiek van g ligt, en omgekeerd. De grafiek van g krijgen we dus door in de grafiek van f de x en y van plaats te verwisselen. Grafisch komt dat overeen met spiegelen over de eerste bissectrice. De eerste bissectrice is de rechte met vergelijking $y = x$. Spiegelen ten opzichte van die bissectrice komt overeen met x en y omwisselen: het punt $(2, 3)$ wordt gespiegeld naar het punt $(3, 2)$.

$f(x) = x/2 + 1$	$f^{-1}(x) = 2x - 2$
$(-4, -1)$	$(-1, -4)$
$(-2, 0)$	$(0, -2)$
$(0, 1)$	$(1, 0)$
$(2, 2)$	$(2, 2)$
$(4, 3)$	$(3, 4)$



Opmerking 2.2.1.

- Als f^{-1} bestaat, dan wordt de grafiek van f^{-1} bekomen door de grafiek van f te spiegelen rond de eerste bissectrice.
- Je mag kiezen welke letter je neemt als variable voor de inverse functie.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Inverse functies

Voorbeeld 2.2.2. Bereken indien mogelijk de inverse van $f(x) = 5x + 3$

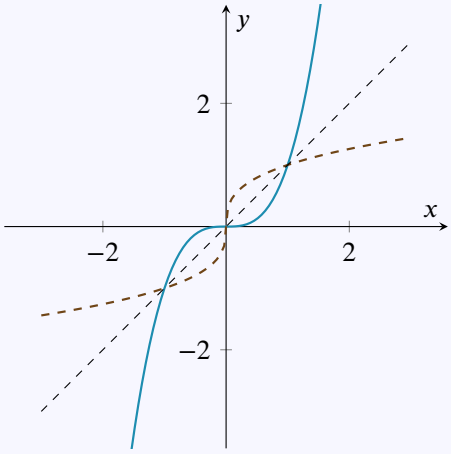
$$y = 5x + 3 \iff y - 3 = 5x \iff \frac{y-3}{5} = x$$

De inverse van $f(x) = 5x + 3$ is dus $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{5}$ of ook $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{5}$, want je mag kiezen welke letter je neemt als variabele voor de inverse functie.

Voorbeeld 2.2.3. Bereken indien mogelijk de inverse van $f(x) = x^3$

$$y = x^3 \iff y^{\frac{1}{3}} = x$$

De inverse van $f(x) = x^3$ is dus $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}$ of ook $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$.



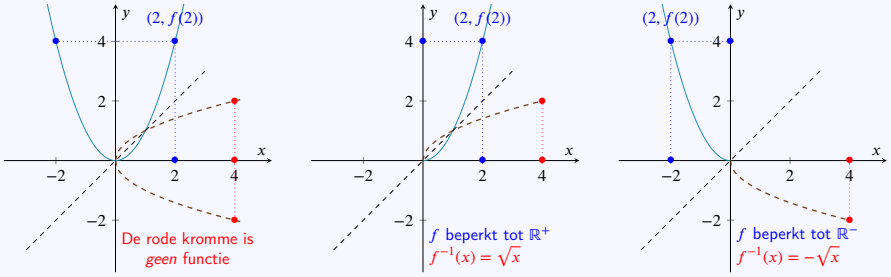
Voorbeeld 2.2.4. Bereken indien mogelijk de inverse van $f(x) = x^2$, met als domein $\mathbb{R}$.

$$y = x^2 \iff x = \pm\sqrt{y}$$

Deze functie is *niet inverteerbaar*:

Voor $y > 0$ zijn er twee oplossingen, $x = \sqrt{y}$ en $x = -\sqrt{y}$. Er zijn 2 mogelijke manieren om toch een inverse functie te definiëren:

- Als je het domein van $f(x) = x^2$ beperkt tot $\mathbb{R}^+$, dan is $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
- Als je het domein van $f(x) = x^2$ beperkt tot $\mathbb{R}^-$, dan is $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.



Het is dus mogelijk dat een functie f geen inverse heeft, maar dat een beperking van die functie tot

CC BY-NC-SA 4.0

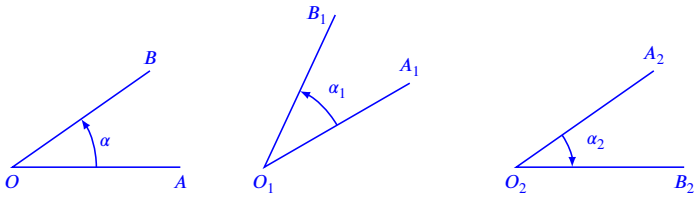
2.2 Inverse functies

een kleiner domein *wel* een inverse heeft. Typische voorbeelden zijn de inversen van de sinus, cosinus en tangens.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/22H.49)

3.1 Radialen

Goniometrie is de studie van de zogenaamde *georiënteerde hoeken* $\measuredangle AOB$ met *hoekpunt* O, *eerste been* OA en *tweede been* OB. Als we dergelijke hoeken een naam geven, kiezen we traditioneel Griekse letters.



Twee *georiënteerde hoeken* $\alpha = \measuredangle AOB$ en $\alpha_1 = \measuredangle A_1O_1B_1$ zijn per afspraak *gelijk* als ze via verschuivingen en draaiingen op elkaar kunnen gelegd worden. In de tekening hierboven kunnen we hoek $\measuredangle AOB$ *niet* op $\measuredangle A_2O_2B_2$ leggen zonder te spiegelen. $\measuredangle AOB$ en $\measuredangle A_2O_2B_2$ zijn dus *verschillende* hoeken. Ook $\measuredangle AOB$ en $\measuredangle BOA$ zijn verschillende hoeken. We noemen de georiënteerde hoek $\measuredangle BOA$ de *tegengestelde* hoek van $\measuredangle AOB$, en noteren die met een minteken: als $\alpha = \measuredangle AOB$, dan is $-\alpha = \measuredangle BOA$. Als het punt B op de rechte OA ligt is er geen echte hoek, en spreken we van de *nulhoek* $\measuredangle AOA$.

We *meten* hoeken traditioneel in (boog)graden, waarbij een rechte hoek $90°$ is, een gestrekte hoek $180°$ en de nulhoek $0°$ of $360°$. Een geöriënteerde hoek meten we 'op $360°$ na', dus per afspraak zijn $20°$, $20° + 360° = 380°$, $20° + 720° = 740°$ en $20° - 360° = -340°$ allemaal maatgetallen van *dezelfde geörienteerde hoek*. We schrijven dikwijls $\alpha + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$ voor *al* de maatgetallen van een hoek.

In de wiskunde is het veel handiger hoeken te meten in *radialen*. Daarbij meet een rechte hoek per afspraak $\frac{\pi}{2}$, een gestrekte hoek π en de nulhoek 0 of 2π. Het maatgetal ligt dus maar vast 'op 2π na', dus per afspraak zijn $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{25\pi}{6}$ en $\frac{\pi}{6} - 2\pi = \frac{-11\pi}{6}$ allemaal maatgetallen van dezelfde hoek. We schrijven dikwijls $\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ voor *al* de maatgetallen van een hoek.

Per afspraak noteren we de 'eenheid'rad voor radialen meestal niet, en we schrijven dus meestal een hoek met grootte π in plaats van een hoek met grootte π rad.

Het verband tussen een hoek gemeten in graden en radialen wordt gegeven door $360° = 2\pi$. We vinden dus: $\pi = 180°$, $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{3\pi}{4} = 135°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$, $\frac{3\pi}{2} = 270°$, ...

Voorbeeld 3.1.1 (Omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd)**.**

Je kan de omzetting van graden naar radialen maken met behulp van de regel van drie. Vertrekkende van het gegeven dat $360°$ gelijk is aan 2π radialen, bereken je aan hoeveel radialen één graad gelijk is, en dan ook aan hoeveel radialen bijvoorbeeld 7 graden zijn. Dezelfde redenering werkt voor de omrekening van radialen naar graden.

Graden	Radialen	Graden	Radialen
$360°$	2π	$360°$	2π
$: 360$	$: 360$	$: 2\pi$	$: 2\pi$
$1°$	$\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$	$\frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$	1
$\times 7$	$\times 7$	$\times 7$	$\times 7$
$7°$	$\frac{7\pi}{180}$	$\frac{7 \cdot 180°}{\pi}$	7

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Radialen

We zien dus dat 7° gelijk is aan $\frac{7\pi}{180}$ radialen en dat 7 radialen gelijk is aan $\frac{7 \cdot 180}{\pi}°$.

Oefening 3.1.1.

1. Hoeveel radialen is 120°? ……

2. Hoeveel graden is 1 rad? ……

Oefening 3.1.2. Zet om van graden naar radialen of omgekeerd. (Noteer pi voor π.)

Graden	*Radialen*
8°	……
…… °	$7\pi/4$
…… °	$\pi/10$
90°	……
1°	……

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Goniometrische cirkel en goniometrische getallen

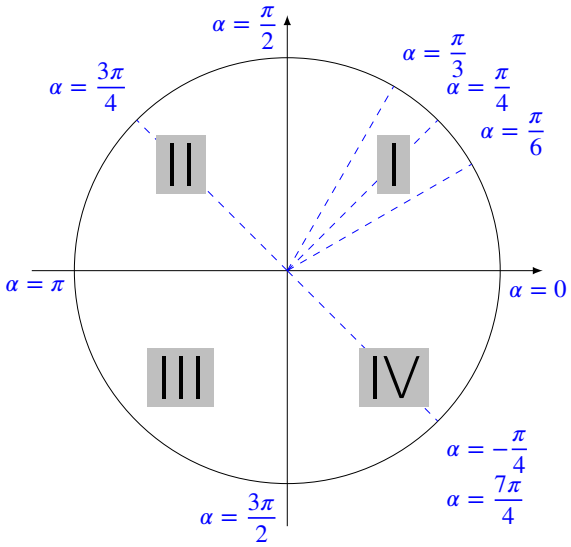
Omdat we hoeken vrij kunnen verschuiven en draaien (maar niet spiegelen), kunnen we elke hoek verplaatsen zodat zijn hoekpunt in de oorsprong van het vlak ligt en zijn eerste been op de positieve x-as. Het tweede been snijdt dan de cirkel met straal 1 en centrum de oorsprong in een uniek punt.

Definitie 3.2.1.

De **goniometrische cirkel** is de cirkel met straal 1 en centrum in de oorsprong.

Door het hoekpunt in de oorsprong te leggen, en het eerste been op de positieve x-as, komt met elke georiënteerde hoek α een uniek snijpunt P_α van het tweede been met de goniometrische cirkel overeen, en omgekeerd bepaalt elk punt P_α op de goniometrische cirkel een georiënteerde hoek α.

De goniometrische cirkel wordt verdeeld in vier **kwadranten**, die vanaf rechtsboven tegen de klok in genummerd worden met Romeinse cijfers I, II, III, IV zoals op de figuur hieronder. Let op de ligging van de hoeken, waarvan de grootte is uitgedrukt in radialen, deze moet je zonder nadenken weten liggen op de goniometrische cirkel.



Definitie 3.2.2.

De **cosinus** van de hoek α is de x-coördinaat van het punt P_α,
de **sinus** van de hoek α is de y-coördinaat van het punt P_α:

$$P_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

Per definitie is ook

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{(tangens)} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \text{(secans)}$$

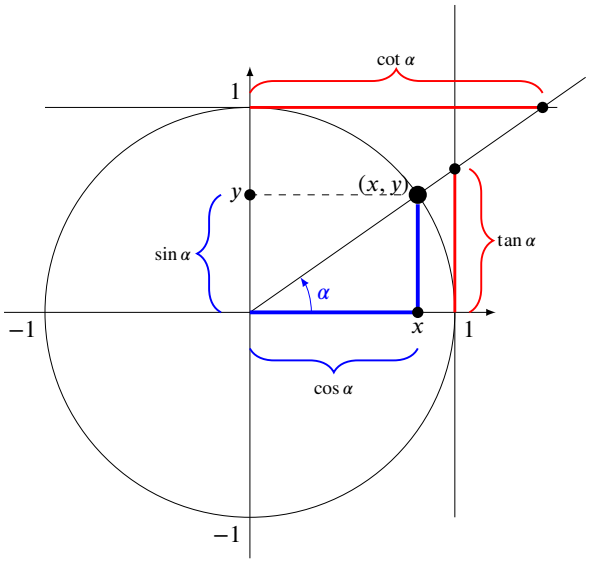
$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{(cotangens)} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \quad \text{(cosecans)}$$

We noemen de $\sin, \cos, \tan, \cot, \sec, \csc$ de **goniometrische getallen** van een hoek.

De cosinus en de sinus van een hoek α kan je op de goniometrische cirkel aflezen op de *assen*. Ook de tangens en de cotangens kan je aflezen, en wel op de *raaklijnen* aan de goniometrische cirkel in punten $(1,0)$ en $(0,1)$:

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Goniometrische cirkel en goniometrische getallen



Opmerking 3.2.1. De omtrek van de goniometrische cirkel is 2π. De *booglengte* van een kwart van deze goniometrische cirkel, bijvoorbeeld het kwart gelegen in het eerste kwadrant, is dan $\frac{\pi}{2}$. Dit is net de grootte van de bijhorende hoek, gemeten in radialen. In het algemeen geldt dat de lengte van de cirkelboog van de goniometrische cirkel gelegen tussen de twee benen van een hoek gelijk is aan het maatgetal van de hoek uitgedrukt in radialen, wanneer we dit maatgetal kiezen tussen 0 en 2π.

Oefening 3.2.1. Lees volgende waarden af op de goniometrische cirkel:

1. $\sin 2\pi = \ldots\ldots$ $\cos 2\pi = \ldots\ldots$
2. $\sin \frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos \frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$
3. $\sin \frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos \frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$
4. $\cos \pi = \ldots\ldots$ $\sin \pi = \ldots\ldots$
5. $\cos(-\pi) = \ldots\ldots$ $\sin(-\pi) = \ldots\ldots$
6. $\tan \pi = \ldots\ldots$

De vergelijking van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ leidt tot de hoofdformule van de goniometrie als we gebruiken dat voor de coördinaten van een punt P_α op de goniometrische cirkel geldt dat $(x, y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ voor een hoek α:

Eigenschap 3.2.1 (Hoofdformule van de goniometrie)**.** Voor elke hoek α geldt:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad \text{(hoofdformule goniometrie)}$$

Hieruit volgt onmiddellijk ook dat

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{(deel de hoofdformule door } \cos^2\alpha\text{)}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \text{(deel de hoofdformule door } \sin^2\alpha\text{)}$$

Opmerking 3.2.2.

Let op de notatie voor machten: $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2 = \cos^2(\alpha) \neq \cos(\alpha^2) = \cos\alpha^2$.

Merk ook op dat in het algemeen $\cos(\alpha+\beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta$ en $\cos 2\alpha \neq 2\cos\alpha$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Goniometrische cirkel en goniometrische getallen

Inderdaad, $\cos(\alpha+\beta) \stackrel{?}{=} \cos\alpha + \cos\beta$ werkt al niet voor bijvoorbeeld $\beta = 0$:

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha+0) \neq \cos\alpha + \cos 0 = \cos\alpha + 1$$

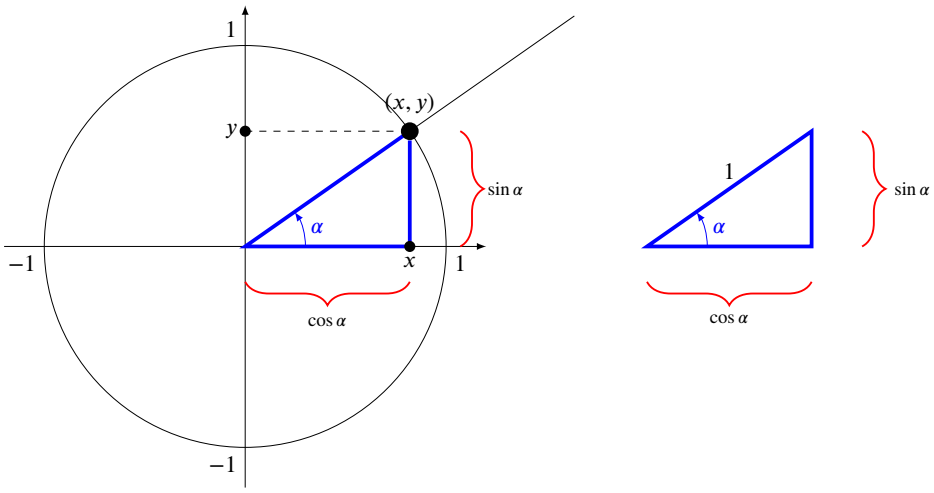
en $\cos 2\alpha \stackrel{?}{=} 2\cos\alpha$ werkt niet voor bijvoorbeeld $\alpha = 0$

$$\cos(2\cdot 0) = \cos 0 = 1 \text{ maar } 2\cdot\cos 0 = 2\cdot 1 = 2$$

Gelijkaardige problemen doen zich voor bij sinus, tangens, secans en cosecans. Er bestaat een hele collectie formules om toch de goniometrische getallen van sommen te berekenen.

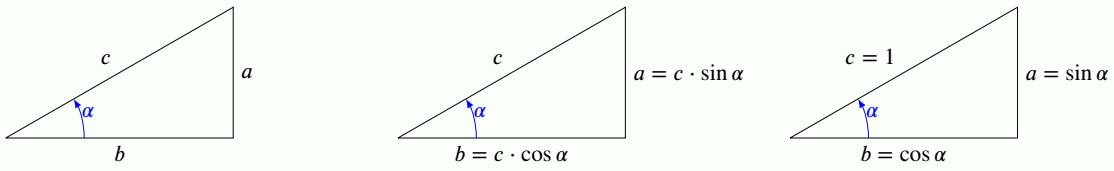
3.2.1 Rechthoekige driehoeken

Voor *scherpe hoeken* kunnen we de sinus en cosinus ook bekijken in een **rechthoekige driehoek**. Omdat het punt $P_\alpha = (x, y)$ op de goniometrische cirkel ligt, heeft de schuine zijde van de rechthoekige driehoek op onderstaande figuur lengte 1. De lengte van de *aanliggende zijde* van hoek α is gelijk aan $\cos\alpha$, de lengte van de *overstaande zijde* is $\sin\alpha$.



In volgende eigenschap bekijken we dit in rechthoekige driehoeken waarvan de lengte van de schuine zijde niet gelijk aan 1 hoeft te zijn. We moeten in dat geval *herschalen* met de lengte van de schuine zijde:

Eigenschap 3.2.2 (Sinus en cosinus in een rechthoekige driehoek)**.**



CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Goniometrische cirkel en goniometrische getallen

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{schuine zijde}}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{aanliggende zijde}}{\text{schuine zijde}}$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

3.2.2 Standaardhoeken

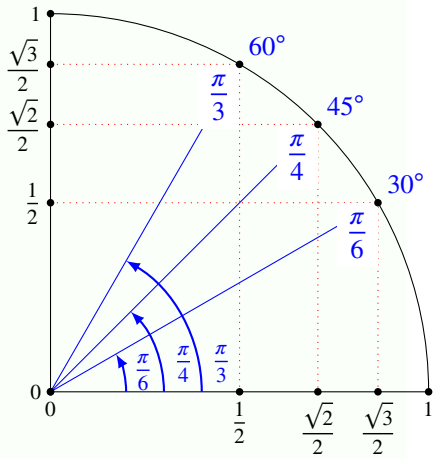
Voor een beperkt aantal hoeken blijkt het erg interessant te zijn de goniometrische getallen te kennen: enerzijds omdat ze in de praktijk regelmatig voorkomen, maar vooral ook omdat er *exacte* uitdrukkingen voor bestaan. Je hoeft deze getallen niet van buiten te kennen, deze tabel staat immers ook in de cursustekst van Wiskunde I, maar het is wel gemakkelijk als je dit niet telkens moet gaan opzoeken.

Eigenschap 3.2.3 (Goniometrische getallen van standaardhoeken)**.**

Onderstaande tabel is erg eenvoudig te onthouden:

Je schrijft de hoeken uit de tabel van klein naar groot, en de bijhorende sinussen zijn dan het rijtje halve vierkantswortels (de tweede rij in de tabel). De cosinus is hetzelfde rijtje omgekeerd, en de tangens is natuurlijk het quotiënt van de sinus en de cosinus.

α	0 $0°$	$\frac{\pi}{6}$ $30°$	$\frac{\pi}{4}$ $45°$	$\frac{\pi}{3}$ $60°$	$\frac{\pi}{2}$ $90°$
	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/



$\tan\pi/2$ is niet gedefinieerd: $\tan\pi/2 = \dfrac{\sin\pi/2}{\cos\pi/2}$, maar $\cos\pi/2 = 0$.

Merk op dat $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Opmerking 3.2.3.

Een rekenmachine geeft enkel numerieke oplossingen, en het is soms veel handiger om met uitdrukkingen als $\sqrt{2}$ te rekenen dan met $1,41421\ldots$. Dat is bijvoorbeeld het geval als je de waarde even verder moet kwadrateren, wat met goniometrische formules wel eens voorkomt.

CC BY-NC-SA 4.0

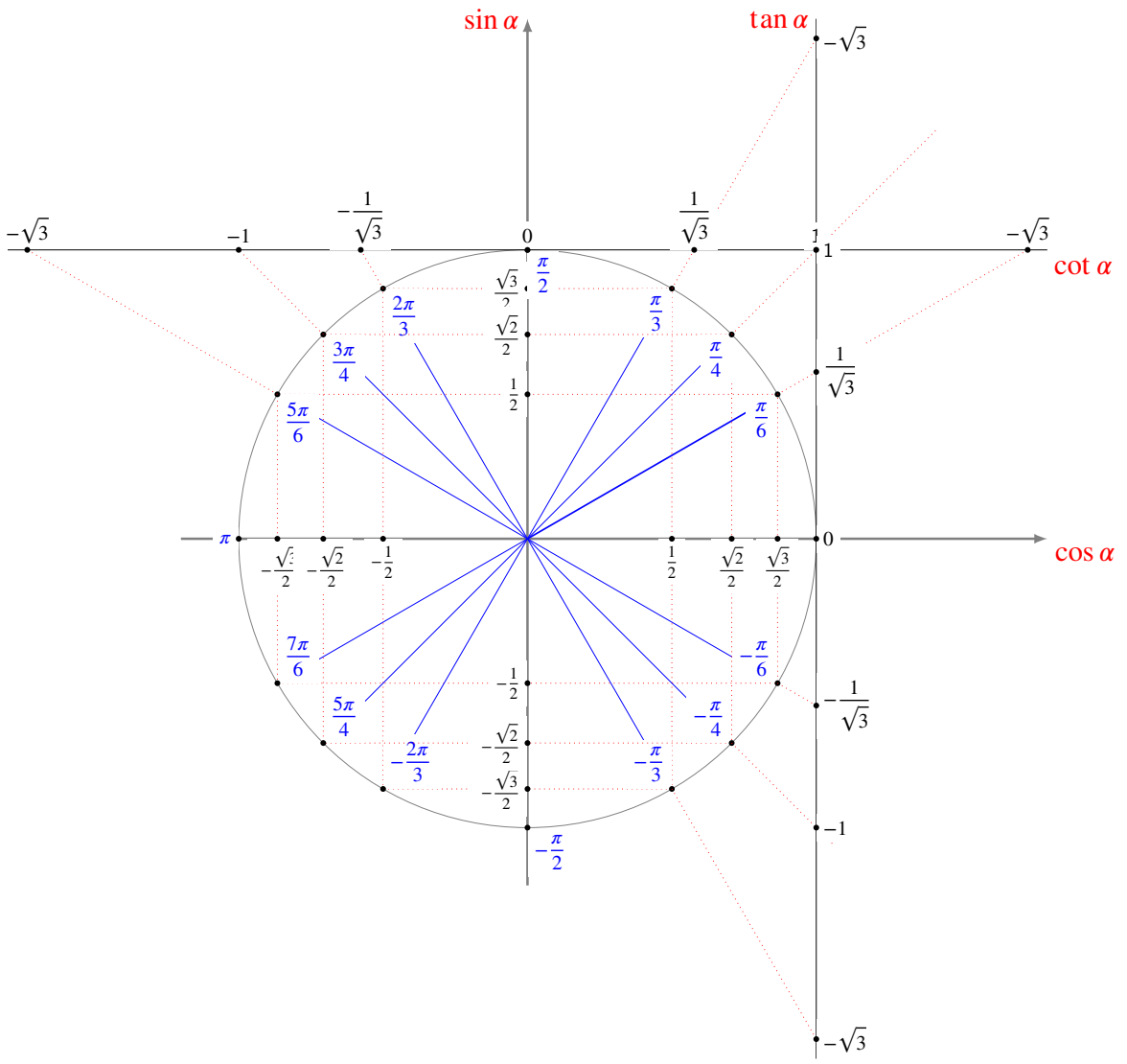
3.2 Goniometrische cirkel en goniometrische getallen

Volgende figuur van de goniometrische cirkel laat toe om op basis van vorige tabel ook goniometrische getallen van hoeken in de andere kwadranten af te lezen.

Je kan de sinus aflezen op de rechte $x = 0$ (dus de y-as), en de tangens op de rechte $x = 1$. Je leest de *co*sinus op de rechte $y = 0$ (dus de x-as), en de *co*tangens op de rechte $y = 1$.

Merk op dat je ook het *teken* van de sinus, cosinus en tangens dadelijk kan aflezen.

Je leert dit best niet van buiten, maar bestudeert het tot je er de evidentie van inziet.



CC BY-NC-SA 4.0

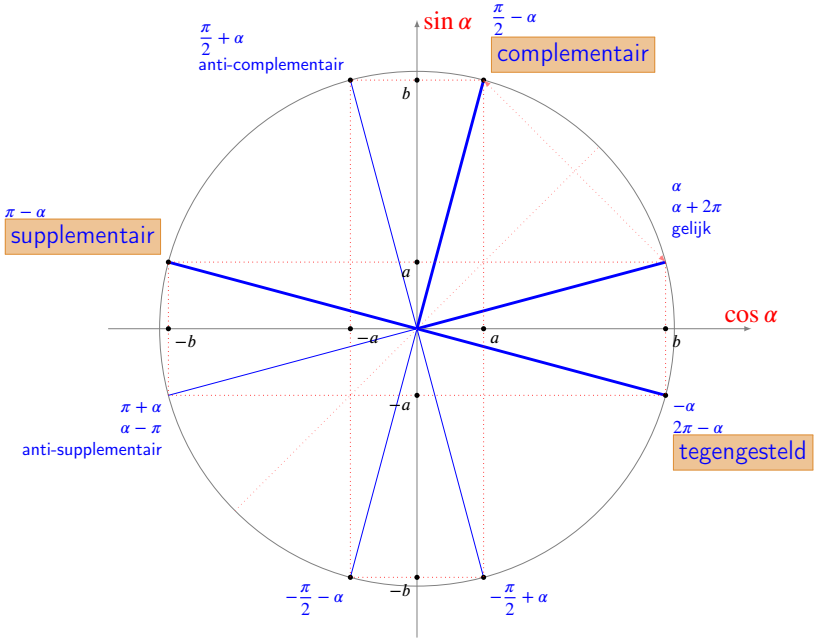
3.3 Verwante hoeken

Op de goniometrische cirkel zien we dat er eenvoudige verbanden zijn tussen de goniometrische getallen van zogenaamde *verwante* hoeken. Uit de gekende waarden voor sinus, cosinus, tangens en cotangens van enkele *standaardhoeken*, volgen dus ook de waarden van veel meer hoeken. Bovendien kunnen we het berekenen van goniometrische getallen van een willekeurige hoek steeds herleiden tot het berekenen van een goniometrisch getal van een hoek uit het eerste kwadrant.

Definitie 3.3.1 (Verwante hoeken)**.** Elke hoek α heeft volgende zogenaamde **verwante** hoeken:

$-\alpha$	is de **tegengestelde** hoek	(de som van α en $-\alpha$ is gelijk aan 0)
$\pi - \alpha$	is de **supplementaire** hoek	(de som van α en $\pi - \alpha$ is gelijk aan π)
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	is de **complementaire** hoek	(de som van α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$ is gelijk aan $\frac{\pi}{2}$)
$\pi + \alpha$	is de **anti-supplementaire** hoek	(het verschil van α en $\pi - \alpha$ is gelijk aan π)
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	is de **anti-complementaire** hoek	(het verschil van α en $\frac{\pi}{2} + \alpha$ is gelijk aan $\frac{\pi}{2}$)

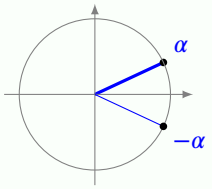
De verwante hoeken van een hoek α in het eerste kwadrant worden hieronder geschetst op de goniometrische cirkel. Voor de volledigheid zijn ook de hoeken $-\frac{\pi}{2} - \alpha$ en $-\frac{\pi}{2} + \alpha$ opgenomen in de figuur.



De benamingen van de verwante hoeken zijn niet belangrijk om te onthouden. Wel belangrijk is om onderstaande eigenschappen zelf te kunnen terugvinden door het maken van een figuur en deze eigenschappen te kunnen gebruiken in oefeningen.

Eigenschap 3.3.1 (Tegengestelde hoeken)**.**

$$\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot\alpha \end{aligned}$$

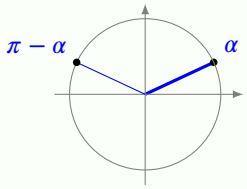


CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Verwante hoeken

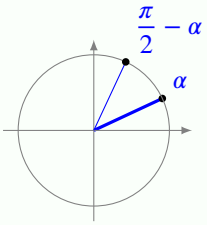
Eigenschap 3.3.2 (Supplementaire hoeken).

$$\begin{aligned}\sin(\pi-\alpha) &= \sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha) &= -\cos\alpha\\ \tan(\pi-\alpha) &= -\tan\alpha\\ \cot(\pi-\alpha) &= -\cot\alpha\end{aligned}$$



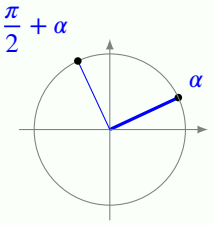
Eigenschap 3.3.3 (Complementaire hoeken).

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\alpha\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \sin\alpha\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cot\alpha\\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \tan\alpha\end{aligned}$$



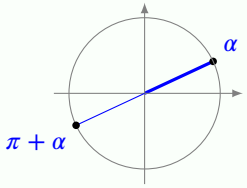
Eigenschap 3.3.4 (Anti-complementaire hoeken).

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\alpha\\ \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\alpha\\ \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\cot\alpha\\ \cot\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\tan\alpha\end{aligned}$$



Eigenschap 3.3.5 (Anti-supplementaire hoeken).

$$\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\pi) &= -\sin\alpha\\ \cos(\alpha\pm\pi) &= -\cos\alpha\\ \tan(\alpha\pm\pi) &= \tan\alpha\\ \cot(\alpha\pm\pi) &= \cot\alpha\end{aligned}$$

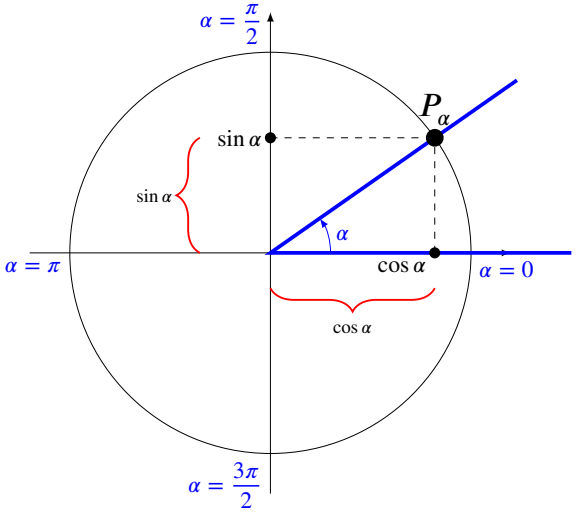


Oefening 3.3.1. Zoek aan de hand van de goniometrische cirkel (zie onder) waaraan volgende uitdrukkingen gelijk zijn.

1. $\cos(\pi-\alpha) =$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ |
2. $\sin(\alpha-\pi) =$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ |
3. $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) =$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ |
4. $\sin(\pi+\alpha) =$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ |
5. $\tan(\alpha-\frac{\pi}{2}) =$ | $-\tan\alpha$ | $-\cot\alpha$ | $\tan\alpha$ | $\cot\alpha$ |

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Verwante hoeken



Oefening 3.3.2. Bereken volgende goniometrische getallen door gebruik te maken van de gekende waarden van de standaardhoeken $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ en $\frac{\pi}{2}$ en de symmetrieën voor de verwante hoeken.

1. $\cos\frac{\pi}{3} =$

2. $\cos\frac{2\pi}{3} =$

3. $\cos\frac{5\pi}{6} =$

4. $\sin\frac{7\pi}{4} =$

5. $\cos\frac{-\pi}{2} =$

6. $\cos\frac{-2\pi}{3} =$

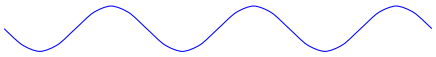
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/22H.49)

3.4 Goniometrische functies

Met een hoek α hebben we een getal $\sin\alpha$ geassocieerd. Door nu de hoek α te laten *variëren* (dus 'variabel' te maken), bekomen we een *functie* in de 'variabele' α. In de wiskunde gebruiken we dikwijls de letter x voor variabelen. We zullen hier dus ook meestal spreken van $\sin x$ in plaats van $\sin\alpha$. Ook van de cosinus, de tangens en de cotangens kunnen we functies maken.

We gaan nu na hoe de grafieken van deze functies er uit zien. We nemen als voorbeeld $y = \sin(x)$, waarvan velen de vorm kennen of minstens herkennen:



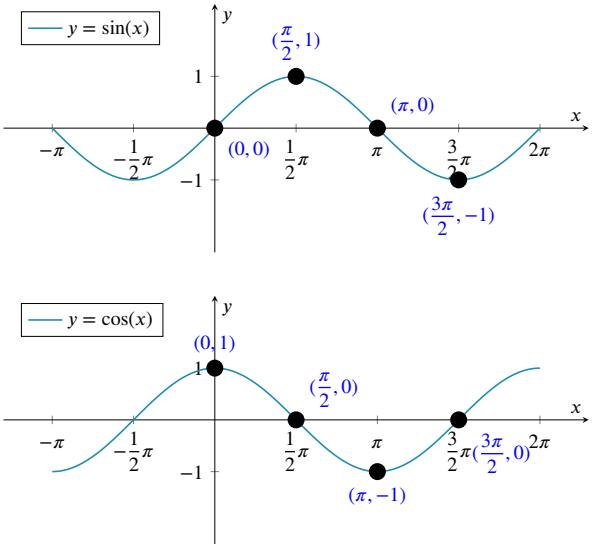
Zonder aanduidingen op de assen ziet de grafiek van $y = \cos(x)$ er net hetzelfde uit. Het is dus belangrijk om te weten waar de nulpunten, de maximale en de minimale waarden liggen.

Oefening 3.4.1. Lees volgende waarden af op de goniometrische cirkel:

1. $\sin 0 = \ldots\ldots$ $\sin\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\sin\pi = \ldots\ldots$ $\sin\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\sin 2\pi = \ldots\ldots$

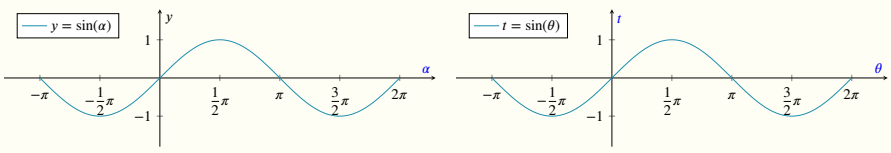
2. $\cos 0 = \ldots\ldots$ $\cos\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos\pi = \ldots\ldots$ $\cos\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos 2\pi = \ldots\ldots$

Met de waarden uit vorige oefening kunnen we nu enkele waarden op de x-as en y-as noteren:



Opmerking 3.4.1.

- Als we sinus, cosinus en tangens als functies beschouwen, geldt dat in principe *altijd* met de variabele uitgedrukt in radialen.
- Als we de sinus beschouwen als een functie, gebruiken we dikwijls de letter x als variabele eerder dan α. In toepassingen gebruikt men ook andere letters. Men tekent dan bijvoorbeeld ook grafieken in een αy-vlak of een θt-vlak



CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Goniometrische functies

Op basis van de grafiek kan je sommige goniometrische vergelijkingen direct oplossen. Je kan hiervoor ook de goniometrische cirkel gebruiken.

Oefening 3.4.2. Geef alle oplossingen van volgende vergelijkingen:

1. $\sin x = 0$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. $\sin x = 1$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

3. $\cos x = 0$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

4. $\cos x = 1$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Oefening 3.4.3. Geef alle oplossingen van volgende vergelijkingen:

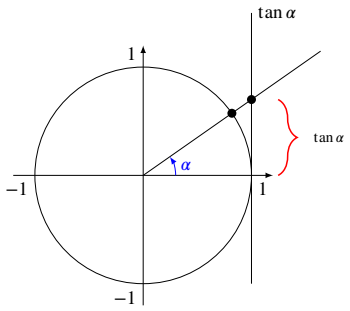
1. $\sin(\frac{\pi}{2}x) = 0$ heeft als oplossingsverzameling: ... ...

2. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ heeft als oplossingsverzameling: ... ...

Een gelijkaardig onderzoek kan ook voor de tangensfunctie $y = \tan(x)$ gedaan worden, op basis van de definitie

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\ .$$

De tangensfunctie is niet gedefinieerd in de nulpunten van de noemer, dus als $\cos x = 0$, zoals bijvoorbeeld in $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, of algemeen als $x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Waar $\sin x = 0$ zal ook de tangensfunctie nul zijn.
We kunnen de tangens ook aflezen op de goniometrische cirkel:

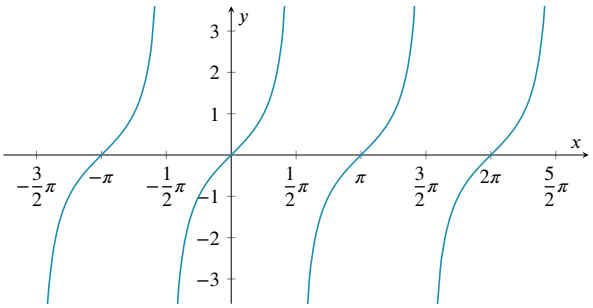


We lezen op de goniometrische cirkel af dat $\tan 0 = 0$, en dat naarmate de hoek groter wordt ook de tangens van de hoek groter wordt. Als de hoek de waarde $\frac{\pi}{2}$ krijgt, dan bestaat de tangens niet meer, dan wordt deze 'oneindig'. Volledig gelijkaardig wordt de tangens steeds negatiever als de hoek varieert van 0

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Goniometrische functies

tot $-\frac{\pi}{2}$. Door voldoende punten te berekenen, kan je nagaan dat de grafiek van de tangensfunctie er als volgt uit ziet:

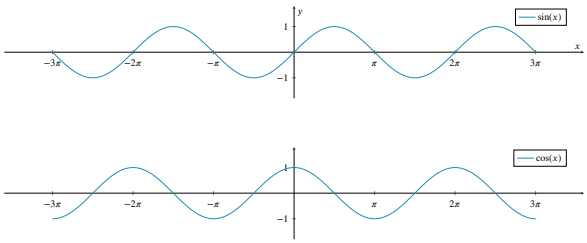


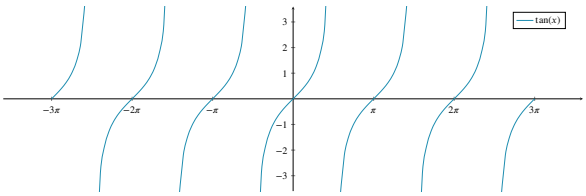
Oefening 3.4.4. Geef alle oplossingen van volgende vergelijking:

1. $\tan x = 0$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Op de grafieken van sin, cos en tan kan je onderstaande eigenschappen aflezen (en je moet ze dus zeker niet van buiten leren).





Eigenschap 3.4.1 (Eigenschappen van goniometrische functies)**.**

(a) de nulpunten van de goniometrische functies worden gegeven door:

- de sinusfunctie heeft nulpunten in $k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft nulpunten in $\frac{\pi}{2} + k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de tangensfunctie heeft nulpunten in $k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$

(b) de maxima en minima van de goniometrische functies worden gegeven door:

- de sinusfunctie heeft maxima in $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de sinusfunctie heeft minima in $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft maxima in $2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft minima in $\pi + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de tangensfunctie heeft geen maxima of minima

(c) $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

(d) $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Goniometrische functies

(e) $\tan(x+\pi) = \tan(x)$

(f) de tangensfunctie heeft *verticale asymptoten* in de punten $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$: in die punten zelf is de tangens niet gedefinieerd, maar de grafiek komt er wel willekeurig dicht tegen de verticale rechten $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

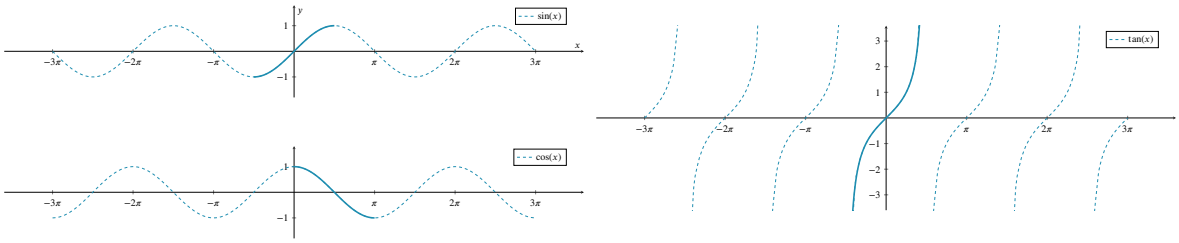
Eigenschappen (c),(d) en (e) betekenen dat de sinus, cosinus en tangens periodische functies zijn.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/22H.49)

3.5 Cyclometrische functies

We bestuderen de *inverse functies* van de gekende functies sinus, cosinus en tangens. We zoeken dus niet de sinus van een bepaald getal x (dus niet r zodat $r = \sin x$), maar net het omgekeerde: we krijgen $r \in [-1, 1]$ en zoeken x zodat $\sin x = r$. Het probleem is dat er *meerdere* dergelijke getallen x bestaan. Voor $r = 0$ weten we bijvoorbeeld dat $\sin(0) = \sin(\pi) = \sin(-\pi) = \sin(2\pi) = \sin(3\pi) = 0$. De sinusfunctie gedefinieerd op $\mathbb{R}$ heeft dus geen inverse functie.

Om dit probleem op te lossen kijken we eerst naar de grafieken van sin, cos en tan:



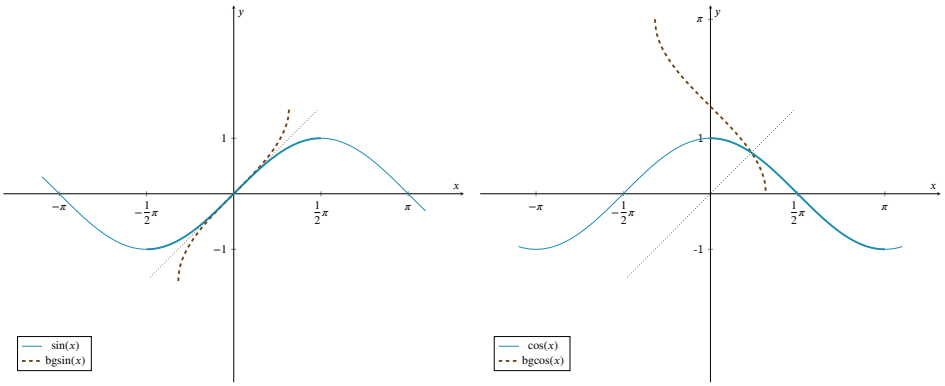
Op de grafiek kan je zien dat, wanneer we het domein van sin beperken tot $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *wel* geldt dat voor elke $r \in [-1, 1]$ er *één unieke* x is zodat $\sin x = r$. Om dezelfde reden spreken we af om het domein van cos te beperken tot $[0, \pi]$ en dat van tan tot $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Definitie 3.5.1 (Cyclometrische functies)**.**

Volgende **cyclometrische functies** zijn de inversen van de goniometrische functies als we het domein van die goniometrische functies gepast beperken:

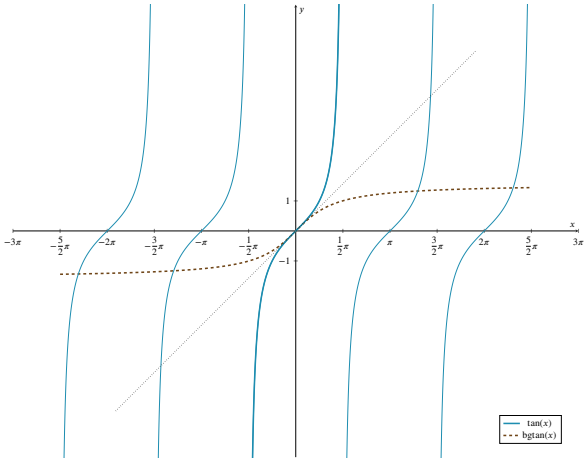
- De inverse van $y = \sin x$ beperkt tot het domein $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ is $y = \text{bgsin}\, x$ met domein $[-1, 1]$.
- De inverse van $y = \cos x$ beperkt tot het domein $[0, \pi]$ is $y = \text{bgcos}\, x$ met domein $[-1, 1]$.
- De inverse van $y = \tan x$ beperkt tot het domein $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ is $y = \text{bgtan}\, x$ met domein $\mathbb{R}$.

We bekomen de *grafiek* van de cyclometrische functies door het domein van de goniometrische functies te beperken, en de grafiek te spiegelen over de eerste bissectrice:

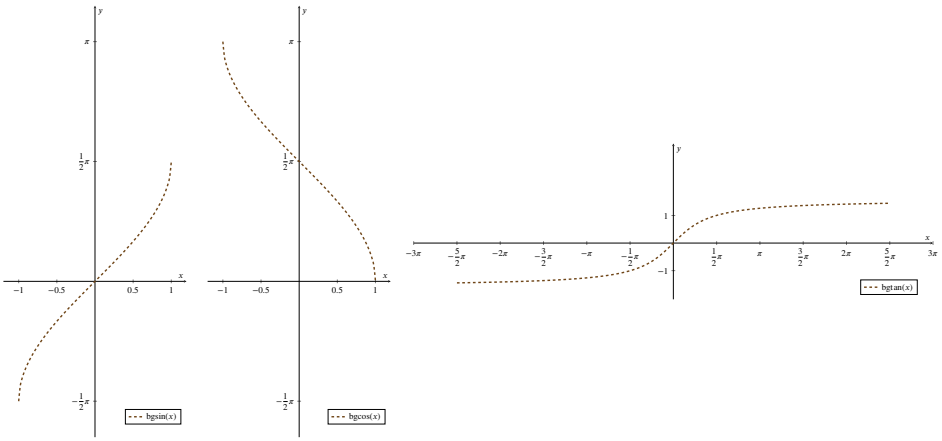


CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Cyclometrische functies



en dat resulteert in volgende grafieken van bgsin, bgcos en bgtan:



Opmerking 3.5.1.

- bgtan y is de hoek in $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, uitgedrukt in radialen, waarvan de tangens y is. (analoog voor bgsin en bgcos)
- Men gebruikt zowel de notaties bgtan, Bgtan, arctan als atan. (analoog voor bgsin en bgcos)
- De boogsinus en boogtangens is *altijd* een getal tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$, en dat is dus *altijd* een hoek in kwadrant I of IV.
- De boogcosinus van een getal is *altijd* een getal tussen 0 en π, en dat is dus *altijd* een hoek in kwadrant I of II.
- Zoals steeds voor inverse functies geldt dat de grafiek van de sin en bgsin elkaars *spiegelbeeld* zijn over de eerste bissectrice $y = x$. Idem voor cos en bgcos, en tan en bgtan.
- bgsin en bgcos zijn slechts gedefinieerd op het interval $[-1, 1]$.
- bgtan is gedefinieerd op $\mathbb{R}$.

Voorbeeld 3.5.1.

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Cyclometrische functies

- $\text{bgsin}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ want $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{6}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- $\text{bgsin}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ want $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ en $-\frac{\pi}{6}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- $\text{bgcos}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ want $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\frac{\pi}{4}$ ligt tussen 0 en π.
- $\text{bgcos}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$ want $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\frac{3\pi}{4}$ ligt tussen 0 en π.
- $\text{bgtan}\,1 = \frac{\pi}{4}$ want $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ en $\frac{\pi}{4}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- $\text{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ want $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$ en $-\frac{\pi}{4}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.

Wat volgt mag je overslaan:

Omdat bgtan niet de inverse is van de gewone tangensfunctie maar slechts van de tangensfunctie beperkt tot een deel van het domein is $\text{bgtan}(\tan(\alpha))$ niet altijd gelijk is aan α.

We bekijken van naderbij wat er gebeurt als we de functies bgtan en tan samenstellen:

Voorbeeld 3.5.2.

We weten bijvoorbeeld dat $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\text{bgtan}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$, $\text{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ en $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$. Hiermee kunnen we berekenen dat

- $\text{bgtan}(\tan(\frac{\pi}{4})) = \text{bgtan}(1) = \frac{\pi}{4}$. Voor $\alpha = \frac{\pi}{4}$ geldt bijgevolg $\text{bgtan}(\tan(\alpha)) = \alpha$.
- $\text{bgtan}(\tan(\frac{3\pi}{4})) = \text{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Voor $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ geldt $\text{bgtan}(\tan(\alpha)) \neq \alpha$. Hier geldt dat $\text{bgtan}(\tan(\frac{3\pi}{4})) = -\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - \pi$.

In het algemeen geldt voor hoeken tussen $\frac{\pi}{2}$ en $\frac{3\pi}{2}$ (hoeken in het 2de en 3de kwadrant) dat:

$$\text{bgtan}(\tan\alpha) = \alpha - \pi \text{ of dus } \alpha = \text{bgtan}(\tan\alpha) + \pi.$$

Voor hoeken in het 1ste en 4de kwadrant geldt wel $\text{bgtan}(\tan\alpha) = \alpha$.

Oefening 3.5.1. Bereken volgende uitdrukkingen.

1. $\text{bgtan}(\tan\frac{\pi}{3}) = \ldots\ldots$

2. $\text{bgtan}(\tan\frac{2\pi}{3}) = \ldots\ldots$

3. $\text{bgtan}(\tan\frac{3\pi}{3}) = \ldots\ldots$

4. $\text{bgtan}(\tan\frac{4\pi}{3}) = \ldots\ldots$

5. $\text{bgtan}(\tan\frac{5\pi}{3}) = \ldots\ldots$

6. $\text{bgtan}(\tan\frac{6\pi}{3}) = \ldots\ldots$

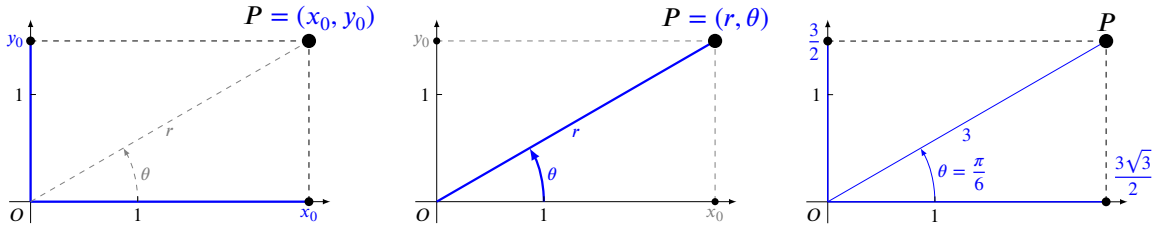
7. $\text{bgtan}(\tan\frac{7\pi}{3}) = \ldots\ldots$

8. $\text{bgtan}(\tan\frac{8\pi}{3}) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Poolcoördinaten

Gewoonlijk gebruiken we in het vlak een koppel *cartesische coördinaten* (x_0, y_0) om het punt aan te duiden dat in een gegeven assenstelsel x_0 *eenheden naar rechts* ligt van de oorsprong en y_0 *eenheden naar boven*. Er zijn echter ook alternatieve manieren om een punt in het vlak te bepalen, en in sommige toepassingen zijn die alternatieven veel handiger. De zogenaamde *poolcoördinaten* leggen een punt vast via een *hoek* en een *afstand*.



Op de eerste tekening zien we de cartesische coördinaten (x_0, y_0) van een punt P. De getallen x_0 en y_0 zijn de lengtes (met een teken) van de loodrechte projecties op respectievelijk de horizontale x-as en de verticale y-as.

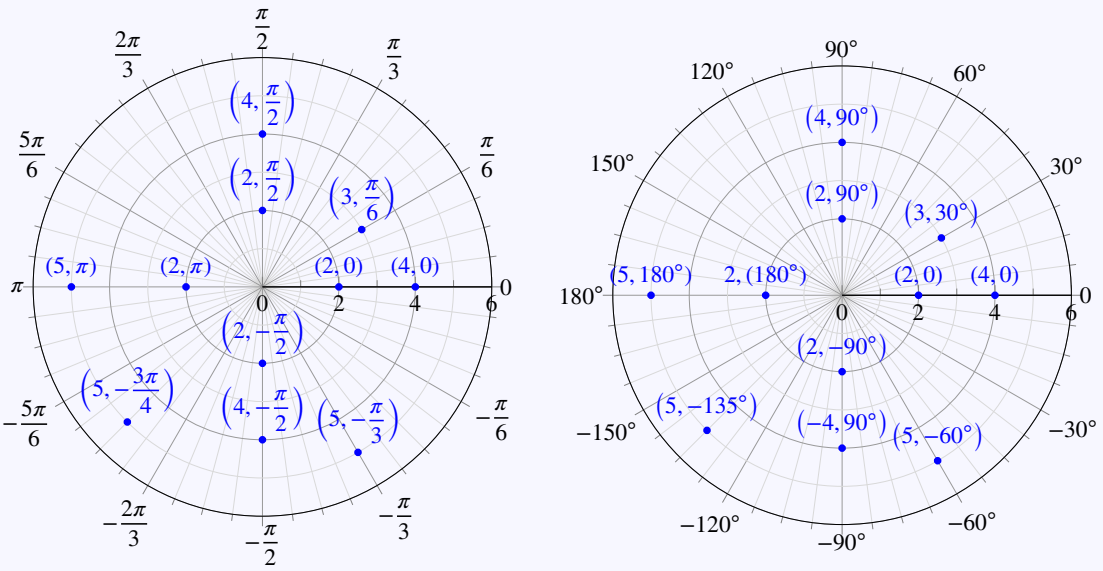
Op de tweede tekening zien we hoe je hetzelfde punt P ook kan vastleggen door de afstand r tot de oorsprong en de hoek θ met de positieve x-as. We noemen (r, θ) *pool*coördinaten van P:

Definitie 4.1.1. Poolcoördinaten van een punt P zijn elk koppel reële getallen (r, θ) waarvoor

- r de afstand is van de oorsprong O tot P (en dus $r \geq 0$)
- θ de grootte is in radialen van de (georiënteerde) hoek tussen de positieve x-as en het lijnstuk OP.

Voor een gegeven punt P ligt de afstand r vast, maar θ is slechts bepaald op een veelvoud van 2π na.

Voorbeeld 4.1.1 (Poolcoördinaten)**.**



Merk op dat de hoek θ steeds moet uitgedrukt zijn in radialen. De rechtse figuur is dus enkel bedoeld

4.1 Poolcoördinaten

als hulp voor wie (nog) niet voldoende vertrouwd is met hoeken uitgedrukt in radialen.

Oefening 4.1.1 (Poolcoördinaten)**.** Bij welk punt op de figuur onderaan horen volgende poolcoördinaten?

1. $(1, \frac{\pi}{6}) = \ldots\ldots$

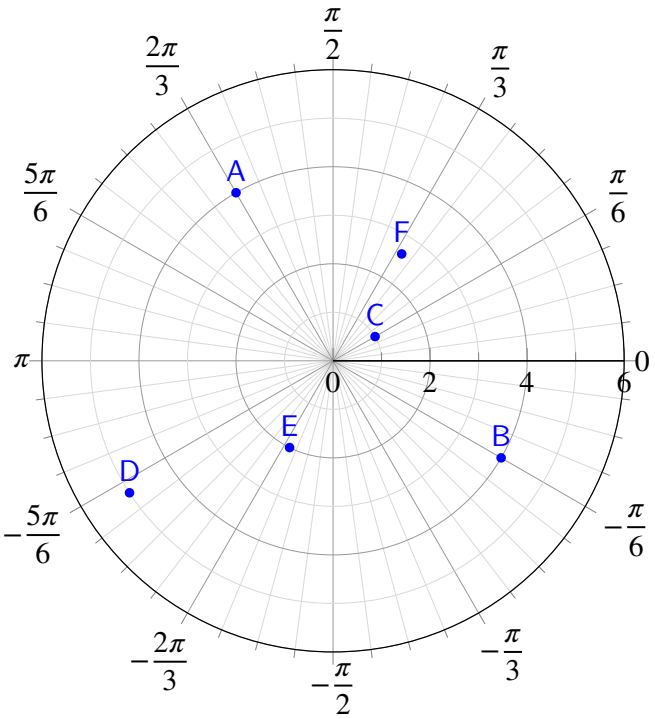
2. $(4, \frac{2\pi}{3}) = \ldots\ldots$

3. $(4, \frac{-\pi}{6}) = \ldots\ldots$

4. $(2, \frac{4\pi}{3}) = \ldots\ldots$

5. $(5, 10) = \ldots\ldots$

6. $(\frac{5\pi}{6}, 1) = \ldots\ldots$



Opmerking 4.1.1.

- Poolcoördinaten van een punt zijn *niet uniek bepaald*: als (r, θ) poolcoördinaten zijn van een punt P, dan zijn alle $(r, \theta + 2k\pi)$ met $k \in \mathbb{Z}$ ook poolcoördinaten van P. Soms spreekt men toch van *de* poolcoördinaten door te eisen dat bv. $\theta \in [0, 2\pi[$.
- De oorsprong heeft nog veel meer poolcoördinaten, namelijk alle koppels $(0, \theta)$ met $\theta \in \mathbb{R}$.
- De *notatie* van poolcoördinaten als een koppel (r, θ) is enigszins dubieus: de uitdrukking 'het punt $(1, \pi)$' is namelijk dubbelzinnig. Inderdaad, afhankelijk of $(1, \pi)$ de cartesische dan wel de poolcoördinaten zijn gaat het om een *ander* punt. Tenzij de precieze betekenis erg duidelijk blijkt uit de context, is het dus aangewezen om steeds te vermelden om *welke soort* coördinaten het gaat: het punt met *cartesische* coördinaten (a, b) of het punt met *pool*coördinaten (a, b).
- Het nut van poolcoördinaten is onder andere dat sommige vergelijkingen eenvoudiger worden in poolcoördinaten dan in cartesische coördinaten. Een duidelijk voorbeeld hiervan is een cirkel met centrum in de oorsprong en straal 2. Dit is een tweedegraadsvergelijking in cartesische coördinaten (x, y), namelijk $x^2 + y^2 = 4$, en een eerstegraadsvergelijking in poolcoördinaten (r, θ), namelijk $r = 2$. Omgekeerd zijn er ook vergelijkingen die eenvoudiger zijn in cartesische

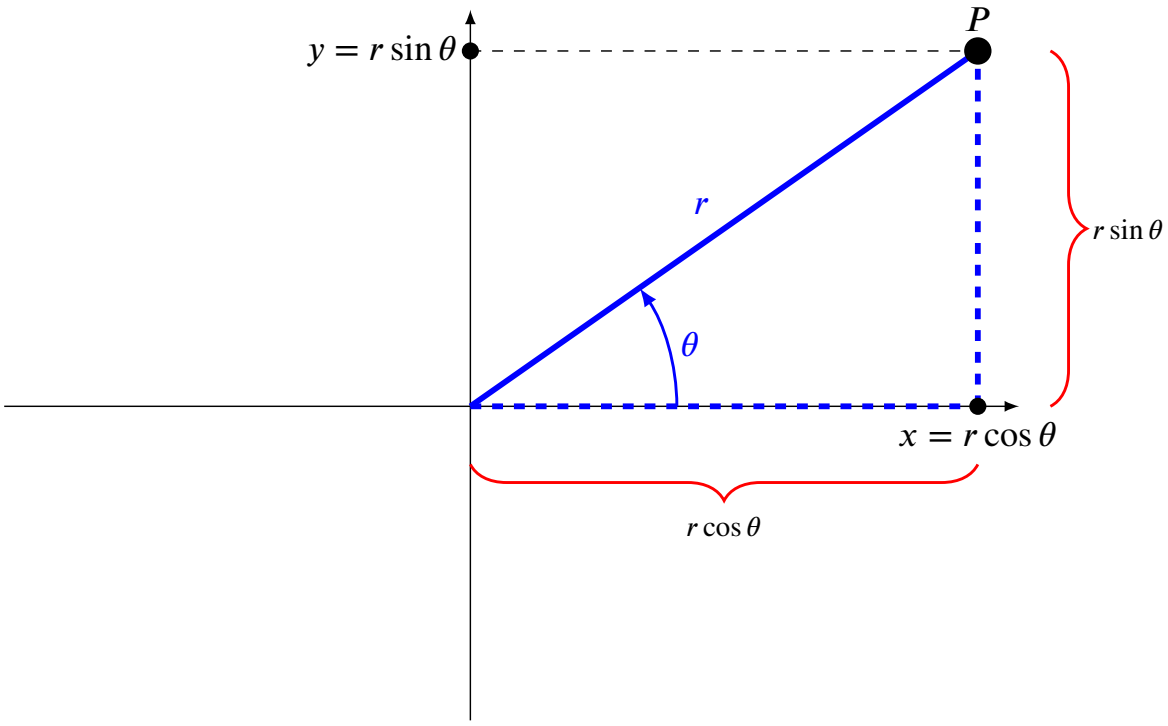
CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Poolcoördinaten

coördinaten, bv. de rechte $x = 2$ (die niet door de oorsprong gaat) heeft een merkwaardige vergelijking in poolcoördinaten.

Als een punt zowel cartesische coördinaten heeft als poolcoördinaten, ligt het voor de hand zich af te vragen of (en hoe) we de ene kunnen omrekenen naar de andere.

- Omrekenen van poolcoördinaten (r, θ) naar cartesische coördinaten (x, y) is eenvoudig: de formules $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$ volgen direct uit de formules van de sinus en de cosinus in de rechthoekige driehoek met hoekpunten $(0,0), (x,0)$ en (x,y).



- Omgekeerd, stel dat cartesische coördinaten (x, y) gegeven zijn, en we willen de poolcoördinaten (r, θ) bepalen. Omdat $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$, vinden we dat $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$, en dus $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Als we $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ invullen in $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$ krijgen we

$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

  Dit stelsel bepaalt ondubbelzinning de hoek θ.

Volgende eigenschap vat dat samen:

Eigenschap 4.1.1 (Transformatieformules cartesische coördinaten en poolcoördinaten)**.**

Een punt P met poolcoördinaten (r, θ) heeft als cartesische coördinaten (x, y):

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Poolcoördinaten

Een punt P met cartesische coördinaten (x, y) heeft poolcoördinaten (r, θ) die voldoen aan:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Voorbeeld 4.1.2.

1. Vind cartesische coördinaten van het punt met poolcoördinaten $(2, \frac{17\pi}{6})$.

Uitwerking: Uit de formule $x = r\cos\theta$ volgt dat $x = 2\cos\frac{17\pi}{6} = 2\cos\frac{5\pi}{6} = -2\frac{\sqrt{3}}{2}$, en uit de formule $y = r\sin\theta$ volgt dat $y = 2\sin\frac{17\pi}{6} = 2\sin\frac{5\pi}{6} = 2\cdot\frac{1}{2}$.

De cartesische coördinaten zijn dus $(-\sqrt{3}, 1)$

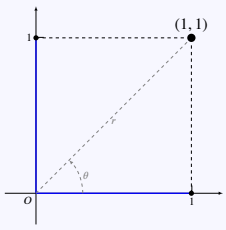
2. Vind poolcoördinaten van het punt met cartesische coördinaten $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$.

Uitwerking: Uit de formule voor r volgt dat $r = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Uit die voor $\cos\theta$ volgt dat $\cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$, dus is $\theta = \frac{2\pi}{3}$ of $\theta = \frac{4\pi}{3}$.
Uit die voor $\sin\theta$ volgt dat $\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dus is $\theta = \frac{\pi}{3}$ of $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

De poolcoördinaten zijn dus $(2\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3})$

De poolcoördinaten van sommige punten kunnen sneller bepaald worden op een tekening.

Voorbeeld 4.1.3 (De hoek θ grafisch zoeken)**.**
De poolcoördinaten van het punt met cartesische coördinaten $(1, 1)$ kunnen snel worden bepaald op een tekening. We zien dan meteen dat $\theta = \frac{\pi}{4}$. r moeten we wel berekenen $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.



Oefening 4.1.2. Omrekenen poolcoördinaten naar cartesische coördinaten.

1. Het punt A met poolcoördinaten $(1, \pi)$ heeft cartesische coördinaten $x = \ldots\ldots$ en $y = \ldots\ldots$

2. Het punt B met poolcoördinaten $(1, \frac{\pi}{2})$ heeft cartesische coördinaten $x = \ldots\ldots$ en $y = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Poolcoördinaten

3. Het punt C met poolcoördinaten $(2, -\frac{\pi}{2})$ heeft cartesische coördinaten $x = \ldots\ldots$ en $y = \ldots\ldots$

4. Het punt D met poolcoördinaten $(2, \frac{\pi}{4})$ heeft cartesische coördinaten $x = \ldots\ldots$ en $y = \ldots\ldots$

Oefening 4.1.3. Omrekenen van cartesische coördinaten naar poolcoördinaten. Kies de hoek θ tussen 0 en 2π.

1. Het punt A met cartesische coördinaten $(-1, -1)$ heeft poolcoördinaten $r = \ldots\ldots$ en $\theta = \ldots\ldots$

2. Het punt B met cartesische coördinaten $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ heeft poolcoördinaten $r = \ldots\ldots$ en $\theta = \ldots\ldots$

Opmerking 4.1.2. Omrekenen tussen cartesische coördinaten en poolcoördinaten.

Omrekenen van (r, θ) naar (x, y) is eenvoudig via $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$.
Omrekenen van (x, y) naar (r, θ) is ook eenvoudig voor r, want $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, maar wat moelijker voor θ.
Het stelsel

$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

bepaalt ondubbelzinnig de hoek θ. Inderdaad, als we zowel de cosinus als de sinus van een hoek kennen, ligt die hoek volledig vast. Hoeken waarvan we de cosinus en de sinus kennen, zoals bijvoorbeeld $\frac{\pi}{3}$ kunnen we met dit stelsel gemakkelijk vinden.

Om dit stelsel in het algemeen op te lossen (voor een punt verschillend van de oorsprong) hebben we echter de cyclometrische functies boogsinus, boogcosinus of boogtangens nodig.

Als $x \neq 0$ kunnen we de tweede vergelijking delen door de eerste (waardoor de vierkantswortel wegvalt) en krijgen we

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{als } x \neq 0$$

Als $x > 0$ dan is θ een hoek in het 1ste of het 4de kwadrant en is dus per definitie van de boogtangens

$$\theta = \text{bgtan}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{als } x > 0$$

Als $x < 0$ dan is θ een hoek in het 2de of het 3de kwadrant en dan geldt

$$\theta = \text{bgtan}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \quad \text{als } x < 0$$

(want $\text{bgtan}\left(\frac{y}{x}\right)$ ligt in het 1ste of het 4de kwadrant en door hier π bij op te tellen komen we in het 2de of 3de kwadrant terecht)

Als $x = 0$, dan ligt het punt (x, y) dus op de y-as en geldt

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{als } x = 0, y > 0$$
$$\theta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{als } x = 0, y < 0$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Poolcoördinaten

Samengevat geeft dit voor θ:

$$\theta = \begin{cases} \text{bgtan}\,\dfrac{y}{x} & \text{als } x > 0 \\ \pi + \text{bgtan}\,\dfrac{y}{x} & \text{als } x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{als } x = 0, y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{als } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

We hernemen een vorig voorbeeld:

Voorbeeld 4.1.4.

1. Vind poolcoördinaten van het punt met cartesische coördinaten $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$.

Uitwerking: $r = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$x < 0$ dus $\theta = \pi + \text{bgtan}\,\dfrac{y}{x} = \pi + \text{bgtan}\,\dfrac{\sqrt{6}}{-\sqrt{2}} = \pi + \text{bgtan}(-\sqrt{3}) = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

De poolcoördinaten zijn dus $(2\sqrt{2}, \dfrac{2\pi}{3})$

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 De logaritme

Veronderstelde voorkennis: machten

We kennen voor een gegeven grondtal a en een gegeven exponent r de *macht* a^r. Zo hoort bij grondtal 3 en exponent 2 de macht $3^2 = 9$ en bij grondtal 2 en exponent 3 de macht $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Bij *logaritmen* keren we de berekening om: we *vertrekken* van een gegeven grondtal a en een gegeven macht a^r en *zoeken* de *exponent* r die hoort bij dat grondtal a om die macht a^r te bekomen. Als de macht geschreven is als a^r kunnen we r natuurlijk gewoon aflezen, maar als de macht is uitgerekend werkt dat niet meer. In het voorbeeld hierboven: we krijgen het grondtal 3 en de macht 9 en we zoeken de exponent r zodat $3^r = 9$. Die is 2 want $3^{\mathbf{2}} = 9$. We noemen die exponent 2 de 3-logaritme van 9, en we noteren die als $\log_3 9$. We hebben dus:

$$\log_3 9 = \mathbf{2} \quad \text{omdat} \quad 3^{\mathbf{2}} = 9 \quad \text{en er geldt dus dat } 3^{\log_3 9} = 9 \text{ en } \log_3 3^2 = 2$$
$$\log_2 8 = \mathbf{3} \quad \text{omdat} \quad 2^{\mathbf{3}} = 8 \quad \text{en er geldt dus dat } 2^{\log_2 8} = 8 \text{ en } \log_2 2^3 = 3$$

Definitie 5.1.1 (Logaritme)**.** De **logaritme** met grondtal a van x, ook de a-logaritme van x genoemd, genoteerd $\log_a x$, is per definitie

de exponent r waartoe men het grondtal a moet verheffen om x als uitkomst te krijgen.

Met symbolen:

$$\log_a x = r \Leftrightarrow a^r = x.$$

Deze definitie is enkel zinvol voor a en x strikt positieve reële getallen met $a \neq 1$ (zie verder) .

Voorbeeld 5.1.1.

Je kan de logaritme $\log_a x$ dus *direct aflezen* als je x als een macht met grondtal a kan schrijven.

1. $\log_2 8 = \log_2 2^{\mathbf{3}} = 3$
2. $\log 1000 = \log 10^{\mathbf{3}} = 3$
3. $\log_4 \frac{1}{4} = \log_4 4^{\mathbf{-1}} = -1$
4. $\log_4 4 = 1$
5. $\log_4 1 = 0$

Opmerking 5.1.1.

- In het secundair onderwijs wordt soms de notatie ${}^a\log x$ gebruikt.
  In de wetenschappen gebruikt men meestal $\log_a x$.
- Net zoals wortels als $\sqrt{4}, \sqrt{25}$ en $\sqrt[3]{8}$ makkelijk te berekenen zijn terwijl je voor $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ of $\sqrt[3]{9}$ een rekentoestel nodig hebt, geldt voor logaritmen dat $\log_2 4, \log_5 25$ en $\log_2 8$ makkelijk te berekenen zijn, terwijl je voor $\log_3 8$ of $\log_5 30$ een rekentoestel nodig hebt.
- Onmiddellijke gevolgen van de definities (met $a > 0$ en $a \neq 1$):

  $$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a^b = b$$
  $$\log_a a = 1 \qquad \log_a \frac{1}{a^b} = -b$$

- De **tiendelige** logaritme $\log x$: het grondtal $a = 10$ komt veel voor omdat we rekenen met het tiendelig talstelsel. We spreken af om het grondtal 10 *weg* te laten: $\log 100 = \log_{10} 100 = 2$. De *tiendelige* logaritme wordt ook wel *Briggse* logaritme genoemd.
- De **natuurlijke** logaritme $\ln x$: een tweede bijzondere grondtal is het *getal van Euler*: $e \approx 2.718281$. Dit getal e neemt binnen de wiskunde een speciale plaats in, net zoals bijvoorbeeld

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 De logaritme

het getal $\pi \approx 3.14159$. De logaritme met grondtal e krijgt een eigen notatie: $\log_e x = \ln x$ en een eigen naam: de 'ln' verwijst naar 'logaritmus naturalis' (dus '*natuurlijke logaritme*'), en wordt soms ook de *Neperse* logaritme genoemd.

Voorbeeld 5.1.2.

1. $\log_3 27 = 3$
2. $\log_5 25 = 2$
3. $\log_5 1 = 0$
4. $\log_4 2 = \frac{1}{2}$

Opmerking 5.1.2. Speciale grondtallen en argumenten waarbij de logaritme niet bestaat:

(a) $\log_1 5$ bestaat niet. Er bestaat immers geen exponent r zodat $1^r = 5$, want 1^r is steeds 1.

(b) $\log_0 5$ bestaat niet. Er bestaat geen exponent r waarvoor geldt dat $0^r = 5$. Positieve machten van 0 zijn 0, negatieve machten van 0 bestaan niet omdat je dan door 0 zou moeten delen, wat niet toegelaten is. Het resterende geval 0^0 is wiskundig onbepaald.

(c) $\log_{-4} 2$ bestaat niet, want er bestaat geen r waarvoor geldt dat $(-4)^r = 2$. Er bestaat zeker geen natuurlijk getal r waarvoor $(-4)^r = 2$, en rationale getallen r zijn problematisch omdat bijvoorbeeld $(-4)^{1/2} = \sqrt{-4}$ niet bestaat.

(d) $\log_2(-4)$ bestaat ook niet, want er bestaat geen r waarvoor geldt dat $2^r = -4$. Inderdaad, machten van 2 zijn altijd positief.

(e) $\log_3 10$ bestaat, maar we kunnen dit niet exact berekenen omdat we het getal 10 niet kunnen schrijven als een macht met grondtal 3. Omdat $3^2 < 10 < 3^3$ kunnen we wel besluiten dat $\log_3 10$ een waarde moet zijn tussen 2 en 3. Met een rekentoestel of computer kunnen we een betere benaderende waarde vinden. Zo is bijvoorbeeld $\log_3 10 \approx 2.0959$, afgerond op 4 decimalen.

We merken dus op dat de definitie van de logaritme $\log_a x$ inderdaad moet beperkt worden:

- we aanvaarden als grondtal a enkel *strikt positieve getallen*
- we aanvaarden als grondtal a niet de waarde 1 (want machten van 1 zijn altijd gelijk aan 1)
- we aanvaarden als argument x enkel *strikt positieve getallen* (want machten met een strikt positief grondtal a zijn altijd strikt positief).

De logaritme $\log_a x$ kan zelf *wel alle reële waarden aannemen* (dus zowel negatief, nul als positief).

Uit de definitie volgt onmiddellijk volgende eigenschap:

Eigenschap 5.1.1 (Basisformules van de logaritme)**.**

Als a, x positieve reële getallen zijn, en $a \neq 1$, dan geldt

$$\log_a a^x = x \quad \text{en} \quad a^{\log_a x} = x$$

In het bijzonder geldt

$$\ln e^x = x \quad \text{en} \quad e^{\ln x} = x \quad \text{en} \quad \log 10^x = x \quad \text{en} \quad 10^{\log x} = x$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 De logaritme

Als we $\log_a a^x = x$ toepassen voor $x = 0$ en $x = 1$ krijgen we

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1$$

Oefening 5.1.1.

Bereken volgende logaritmen (zonder rekenmachine).

1. $\log_3 81 = \ldots\ldots$

2. $\log 100 = \ldots\ldots$

3. $\log 0.01 = \ldots\ldots$

4. $\log_2 64 = \ldots\ldots$

5. $\log_2 128 = \ldots\ldots$

6. $\log_2(4^7) = \ldots\ldots$

7. $\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = \ldots\ldots$

8. $\log_9 3 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.1.A Basisoefeningen logaritmen

5.1.A.1 Niveau 1

Oefening 5.1.2. Bereken indien mogelijk de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Indien de logaritme bestaat maar niet exact berekend kan worden, geef dan de grenzen aan (bv. $\log_3 10$ is een waarde tussen 2 en 3).

1. $\log_3\left(\frac{1}{3^2}\right) = \ldots\ldots$

2. $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \ldots\ldots$

3. $\log_1 1$: $\ldots\ldots$

4. $\log \frac{1}{1000} = \ldots\ldots$

5. $\ln \sqrt[3]{e^2} = \ldots\ldots$

6. $\log_6 1 = \ldots\ldots$

7. $\log_4 8 = \ldots\ldots$

8. $\log_5 10$: $\ldots\ldots$

9. $\log_3(-3)^6 = \ldots\ldots$

10. $\log_{-3}(-3)^6$: $\ldots\ldots$

5.1.A.2 Niveau 2

Oefening 5.1.3. Bereken zonder rekenmachine.

1. $\log_2 64 = \ldots\ldots$

2. $\log_5 125 = \ldots\ldots$

3. $\log_2 \frac{1}{32} = \ldots\ldots$

4. $\log_6(36\sqrt{6}) = \ldots\ldots$

5. $\log 0,00001 = \ldots\ldots$

6. $\log_4\left(\log_4 \sqrt[4]{4}\right) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Rekenregels voor logaritmen

Veronderstelde voorkennis: breuken en machten

Uit de rekenregels voor machten volgen de rekenregels voor logaritmen.

Omdat $x = a^{\log_a x}$ en $y = a^{\log_a y}$ volgt uit de rekenregel voor het product van machten $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ dat

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}) = \log_a(a^{\log_a x + \log_a y}) = \log_a x + \log_a y$$

Op gelijkaardige manier volgt uit de rekenregel voor de macht van een macht $(a^r)^s = a^{s \cdot r}$ dat

$$\log_a(x^r) = \log_a(\left(a^{\log_a x}\right)^r) = \log_a(a^{r \cdot \log_a x}) = r \log_a x$$

en dus in het bijzonder (voor $r = -1$) dat $\log_a \frac{1}{x} = \log_a x^{-1} = -\log_a x$

Omdat $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$, geldt dus ook $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a \left(x \cdot y^{-1}\right) = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y$.

Voor een willekeurige b geldt ook volgend verband tussen $\log_a x$ en $\log_b x$:

$$\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \cdot \log_b a$$

Samengevat wordt dit:

Eigenschap 5.2.1 (Rekenregels logaritmen).

Logaritme van een product: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

of in woorden: *de logaritme van een product is de som van de logaritmen.*

Logaritme van een quotiënt: $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

of in woorden: *de logaritme van een quotiënt is het verschil van de logaritmen.*

Logaritme van een macht: $\log_a(x^s) = s \cdot \log_a x$

of in woorden: *de logaritme zet een macht om in een product.*

Speciaal geval $s = -1$: $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = \log_a x^{-1} = -\log_a x$

Verandering van grondtal: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ of ook $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$

Speciaal geval $b = x$: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Rekenregels voor logaritmen

Voorbeeld 5.2.1.

- $\log_3(7 \cdot y) = \log_3 7 + \log_3 y$
- $\log 500 - \log 5 = \log \dfrac{500}{5} = \log 100 = 2$
- $\log x^{1000} = 1000 \log x$
- $\log_2 17 = \dfrac{\ln 17}{\ln 2}$

Voorbeeld 5.2.2.

1. $\log 4 + \log 25 = \log(4 \cdot 25) = \log(100) = 2$

2. $\log_8 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 8} = \dfrac{2}{3}$

3. $\dfrac{\log 16}{\log 2} = \log_2 16 = 4$

4. $\log_5 125 = \log_5(5 \cdot 25) = \log_5 5 + \log_5 25 = 1 + 2 = 3$.
of ook: $\log_5 125 = \log_5(5^3) = 3$.

5. $\log_2\left(\dfrac{32}{4}\right) = \log_2 32 - \log_2 4 = 5 - 2 = 3$
of ook: $\log_2\left(\dfrac{32}{4}\right) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

6. $\ln e^2 - \ln e = \ln\left(\dfrac{e^2}{e}\right) = \ln e = 1$
of ook: $\ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1$

7. $\log_2 4^5 = 5 \cdot \log_2 4 = 5 \cdot 2 = 10$.
of ook: $\log_2 4^5 = \log_2(2^2)^5 = \log_2 2^{10} = 10$.

Waarschuwing 5.2.1 (Veelgemaakte fouten)**.** Bekijk grondig volgende uitdrukkingen:

1. $\log_5(20 + 5) \neq \log_5 20 + \log_5 5$

2. $\ln(20 + 5) \neq \ln 20 \cdot \ln 5$

3. $\log_5(30 - 5) \neq \dfrac{\log_5 30}{\log_5 5}$

4. $(\log 10)^3 \neq 3 \cdot \log 10$

5. $2 \ln \dfrac{e}{4} \neq \ln \dfrac{e^2}{4}$

In het algemeen kan je dus niet veel doen met de logaritme van een som (of verschil) (zie 1, 2 en 3).

~~$\log(x + y) = \log x + \log y$~~

~~$\log(x + y) = \log x \cdot \log y$~~

~~$\log(x - y) = \dfrac{\log x}{\log y}$~~

~~$(\log x)^n \neq n \cdot \log x$~~

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Rekenregels voor logaritmen

Opmerking 5.2.1 (Logaritmen met rekenmachine)**.**

Eenvoudige rekentoestellen kennen soms enkel de functie 'log()'. Je kan hiermee $\log_{10}(25)$ berekenen maar niet bijvoorbeeld $\log_5(25)$. Je kan echter gebruik maken van de formule om van grondtal te veranderen zodat je $\log_5(25)$ kan bereken als $\dfrac{\log 25}{\log 5}$.

In volgende voorbeelden worden de verschillende rekenregels tegelijk gebruikt:

Voorbeeld 5.2.3. Schrijf de uitdrukking $2 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_3 y + 0.5 \cdot \log_3 z$ als één logaritme:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_3 y + 0.5 \cdot \log_3 z &= \log_3(x^2) - \log_3(y^3) + \log_3(z^{0.5}) \\ &= \log_3(x^2 z^{0.5}) - \log_3(y^3) \\ &= \log_3\left(\frac{x^2 z^{0.5}}{y^3}\right) \\ &= \log_3\left(\frac{x^2\sqrt{z}}{y^3}\right). \end{aligned}$$

Hierbij hebben we eerst de rekenregel voor machten gebruikt, daarna de rekenregel voor product en tenslotte de rekenregel voor quotiënt.

Voorbeeld 5.2.4. Schrijf de uitdrukking $\log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + 2\log_{\frac{1}{5}} z$ als één logaritme:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + 2\log_{\frac{1}{5}} z &= \log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + \log_{\frac{1}{5}}(z^2) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}(xz^2) - \log_{\frac{1}{5}}(yz) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{xz^2}{yz}\right) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{xz}{y}\right). \end{aligned}$$

Opnieuw hebben we gebruik gemaakt van de rekenregel voor machten, de rekenregel voor product en de rekenregel voor quotiënt, in deze volgorde, en tenslotte de breuk binnen de logaritme vereenvoudigd.

Voorbeeld 5.2.5. Bereken de waarde van $\log_2 3 - \log_2 12$ zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Dat kan met behulp van de quotiëntregel:

$$\begin{aligned} \log_2 3 - \log_2 12 &= \log_2\left(\frac{3}{12}\right) = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \log_2(2^{-2}) = -2. \end{aligned}$$

Een alternatieve manier gebruikt de productregel:

$$\begin{aligned} \log_2 3 - \log_2 12 &= \log_2 3 - \log_2(3 \cdot 4) = \log_2 3 - \log_2 3 - \log_2 4 \\ &= -\log_2(2^2) = -2. \end{aligned}$$

Voorbeeld 5.2.6. Als gegeven is dat $\log x = 2.4$ en dat $\log y = -1.1$, bereken dan $\log\left(\sqrt{x} \cdot y^3\right)$.

Dit kan gebeuren op twee manieren.

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Rekenregels voor logaritmen

Eerst gebruiken we de betekenis van de logaritme om x en y te bepalen: $x = 10^{2.4}$ en $y = 10^{-1.1}$. Dan geldt:

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{x}\cdot y^3\right) &= \log\left(\sqrt{10^{2.4}}\cdot(10^{-1.1})^3\right)\\ &= \log\left((10^{2.4/2})\cdot(10^{-1.1\cdot 3})\right)\\ &= \log\left(10^{1.2}\cdot 10^{-3.3}\right)\\ &= \log\left(10^{1.2-3.3}\right)\\ &= \log\left(10^{-2.1}\right) = -2.1.\end{aligned}$$

Anderzijds kunnen we gebruik maken van de rekenregels van logaritmen om de gegeven formule te herschrijven als een uitdrukking in $\log x$ en $\log y$:

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{x}\cdot y^3\right) &= \log\left(x^{0.5}\cdot y^3\right)\\ &= \log(x^{0.5}) + \log(y^3)\\ &= 0.5\cdot\log x + 3\cdot\log y\\ &= 0.5\cdot 2.4 + 3\cdot(-1.1) = 1.2 - 3.3 = -2.1.\end{aligned}$$

Voorbeeld 5.2.7. Herschrijf de uitdrukking $\log_a\sqrt{\frac{yz^2}{ax}}$ in functie van $\log_a x$, $\log_a y$ en $\log_a z$, weer door gebruik te maken van de rekenregels:

$$\begin{aligned}\log_a\sqrt{\frac{yz^2}{ax}} &= \log_a\left(\frac{yz^2}{ax}\right)^{0.5}\\ &= 0.5\log_a\left(\frac{yz^2}{ax}\right)\\ &= 0.5\cdot\left(\log_a(yz^2) - \log_a(ax)\right)\\ &= 0.5\cdot\left(\log_a y + log_a(z^2) - \log_a a - \log_a x\right)\\ &= 0.5\cdot\left(-\log_a x + \log_a y + 2\log_a z - 1\right).\end{aligned}$$

We schrijven eerst de vierkanstwortel als een macht, passen dan de rekenregel voor machten toe, vervolgens de regel voor quotiënt, de regel voor product en nogmaals de regel voor macht.

CC BY-NC-SA 4.0

5.2.A Oefeningen rekenregels logaritmen

Oefening 5.2.1. Zij $a, b, c > 0$. Schrijf in functie van $\log a$, $\log b$ en $\log c$.

1. $\log \dfrac{a}{b^4} = \ldots\ldots$

2. $\log\left(c^3\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right) = \ldots\ldots$

3. $\log \dfrac{a^4bc}{\sqrt{bc^2}} = \ldots\ldots$

Oefening 5.2.2. Schrijf elke uitdrukking in functie van $\log x$, $\log(x-5)$ en $\log(x+1)$.

1. $\log \dfrac{x(x+1)}{x-5} = \ldots\ldots$

2. $\log\left((x+1)^2\sqrt{x-5}\right) = \ldots\ldots$

3. $\log\sqrt{\dfrac{x-5}{x^3(x+1)}} = \ldots\ldots$

4. $\log \dfrac{1}{(x+1)^2} = \ldots\ldots$

Oefening 5.2.3. Schrijf als één logaritme. $(x > 0, y > 0, z > 0)$

1. $2 \cdot \log x - 3 \cdot \log(xy^2) + 5 \cdot \log y = \log \ldots\ldots$

2. $\dfrac{1}{2} \cdot \log_3\left(\dfrac{y}{x}\right) - \log_3\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \log_3 \ldots\ldots$

3. $\log_5(xy) - \log_5(yz) + \log_5(zx) = \log_5 \ldots\ldots$

Oefening 5.2.4. Schrijf elke uitdrukking als één enkele logaritme.

1. $\log(x+1) - \log x^2 + \dfrac{1}{2}\log(x-3) = \ldots\ldots$

2. $3 - \log x = \ldots\ldots$

3. $5\log(x-1) - \dfrac{1}{2}\log(x+3) = \ldots\ldots$

Oefening 5.2.5. Bereken de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Neem zeker pen en papier bij de hand, want je kan ze niet allemaal uit je hoofd uitrekenen.

1. $\log 25 + \log 40 = \ldots\ldots$

2. $\log_3 36 - \log_3 4 = \ldots\ldots$

3. $\log_9 25 - \log_3 15 = \ldots\ldots$

4. $\ln 108 - 2 \cdot \ln 6 + \ln\left(\dfrac{e}{3}\right) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.2.A Oefeningen rekenregels logaritmen

Oefening 5.2.6. Schrijf als één logaritme. Je mag het grondtal zelf kiezen. $(x > 0, y > 0)$

1. $\log_3 x + \log_9 x + \log_{\frac{1}{3}} x = \ldots\ldots$

2. $\log_5(4xy) - \log_{\frac{1}{5}}(4xy) = \ldots\ldots$

Oefening 5.2.7.

1. Schrijf onderstaande uitdrukking in functie van $\log(k-1)$, $\log k$ en $\log(k+1)$.

$$\log\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ldots\ldots$$

Oefening 5.2.8.

1. Zij $a, b, c, d > 0$. Toon aan dat $\log\frac{a}{b} - \log\frac{c}{d} = -\log\frac{b}{d} + \log\frac{a}{c}$

2. Zij $a, b > 0$. Toon aan dat $-\log\frac{2}{a} + \log\frac{2}{b} = -\log\frac{b}{a}$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/22H.49)