KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Voorkennisles 1
WEEK 1

(Versie 2026/09/24H.46)

Inhoudsopgave

1 Start 2.1

2 Elementair Rekenen 2.1

2.1 Haakjes en ontbinden in factoren . . . 2.1

2.2 Breuken . . . 2.3

2.3 Machten . . . 2.9

2.3.1 Machten met gehele exponent . . . 2.9

2.3.2 Machten met rationale exponent . . . 2.10

2.3.3 Machten reële exponent . . . 2.12

2.3.A Herhalingsoefeningen breuken, haakjes, machten . . . 2.13

3 Verzamelingen 3.1

3.1 Verzamelingen . . . 3.1

3.2 Bewerkingen met verzamelingen . . . 3.4

4 Sommatieteken en faculteit 4.1

4.1 Het sommatieteken $\sum$ . . . 4.1

4.2 De faculteit $n!$ . . . 4.5

4.3 Binomiaalgetallen . . . 4.7

5 Rechten en cirkels 5.1

5.1 De vergelijking van een rechte . . . 5.1

5.2 De vergelijking van een cirkel . . . 5.4

6 Veeltermen deel 1 6.1

6.1 Eerstegraadsveeltermen en rechten . . . 6.1

6.2 Tweedegraadsveeltermen en parabolen . . . 6.3

7 Ongelijkheden en absolute waarde 7.1

7.1 Gelijkheden . . . 7.1

7.2 Ongelijkheden . . . 7.3

7.3 Absolute waarde . . . 7.6

2.1 Haakjes en ontbinden in factoren

Optellen $(2+3)$ en vermenigvuldigen $(2\cdot 3)$ zijn de twee basisoperaties met getallen. Bij combinaties zoals $2+3\cdot 5$ wordt om historische redenen eerst vermenigvuldigd en dan opgeteld, dus $2+3\cdot 5 = 2+(3\cdot 5) = 2+15 = 17$. Als je de andere volgorde wil *moet* je haakjes zetten: $(2+3)\cdot 5 = 5\cdot 5 = 25$.

Zeker zodra er ook met letters wordt gerekend, wordt het belangrijk om van sommen producten te kunnen maken, of omgekeerd van producten sommen te kunnen maken:

$2\cdot(a+3) = 2\cdot a + 2\cdot 3 = 2a+6$ product van 2 en $a+3$ wordt som van $2a$ en 6
$2\cdot a+6 = 2\cdot a + 2\cdot 3 = 2\cdot(a+3)$ som van $2a$ en 6 wordt product van 2 en $a+3$

Uitwerken van haakjes betekent *producten* herschrijven als *sommen*, zoals $2(a+b) = 2a+2b$.
Ontbinden in factoren betekent een *som* (of getal) herschrijven als een *product*, zoals $2a^2+6a = 2a(a+3)$.

Voor 'haakjes uitwerken' en 'ontbinden' gelden dezelfde regels, maar ze moeten telkens in de andere richting worden gelezen. Van links naar rechts zeggen ze hoe je een product (of een macht, dat is ook een product) schrijft als een som, maar van rechts naar links gelezen zeggen ze hoe je een som schrijft als een product.

Eigenschap 2.1.1. Zij $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(a+b)c &= ac+bc && \text{(distributiviteit van } \cdot \text{ t.o.v. } +)\\
a(c+d) &= ac+ad && \text{(idem, maar met som rechts)}\\
(a+b)(c+d) &= ac+ad+bc+bd && \text{(want gelijk aan } (a+b)c+(a+b)d)\\
-(a+b) &= -a-b && \text{(want } (-1)(a+b) = (-1)a+(-1)b)\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 && \text{(kwadraat van een tweeterm)}\\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 && \text{(kwadraat van tweeterm via } (a+(-b))^2)\\
(a+b)(a-b) &= a^2-b^2 && \text{(verschil van twee kwadraten)}
\end{aligned}$$

Voor hogere machten gelden volgende formules:

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 && \text{(derdemacht van een tweeterm)}\\
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k && \text{(Binomium van Newton)}\\
a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2) && \text{(som van derdemachten)}\\
a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) && \text{(verschil van derdemachten)}\\
a^n-b^n &= (a-b)(a^{n-1}+ba^{n-2}+b^2a^{n-3}+\cdots+b^{n-2}a+b^{n-1}) && \text{(verschil van } n^{\text{de}} \text{ machten)}\\
a^n+b^n &= (a+b)(a^{n-1}-ba^{n-2}+b^2a^{n-3}-\cdots-b^{n-2}a+b^{n-1}) && \text{(som } n^{\text{de}} \text{ machten, } n \textbf{ oneven})
\end{aligned}$$

Opmerking 2.1.1.

Het Binomium van Newton staat hier enkel als referentie, het wordt verder nog uitgelegd.

Voorbeeld 2.1.1. Vereenvoudig door de haakjes uit te werken. $(x,y,p,q \in \mathbb{R})$

1. $1-(x-y-1) = -x+y+2$

Uitwerking: $1-(x-y-1) = 1-x+y+1 = -x+y+2$

2. $1-(p-q)+p = q+1$

Uitwerking: $1-(p-q)+p = 1-p+q+p = q+1$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Haakjes en ontbinden in factoren

Voorbeeld 2.1.2. Werk de haakjes uit: $(x, y \in \mathbb{R})$

1. $(x+y)(x+3y)^2 = x^3+7x^2y+15xy^2+9y^3$

Uitwerking: $(x+y)(x+3y)^2 = (x+y)(x^2+6xy+9y^2) = x^3+6x^2y+9xy^2+yx^2+6xy^2+9y^3 = x^3+7x^2y+15xy^2+9y^3$

Voorbeeld 2.1.3. Vul aan door de voorgestelde factor buiten de haakjes te brengen, en vereenvoudig zo ver mogelijk. $(p, r, s, x \in \mathbb{R})$

1. $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot \left(4p+5\right)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 &= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^2 \cdot (p+1) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot (p+1) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (1 + 4(p+1)) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (1 + 4p + 4) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (4p+5)\,.
\end{aligned}$$

2. $(3p+2)\frac{4r}{3} - 4r(p-1) = \frac{4r}{3} \cdot (5)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
(3p+2)\frac{4r}{3} - 4r(p-1) &= \frac{4r}{3} \cdot (3p+2) - \frac{4r}{3} \cdot 3 \cdot (p-1) \\
&= \frac{4r}{3}(3p + 2 - 3 \cdot (p-1)) \\
&= \frac{4r}{3}(3p + 2 - 3p + 3) \\
&= \frac{4r}{3} \cdot 5.
\end{aligned}$$

3. $\frac{xs}{8} + \frac{xs^2}{4} + 3x^3s^3 = \frac{xs}{8}(1 + 2s + 24x^2s^2)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\frac{xs}{8} + \frac{xs^2}{4} + 3x^3s^3 &= \frac{xs}{8} \cdot 1 + \frac{xs}{8} \cdot 2s + \frac{xs}{8} \cdot 24x^2s^2 \\
&= \frac{xs}{8}(1 + 2s + 24x^2s^2).
\end{aligned}$$

Voorbeeld 2.1.4. Ontbind in factoren. $(x, y, r \in \mathbb{R})$

1. $81x^2y^2 - 25 = (9xy+5)(9xy-5)$

Uitwerking: $81x^2y^2 - 25 = (9xy)^2 - 5^2 = (9xy+5)(9xy-5)$ (verschil van twee kwadraten)

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

Definitie 2.2.1 (Definitie breuken).

Een **breuk** is een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b}$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en $b \neq 0$.
We noemen a de **teller**, b de **noemer** en de streep tussen beide getallen de **breukstreep**.

Voor reële getallen a, b, c, d met $b \neq 0$ en $d \neq 0$ geldt

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

We noemen $-\frac{a}{b}$ de **tegengestelde breuk** van $\frac{a}{b}$.

Als $a \neq 0$ en $b \neq 0$ noemen we $\frac{b}{a}$ de **omgekeerde breuk** van $\frac{a}{b}$.

Een *breuk* is dus per definitie een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b}$ met $a, b \in \mathbb{R}$, met $b \neq 0$. Wanneer a en b concrete getallen zijn, bijvoorbeeld de breuk $\frac{3}{4}$, dan kunnen we de breuk omzetten naar een kommagetal: $\frac{3}{4} = 0.75$. We zullen hier echter voornamelijk werken met breuken met letters, zoals $\frac{a-b}{x}, \frac{x^2y}{y^3}, \ldots$, met $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ en $x \neq 0,\ y \neq 0$.

Bij de notatie van de tegengestelde breuk van $\frac{a}{b}$ mag je kiezen of je het minteken in de teller, de noemer of voor de gehele breuk plaatst.

Eigenschap 2.2.1 (Mintekens).

Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ geldt: $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

Voorbeeld 2.2.1 (Mintekens).

1. $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$
2. Voor $b \in \mathbb{R}$ met $b \neq 1$ geldt: $-\frac{b+1}{1-b} = \frac{-(b+1)}{1-b} = \frac{-b-1}{1-b} = \frac{b+1}{b-1}$

Waarschuwing 2.2.1 (Veelgemaakte fouten).

Gebruik **haakjes** om een minteken voor een teller of een noemer te plaatsen. Bijvoorbeeld ($a \in \mathbb{R}$):

$$-\frac{a+5}{7} = \frac{-(a+5)}{7} = \frac{-a-5}{7} = \frac{a+5}{-7}.$$

Een vaak gemaakte fout is het minteken enkel voor één term te plaatsen $-\frac{a+5}{7} \neq \frac{-a+5}{7}$.

Omgekeerd geldt ook dat als er één term in de teller een minteken heeft, je dat minteken niet zonder meer voor de hele breuk mag plaatsen ($b \in \mathbb{R}$): $\frac{-2+b}{4} \neq -\frac{2+b}{4}$. Wel geldt dat

$$\frac{-2+b}{4} = \frac{-(2-b)}{4} = -\frac{2-b}{4}$$

Deze opmerkingen gelden evenzeer voor mintekens in de noemer.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

Oefening 2.2.1. Voor $x \in \mathbb{R}$ met $x \neq 1$ geldt: $-\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{x-1}$

Eigenschap 2.2.2. Voor $a, b, k \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ geldt

$$k \cdot \frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{b} \qquad \text{(getal maal breuk)}$$

$$\frac{k \cdot a}{b} = k \cdot \frac{a}{b} \qquad \text{(factor uit teller halen)}$$

Voorbeeld 2.2.2 (Getal maal breuk)**.** $(a, b \in \mathbb{R})$

1. $7 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{3}$
2. $3 \cdot \dfrac{a+5}{7} = \dfrac{3(a+5)}{7} = \dfrac{3a+15}{7}$
3. $\dfrac{-10+5b}{4} = \dfrac{5(-2+b)}{4} = 5 \cdot \dfrac{-2+b}{4}$

Je kan breuken soms **vereenvoudigen** door de teller en de noemer beide te delen door eenzelfde factor, op voorwaarde dat deze factor verschillend is van nul. Meestal wordt in een oefening verwacht dat je een breuk zo eenvoudig mogelijk noteert. Je mag teller en noemer van een breuk ook vermenigvuldigen met eenzelfde factor verschillend van nul. Dit is nuttig om twee breuken op dezelfde noemer zetten.

Eigenschap 2.2.3. Voor $a, b, k \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ en $k \neq 0$ geldt

$$\frac{k \cdot a}{k \cdot b} = \frac{\cancel{k} \cdot a}{\cancel{k} \cdot b} = \frac{a}{b} \qquad \text{(gemeenschappelijke factor } k \text{ wegdelen)}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b} \qquad \text{(met factor } k \text{ vermenigvuldigen)}$$

Voorbeeld 2.2.3 (Vereenvoudigen)**.**

1. $\dfrac{10}{15} = \dfrac{5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \dfrac{2}{3}$
2. $\dfrac{2x}{4} = \dfrac{2 \cdot x}{2 \cdot 2} = \dfrac{x}{2}$
3. Voor $x, y \in \mathbb{R}$ met $y \neq 0$ geldt: $\dfrac{x^2 y}{y^3} = \dfrac{y \cdot x^2}{y \cdot y^2} = \dfrac{x^2}{y^2}$
4. Voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$, $d \neq 0$ geldt: $\dfrac{ab+ac}{ad} = \dfrac{a(b+c)}{ad} = \dfrac{b+c}{d}$
5. Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq b$ geldt: $\dfrac{a^2-b^2}{3a-3b} = \dfrac{(a-b)\cdot(a+b)}{(a-b)\cdot 3} = \dfrac{a+b}{3}$

Waarschuwing 2.2.2 (Veelgemaakte fouten)**.**

Voor willekeurige $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq -1$ kunnen we $\dfrac{a+3}{a+1}$ niet vereenvoudigen, wegens geen gemeen-

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

schappelijke factor in teller en noemer.

$$\frac{a+3}{a+1} \neq \frac{0+3}{0+1}$$
$$\frac{a+3}{a+1} \neq \frac{1+3}{1+1}$$

De eerste gelijkheid geldt wel voor $a = 0$ en de tweede voor $a = 1$, maar de gelijkheden gelden niet voor willekeurige $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq -1$.

Voor willekeurige $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq -\frac{1}{2}$ kunnen we $\frac{2a}{2a+1}$ niet vereenvoudigen:

$$\frac{2a}{2a+1} \neq \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}a+1} = \frac{a}{a+1}.$$

Indien we toch de factor 2 willen weg delen in teller en noemer gebruiken we haakjes:

$$\frac{2a}{2a+1} = \frac{2a}{2\left(a+\frac{1}{2}\right)} = \frac{a}{a+\frac{1}{2}}.$$

Oefening 2.2.2. Vereenvoudig $(p, q \in \mathbb{R}, p \neq q)$.

1. $\frac{p^2-q^2}{p-q} = \ldots\ldots$

Breuken met gelijke noemer kan je **optellen** door de tellers op te tellen. Breuken optellen is dus een som van breuken schrijven als één breuk. Omgekeerd, als de teller van een breuk een som is, kan je de breuk splitsen, wat wil zeggen dat je deze schrijft als een som van 2 breuken.

Definitie 2.2.2 (Som van breuken met gelijke noemer en splitsen van breuken)**.**

Voor $a, b, c \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ geldt

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \text{(breuken optellen, gelijke noemers)}$$
$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \qquad \text{(som in teller splitsen)}$$

Voorbeeld 2.2.4 (Som van breuken met gelijke noemer, splitsen van breuken)**.**

1. $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$

2. Voor $x, y \in \mathbb{R}$ met $y \neq 0$ geldt: $\frac{x-y}{y^2} + \frac{3x+y}{y^2} = \frac{x-y+3x+y}{y^2} = \frac{4x}{y^2}$

3. Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq b$ geldt: $\frac{3a+b^2}{a} = \frac{3a}{a} + \frac{b^2}{a} = 3 + \frac{b^2}{a}$

Waarschuwing 2.2.3 (Veelgemaakte fouten)**.**

Als de noemer van een breuk een som is kan je niet meteen de breuk splitsen. Voor een willekeurige $b \in \mathbb{R}$ met $b \neq -3$ kunnen we niet als volgt splitsen:

$$\frac{2}{b+3} \neq \frac{2}{b} + \frac{2}{3}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

Breuken met verschillende noemer kan je optellen of aftrekken door deze eerst op gelijke noemer te brengen. Je kan als gemeenschappelijke noemer het product van beide noemers nemen.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \quad = \quad \frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd} \quad = \quad \frac{ad+bc}{bd}.$$

Voorbeeld 2.2.5 (Som van breuken met verschillende noemer). $(x, y, a, b \in \mathbb{R}_0)$

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{2\cdot 1}{2\cdot 3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$

2. $\frac{1}{3x}+\frac{2}{y}=\frac{y}{3x\cdot y}+\frac{3x\cdot 2}{3x\cdot y}=\frac{6x+y}{3xy}$

3. $\frac{a+b}{2a}+\frac{a-b}{3b}=\frac{(a+b)3b}{2a\cdot 3b}+\frac{2a(a-b)}{2a\cdot 3b}=\frac{3ab+3b^2}{6ab}+\frac{2a^2-2ab}{6ab}=\frac{2a^2+ab+3b^2}{6ab}$

Oefening 2.2.3.

1. Schrijf $a-\frac{a}{b}$ als één breuk. $(a, b \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0)$

Als gemeenschappelijke noemer het product van beide gegeven noemers nemen is altijd een correcte werkwijze, maar vaak niet de meest efficiënte. Ontbind eerst de noemers zo ver mogelijk in factoren. Bij gehele getallen bedoelen we met ontbinden in factoren het geheel getal schrijven als een product van priemfactoren. Als nieuwe noemer kies je dan het kleinste gemene veelvoud van de noemers. Dit kleinste gemene veelvoud vind je door van elke factor die voorkomt in één van de noemers de hoogste macht te nemen die voorkomt en deze te vermenigvuldigen met elkaar.

Voorbeeld 2.2.6 (Som van breuken met verschillende noemer).

Met behulp van het kleinste gemene veelvoud kan de optelling sneller:

1.

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5}{2^2\cdot 3}+\frac{7}{2\cdot 3^2}=\frac{5\cdot 3}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7\cdot 2}{2^2\cdot 3^2}=\frac{15}{36}+\frac{14}{36}=\frac{29}{36} \quad \text{i.p.v.} \quad \frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 18}{12\cdot 18}+\frac{7\cdot 12}{18\cdot 12}=\frac{174}{216}$$

2. Voor $a, b, k, l, m \in \mathbb{R}$ met $k \neq 0$, $l \neq 0$ en $m \neq 0$:

$$\frac{a}{k\cdot l}+\frac{b}{m\cdot l}=\frac{a\cdot m}{k\cdot l\cdot m}+\frac{b\cdot k}{k\cdot l\cdot m}=\frac{a\cdot m+b\cdot k}{k\cdot l\cdot m} \quad \text{i.p.v.} \quad \frac{a}{k\cdot l}+\frac{b}{m\cdot l}=\frac{a\cdot m\cdot l+b\cdot k\cdot l}{k\cdot l\cdot m\cdot l}=\ldots$$

3. Voor $a, b, k, l \in \mathbb{R}$ met $k \neq 0$ en $l \neq 0$:

$$\frac{a}{k^2\cdot l^2}+\frac{b}{k\cdot l^3}=\frac{a\cdot l}{k^2\cdot l^3}+\frac{b\cdot k}{k^2\cdot l^3}=\frac{a\cdot l+b\cdot k}{k^2\cdot l^3}$$

Breuken **vermenigvuldigen of delen** is eenvoudiger dan optellen of aftrekken. Hiervoor hoef je ze niet eerst op gelijke noemer te brengen.

Definitie 2.2.3.

Voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$, $c \neq 0$ en $d \neq 0$ geldt

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \qquad \text{(vermenigvuldiging)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \overset{\text{def}}{=} \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c} \qquad \text{(deling)}$$

Voorbeeld 2.2.7 (Breuken vermenigvuldigen en delen). $(x, y \in \mathbb{R}_0)$

1. $\frac{2x}{3}\cdot\frac{2}{x} = \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$
2. $\frac{\frac{x}{2}}{\frac{3}{y}} = \frac{x}{2}\cdot\frac{y}{3} = \frac{xy}{6}$

Opmerking 2.2.1 (Breuken van breuken).

In de definitie van deling van breuken gebruiken we breuken van breuken. Voor breuken van breuken is de *grootte* van de verschillende breukstrepen en de precieze *plaats* van de symbolen erg belangrijk. Beide breukstrepen mogen niet even groot zijn want dan is de uitdrukking niet ondubbelzinnig. We schrijven voor de leesbaarheid de grootste breukstreep altijd in het midden van de relevante formule. Dus

$$x = \frac{\frac{1+a}{2}+3}{4+\frac{\frac{1}{5}+a}{6}} \quad \text{maar nooit} \quad x = \cancel{\frac{\frac{1+a}{2}+3}{4+\frac{\frac{1}{5}+a}{6}}}\,.$$

Oefening 2.2.4. Schrijf als één breuk en vereenvoudig zo ver mogelijk $(p, q \in \mathbb{R}_0)$.

1. $\frac{\frac{p+qp}{pq^2}}{\frac{p^2}{q}} = \ldots\ldots$

Eigenschap 2.2.4 (Eenvoudige maar belangrijke gevolgen).

Voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, met $b \neq 0$, $c \neq 0$ geldt

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c} = \frac{a}{c} \qquad \text{(gelijke noemer } \frac{1}{b} \text{ wegdelen)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c} = \frac{a}{b\cdot c} \qquad \text{(breuk gedeeld door getal is maal in noemer)}$$

$$\frac{a}{\frac{c}{d}} = a\cdot\frac{d}{c} = \frac{a\cdot d}{c} \qquad \text{(getal gedeeld door breuk is maal omgekeerde)}$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

Voorbeeld 2.2.8. Vereenvoudig door met slechts één breukstreep te schrijven.($x, y \in \mathbb{R}_0$)

1. $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{y}{2}} = \dfrac{x}{y}$

Uitwerking: $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{y}{2}} = \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{2}{y} = \dfrac{x}{y}$

2. $\dfrac{x+y}{\frac{x}{y}} = \dfrac{(x+y)y}{x}$

Uitwerking: $\dfrac{x+y}{\frac{x}{y}} = (x+y) \cdot \dfrac{y}{x} = \dfrac{(x+y)y}{x}$

3. $\dfrac{\frac{x+y}{x}}{y} = \dfrac{x+y}{xy}$

Uitwerking: $\dfrac{\frac{x+y}{x}}{y} = \dfrac{x+y}{x} \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{x+y}{xy}$

Tot slot nog enkele trucjes die in sommige contexten nuttig kunnen zijn.

Eigenschap 2.2.5 (trucjes). ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ en $d \neq 0$)

$$
\begin{aligned}
a + c &= d \cdot \left(\frac{a}{d} + \frac{c}{d}\right) && \text{(niet bestaande factor buiten haakjes brengen)} \\
a &= \frac{a}{1} && \text{(van 'geen breuk' toch 'breuk' maken)} \\
b &= \frac{1}{1/b} && \text{(van 'geen breuk' toch 'breuk' maken (variant))} \\
a \cdot b &= \frac{a}{1/b} && \text{(van een product een breuk maken)} \\
\frac{a}{b} &= a \cdot \frac{1}{b} && \text{(van een breuk een product maken)}
\end{aligned}
$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Machten

2.3.1 Machten met gehele exponent

Net zoals *vermenigvuldigen* 'herhaald optellen' is: $3 \times 2 \overset{\text{def}}{=} 2+2+2$ en $n \times a = \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n \text{ termen}}$,

is *machtsverheffen* 'herhaald vermenigvuldigen': $2^3 \overset{\text{def}}{=} 2 \cdot 2 \cdot 2$ en $a^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factoren}}$.

Definitie 2.3.1 (Machtsverheffing met reëel grondtal en gehele exponent)**.**
De n-**de macht** van een reëel getal a, met $n \in \mathbb{N}$, genoteerd a^n, is

$$\begin{aligned} a^0 &\overset{\text{def}}{=} 1 && \text{als } a \neq 0 \\ a^n &\overset{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factoren}} && \text{als } n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

We noemen a het **grondtal** en n de **exponent**.
Als a niet nul is, dan definiëren we ook machten met *negatieve* gehele exponenten:

$$a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}.$$

De uitdrukkingen 0^0 en 0^{-n} zijn *onbepaald* en hebben dus *geen betekenis*.

Oefening 2.3.1. Onmiddellijke gevolgen van de definities:

1. $a^1 = a$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.
2. $a^0 = 1$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0$.
3. $0^n = \ldots\ldots$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$, 0^{-n} is niet gedefinieerd voor $n \in \mathbb{N}$.
4. $a^{-1} = \frac{1}{a}$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0$.

Omdat $a^2 = a \cdot a$ en $a^3 = a \cdot a \cdot a$ volgt ook direct dat

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^3 &= (a \cdot a)(a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{2+3} = a^5 \\ (a^2)^3 &= (a \cdot a)^3 = (a \cdot a)(a \cdot a)(a \cdot a) = a^{2 \cdot 3} = a^6 \\ a^3 \cdot b^3 &= (a \cdot a \cdot a)(b \cdot b \cdot b) = (a \cdot b)(a \cdot b)(a \cdot b) = (a \cdot b)^3 \end{aligned}$$

maar een uitdrukking als $a^2 \cdot b^3$ kan je niet schrijven als één macht, wel bijvoorbeeld als $(a \cdot b)^2 \cdot b$:

$$a^2 \cdot b^3 = a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot b = (a \cdot b)^2 \cdot b$$

In het algemeen gelden volgende rekenregels:

Eigenschap 2.3.1 (Rekenregels machten)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Machten

Voor alle $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ en $m, n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\begin{aligned} xa^r + ya^r &= (x+y)a^r && \text{(som van } \textit{gelijke} \text{ machten)} \\ a^m a^n &= a^{m+n} && \text{(product van machten met zelfde grondtal)} \\ (ab)^n &= a^n b^n && \text{(macht van product)} \\ (a^m)^n &= a^{mn} && \text{(macht van een macht)} \end{aligned}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \text{als } a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \text{als } b \neq 0$$

Dezelfde regels gelden voor *gehele* $m, n \in \mathbb{Z}$ zolang het grondtal niet nul is bij negatieve exponenten.

Voorbeeld 2.3.1. Bereken volgende machten.

1. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 2^6 = 64$

2. $\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{4} \cdot 9 = \frac{9}{4}$

2.3.2 Machten met rationale exponent

Als we ons beperken tot positieve grondtallen, kunnen we de machtsverheffing eenvoudig verder veralgemenen: we definiëren eerst $a^{\frac{1}{n}}$, dan $a^{\frac{m}{n}} = a^q$, met $q \in \mathbb{Q}$, en tenslotte vermelden we ook a^r, met $r \in \mathbb{R}$.

Definitie 2.3.2 (n-de machtswortel)**.**

Zij $a \in \mathbb{R}^+$ en $n \in \mathbb{N}_0$.

De macht $a^{\frac{1}{n}}$ met grondtal a en exponent $\frac{1}{n}$ wordt gedefinieerd als het uniek positief reëel getal b ($b \in \mathbb{R}^+$) waarvan de n-de macht gelijk is aan a. In symbolen:

$$b = a^{\frac{1}{n}} \iff b^n = a \,.$$

We noemen $a^{\frac{1}{n}}$ de n-**de machtswortel** uit a en noteren ook

$$\sqrt[n]{a} \overset{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{n}} \,.$$

Voor $n = 2$ noteren we $a^{\frac{1}{2}}$ als $\sqrt{a}$ in plaats van $\sqrt[2]{a}$.

We definiëren voor $a \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}$ ook

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \,.$$

Per definitie is $a^{\frac{m}{n}}$ dus de m-de macht van de n-de machtswortel uit a.

De definitie van $a^{\frac{1}{n}}$ is enkel zinvol als een dergelijk positief reëel getal b *bestaat* en *uniek* is. Precies om

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Machten

dat te garanderen moet de definitie voor **even** n beperkt worden tot *positieve* a en b. Inderdaad, voor negatieve a *bestaat* er immers niet altijd een geschikte b: neem bijvoorbeeld $a=-2$, dan bestaat er geen $b\in\mathbb{R}$ zodat $b^2=-2$. Als het getal b niet beperkt wordt tot de *positieve* getallen, dan is dergelijke b niet *uniek*: neem bijvoorbeeld $a=4$, dan voldoen zowel $b=2$ als $b=-2$ aan $b^2=4$.
Voor **oneven** machtswortels stelt dit probleem zich niet: $\sqrt[3]{8}=8^{\frac{1}{3}}=2$ en $\sqrt[3]{-8}=(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$. Dus als n oneven is definieert de formule $b=a^{\frac{1}{n}} \iff b^n=a$ ook n-de machtswortels van *negatieve* getallen.

Definitie 2.3.3 (Uitbreiding definitie n-de machtswortel)**.**

Zij $a\in\mathbb{R}$ en $n\in\mathbb{N}_0$ en n **oneven**.

De macht $a^{\frac{1}{n}}$ met grondtal a en exponent $\dfrac{1}{n}$ wordt gedefinieerd als het uniek reëel getal b waarvan de n-de macht gelijk is aan a. In symbolen:

$$b=a^{\frac{1}{n}} \iff b^n=a\,.$$

Ook voor machten met rationale exponenten blijven bovenstaande rekenregels gelden. Zo gelden bijvoorbeeld volgende rekenregels voor vierkantswortels, met $x\in\mathbb{R}^+, y\in\mathbb{R}_0^+$.

$$\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}, \qquad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\frac{x}{y}}, \qquad a\sqrt{x}+b\sqrt{x}=(a+b)\sqrt{x}$$

Opmerking 2.3.1.

Onmiddellijke gevolgen van de definities en rekenregels:

- $a^{-\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}=(\sqrt[n]{a})^{-1}$ voor alle $a\in\mathbb{R}_0^+$ en alle $n\in\mathbb{N}_0$
- $\sqrt[n]{a^m}=(a^m)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ voor alle $a\in\mathbb{R}_0^+$, alle $m\in\mathbb{Z}$ en alle $n\in\mathbb{N}_0$
- $\sqrt[n]{a^n}=a^{\frac{n}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a^1=a$ voor alle $a\in\mathbb{R}^+$ en alle $n\in\mathbb{N}_0$

Waarschuwing 2.3.1 (Veelgemaakte fouten)**.**

- $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$
  want bijvoorbeeld $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ en $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$
- $a^{-2}\neq a^{\frac{1}{2}}$
  want bijvoorbeeld $5^{-2}=\dfrac{1}{5^2}=\dfrac{1}{25}$ en $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$
- $\sqrt{(-3)^2}\neq -3$
  want $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$. Voor $a\in\mathbb{R}^+$ geldt wel dat $\sqrt{a^2}=a$.

Voorbeeld 2.3.2. Vereenvoudig volgende machten met rationale exponent (met $x\in\mathbb{R}_0^+$).

1. $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt{64}=8^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{8^2}=8^{\frac{1}{3}}\cdot 8=8^{\frac{1}{3}+1}=8^{\frac{4}{3}}=(\sqrt[3]{8})^4=2^4=16$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Machten

2. $\dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{x} = x^{\frac{3}{4}-1} = x^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$

3. $\left(x^3 \cdot \sqrt[4]{x}\right)^2 = x^6 \cdot \left(\sqrt[4]{x}\right)^2 = x^6 \cdot \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 = x^6 \cdot x^{\frac{2}{4}} = x^{6+\frac{1}{2}} = x^{\frac{13}{2}} = \sqrt{x^{13}}$

Oefening 2.3.2. Vereenvoudig (met $x, y \in \mathbb{R}_0^+$):

1. $\dfrac{4}{\sqrt{8}} = \ldots\ldots$

2. $y^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x^2 y}}{xy}\right)^4 = \ldots\ldots$

3. $\sqrt{48x^9y^4} = \ldots\ldots$

2.3.3 Machten reële exponent

Men kan ook a^r definiëren met $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $r \in \mathbb{R}$ (dus uitdrukkingen zoals $2^{\sqrt{3}}$, $\pi^{\sqrt{5}}$ en $\sqrt{7}^{\sqrt{\pi}}$). We geven de definitie hier niet in detail. We zullen later reële exponenten nodig hebben bij het bestuderen van zogenaamde exponentiële functies zoals $x \mapsto 2^x$.

Ook voor machten met reële exponenten blijven de gebruikelijke rekenregels gelden.

CC BY-NC-SA 4.0

2.3.A Herhalingsoefeningen breuken, haakjes, machten

Oefening 2.3.3. Vul aan. Je mag veronderstellen dat een uitdrukking die in de noemer staat steeds verschilt van 0.

1. $\frac{4x^2}{5} - 3x = 4x \cdot [\dots\dots]$

2. $(p+1)^2 + \frac{(p+1)^3}{2} + \frac{(p+1)^2}{6} = \frac{(p+1)^2}{2} \cdot [\dots\dots]$

3. $\frac{(m+n)}{2} \cdot \frac{m^2}{(m+n)^2} - \frac{m}{2} = \frac{\dots\dots}{2(m+n)}$

4. $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} = \dots\dots \cdot \sqrt{2}$

5. $\frac{4}{q} - \frac{8+q}{2q^2} = \frac{\dots\dots}{2q^2}$

6. $\frac{-8}{2x} + \frac{4}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{\dots\dots}{2x(x-1)^2}$

7. $\left(a^{-1} \cdot b^{-3} \cdot c^2\right)^3 \cdot \left(a^{-2} \cdot b^{-4} \cdot c^3\right)^{-2} = a^{\dots\dots} \cdot b^{\dots\dots} \cdot c^{\dots\dots}$

8. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}\right)^{-1} = \frac{\dots\dots}{x+y^2}$

9. $(a+b)^3 - \left(a^3 + b^3\right) = (a+b) \cdot \dots\dots$

10. $\frac{a+b}{a^2+b^2} - \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{\dots\dots}{a^4-b^4}$

11. $(t-1) \cdot (1+t+t^2) = \dots\dots$

12. $\frac{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2}}{2p-2} = \dots\dots \cdot \frac{1}{p}$

13. $\frac{1}{2 + \frac{1}{2+1}} = \dots\dots$

14. $n^{-1} + n^{-2} + n^{-3} = n^{-3} \cdot (\dots\dots) = \frac{\dots\dots}{n^3}$

15. $x + 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{\dots\dots}{x-1}$

16. $xy^2z^3 + \frac{x^2yz}{2} + \frac{xyz^2w}{3} = xyz \cdot [\dots\dots]$

17. $\frac{3}{q} + \frac{1}{2q} - \frac{2}{4q} = \frac{\dots\dots}{4q} = \frac{\dots\dots}{q}$

18. $\left(\frac{n^4}{m^3} \cdot \frac{m^{-5}}{n^3}\right)^2 = \frac{n^{\dots\dots}}{m^{\dots\dots}}$

19. $\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c} = \frac{\dots\dots}{c(b+c)}$

20. $\frac{x^2z}{2} + zyx + \frac{zy^2}{2} = \frac{x+y}{2} \cdot [\dots\dots]$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3.A Herhalingsoefeningen breuken, haakjes, machten

21. $\left(\frac{-4}{a}\right)^2 + \frac{3}{2a} = \frac{3}{a^2} \cdot [\ldots\ldots]$

22. $a^x \cdot a^{-\frac{2x}{3}} = a^{\ldots\ldots x}$

23. $(k+l+m)^2 = ((k+l)+m)^2 = k^2 + 2kl + l^2 + \ldots\ldots$

24. $\left(-(-x+y)\cdot(-1)^{-3}\right)^2 =$ $\boxed{+(y-x)^2}$ $\boxed{-(y-x)^2}$

25. $\frac{2}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot 3a - \frac{1}{a+1} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\ldots\ldots}{a(a+1)}$

26. $\dfrac{-1}{1 - \dfrac{x+1}{x}} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/24H.46)

3.1 Verzamelingen

Om de verzameling van alle oplossingen van bijvoorbeeld een ongelijkheid te noteren, bekijken we eerst het begrip verzameling van naderbij.

Definitie 3.1.1.

– Een **verzameling** is een grondbegrip in de wiskunde. Volgens een intuïtieve definitie kan men een verzameling beschouwen als een geheel van objecten zodanig dat

- men van *elk* object ondubbelzinnig kan zeggen of het al dan niet tot dat geheel behoort, en
- men elk object ondubbelzinnig kan identificeren. Dit betekent dat men moet kunnen nagaan wanneer twee objecten aan elkaar gelijk zijn en dus in feite hetzelfde object zijn. Als men dat niet zou kunnen, zou immers zelfs het tellen van de elementen al een probleem zijn.

Dit betekent dat een verzameling *enkel* en *volledig* bepaald is door de objecten die ertoe behoren.

Meestal noteren we een verzameling met een hoofdletter, bijvoorbeeld A, B of X. Sommige verzamelingen hebben vaste namen en notaties, zoals de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ of de reële getallen $\mathbb{R}$.

– De objecten die tot een verzameling behoren, noemt men de **elementen** van die verzameling. Ze worden meestal aangeduid met kleine letters $a, b, x, y \ldots$. Als een object a tot een verzameling A behoort noteert men $a \in A$, en men zegt "a is een element van A". Als een object b niet tot A behoort, noteert men $b \notin A$. De verzameling A bestaande uit de elementen a, b en c schrijft men met accolades: $A = \{a, b, c\}$.

– Een **lege verzameling** is een verzameling *zonder elementen*. We noteren ze als $\emptyset \overset{\text{def}}{=} \{\}$.

Voorbeeld 3.1.1 (Voorbeeld)**.**

Alle natuurlijke getallen vormen een verzameling. De getallen 42 en 1302 zijn elementen van die verzameling. De even getallen, de priemgetallen en de delers van 24 vormen telkens een deelverzameling.

Voorbeeld 3.1.2 (Notatie voor concrete verzamelingen)**.**

Een verzameling kan in de praktijk op verschillende manieren genoteerd worden. We geven enkele mogelijkheden:

(a) een **opsomming**: de elementen worden opgesomd tussen accolades.

Voorbeelden:

- $A = \{1, 2, 3\}$.
- $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- $C = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$, waarbij de puntjes 'enzovoorts' betekenen.

(b) een **omschrijving**: de elementen moeten voldoen aan een voorwaarde

Voorbeeld: de vorige verzameling C van de even natuurlijke getallen, kan ook als volgt worden geschreven:

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is deelbaar door } 2\}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

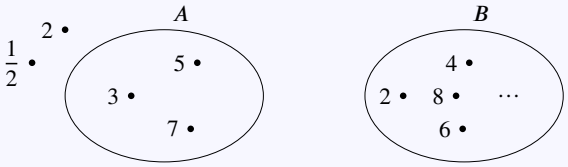
3.1 Verzamelingen

Je leest dit als
"C is de verzameling van de natuurlijke getallen x *waarvoor geldt dat* x deelbaar is door 2".

(c) een **Venndiagram**:

Een *Venndiagram* is een gesloten kromme (de 'verzameling') waarbinnen de elementen van A door stippen worden voorgesteld. Dingen die geen elementen van A zijn krijgen een stip *buiten* de kromme. We tekenen geen stippen *op* de kromme. Niet alle elementen van A moeten worden weergegeven door een stip, maar in dat geval zetten we drie puntjes in de verzameling. De naam van de verzameling wordt meestal buiten de kromme geplaatst.

Voorbeelden: $A = \{3, 5, 7\}$ en $B = \{2, 4, 6, 8, ...\}$



Opmerking 3.1.1.

Sommige veel voorkomende verzamelingen krijgen een speciale notatie:

(a) De getallenverzamelingen hebben een standaardnotatie:

- $\mathbb{N}$ is de verzameling van natuurlijke getallen.
- $\mathbb{Z}$ is de verzameling van gehele getallen.
- $\mathbb{Q}$ is de verzameling van rationale getallen (breuken).
- $\mathbb{R}$ is de verzameling van reële getallen.
- $\mathbb{C}$ is de verzameling van complexe getallen.

(b) De verzameling van de natuurlijke getallen zonder 0:

$$\mathbb{N}_0 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

Op dezelfde manier worden $\mathbb{Z}_0, \mathbb{Q}_0$ en $\mathbb{R}_0$ gedefinieerd.

(c) De verzameling van de (strikt) positieve reële getallen:

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | \ x \geqslant 0\} \quad \text{en} \quad \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} | \ x > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^+ | \ x \neq 0\}.$$

Op dezelfde manier worden $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}^+$ gedefinieerd.

Pas op: Engelstalige handboeken en websites hebben dikwijls een *omgekeerde afspraak*: $\mathbb{N}$ zijn dan de natuurlijke getallen *zonder nul*, en $\mathbb{N}_0$ zijn de natuurlijke getallen *inclusief nul*.

Andere belangrijke voorbeelden van verzamelingen zijn de intervallen:

Definitie 3.1.2 (Intervallen)**.** Voor reële getallen a en b, met $a < b$, definiëren we

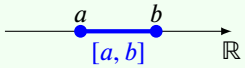
het	**gesloten interval**	$[a, b]$: de getallen tussen a en b met a en b inbegrepen.
het	**open interval**	$]a, b[$: de getallen tussen a en b, met a en b *niet* inbegrepen.
het	**half-open interval**	$[a, b[$: de getallen tussen a en b, met a inbegrepen en b *niet*.
het	**half-open interval**	$]a, b]$: de getallen tussen a en b, met a *niet* inbegrepen en b wel.

CC BY-NC-SA 4.0

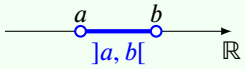
3.1 Verzamelingen

In formules wordt dat:

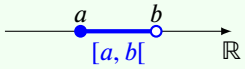
$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{het gesloten interval } [a,b]$$



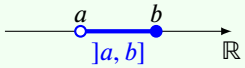
$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad \text{het open interval }]a,b[$$



$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad \text{het half-open interval } [a,b[$$

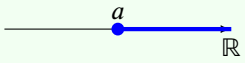


$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad \text{het half-open interval }]a,b]$$

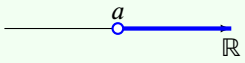


We breiden de notatie ook uit voor halfrechten of 'oneindige intervallen':

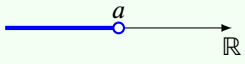
$$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$



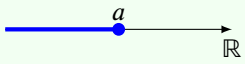
$$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$



$$]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$



$$]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$



$$]-\infty,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$



Merk op dat $+\infty$ en $-\infty$ zelf nooit tot het interval behoren, want $+\infty$ en $-\infty$ zijn geen reële getallen.

CC BY-NC-SA 4.0

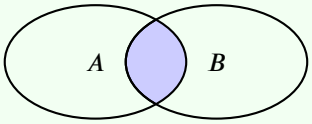
3.2 Bewerkingen met verzamelingen

We kunnen in zekere zin 'rekenen' met verzamelingen. Dit betekent allerlei bewerkingen uitvoeren met verzamelingen.

Met twee verzamelingen A en B kan je op een aantal manieren nieuwe verzamelingen bouwen:

Definitie 3.2.1.

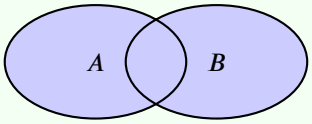
- $A \cap B$, de **doorsnede** van A en B, is de verzameling van elementen die behoren tot A **en** B:



$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$

We noemen twee verzamelingen A en B **disjunct** als $A \cap B = \emptyset$.

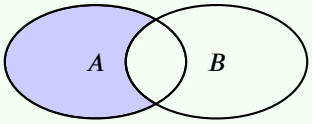
- $A \cup B$, de **unie** of **vereniging** van A en B, is de verzameling van de elementen die behoren tot A **of** B:



$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}$

Als $C = A \cup B$ waarbij $A \cap B = \emptyset$, dan noemt men C de **disjuncte unie** van A en B.

- $A \setminus B$, het **verschil** van A en B, is de verzameling van elementen die behoren tot A maar niet tot B:



$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\}$

Merk op dat in het algemeen $A \setminus B \neq B \setminus A$ en

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\} = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

Oefening 3.2.1. Bepaal volgende verzamelingen.

(a) $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$

(b) $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$

(c) $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$

(d) $\{2,3,4\} \setminus \{1,2,3\} = \{4\}$

(e) $\{1,2,3,4\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3,4\}$

(f) $\{1,2,3,4\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$

(g) $\{1,2,3,4\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$

(h) $\{2,3,4\} \setminus \{1,2,3,4\} = \emptyset$

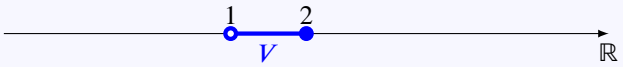
Met $\cap$ en $\cup$ kunnen we ook de unie en doorsnede van intervallen aanduiden:

$$\begin{aligned} [a,b] \cup [c,d] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [a,b] \text{ of } x \in [c,d]\}, \\ [a,b] \cap [c,d] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [a,b] \text{ en } x \in [c,d]\}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 3.2.1 (basisvoorbeelden intervallen)**.**

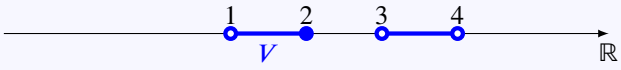
Schrijf volgende verzamelingen telkens als een (unie of doorsnede van) interval(len):

1.

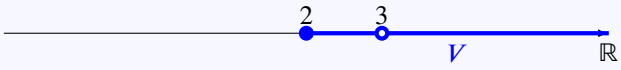


$V =]1,2]$

3.2 Bewerkingen met verzamelingen

2. 

$V =]1,2] \cup]3,4[$

3. 

$V = [2,3[\cup]3,+\infty[$

Voorbeeld 3.2.2 (Unie en doorsnede van intervallen)**.**

(a) $[2,4[\cap]3,5[=]3,4[$

(b) $[2,4[\cup]3,5[= [2,5[$

(c) $[2,4[\setminus]3,5[= [2,3]$

(d) $]3,5[\setminus [2,4[= [4,5[$

(e) $[2,4[\cap [5,6] = \emptyset$

(f) $[2,4[\cup [5,6]$ is geen interval. Zo zit bijvoorbeeld 4.5 niet in deze verzameling.

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Het sommatieteken $\sum$

Een algemene definitie van de sommatie, enigszins abstract geformuleerd, gaat als volgt:

Definitie 4.1.1 (Het sommatieteken)**.**

Voor $n \in \mathbb{N}$ en $a_1, a_2, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ reële getallen definiëren we :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \overset{\text{notatie}}{=} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Deze notatie wordt veralgemeend voor $m, n \in \mathbb{Z}$ met $m \leqslant n$ en $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{n-1}, a_n$ reële getallen:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \overset{\text{notatie}}{=} a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

We lezen $\sum_{k=m}^{n} a_k$ als de som van (de) a_k voor k gaande van m tot en met n.

Men noemt a_k de **algemene term** en k de **sommatie-index**.
Men noemt m de **ondergrens** en n de **bovengrens** van de sommatie.

Men noteert $\sum_{k=m}^{n} a_k$ soms ook als $\sum_{k=m}^{n} a_k$.

Eigenschap 4.1.1 (Eigenschappen sommatie)**.**

(a) $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$ (sommatie over één getal)

(b) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i$ (veranderen van indexnaam)

(c) $\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (veranderen van grenzen)

Voorbeeld 4.1.1.

$$\sum_{i=1}^{10} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + 100$$

$$\sum_{i=0}^{9} (i+1)^2 = (0+1)^2 + (1+1)^2 + (2+1)^2 + \cdots + (9+1)^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + 100 = \sum_{i=1}^{10} i^2$$

$$\sum_{i=-2}^{3} i^3 = (-2)^3 + (-1)^3 + 0 + 1^3 + 2^3 + 3^3 = 27$$

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Het sommatieteken $\sum$

Opmerking 4.1.1.

- Het is steeds van belang niet alleen de algemene term te bekijken, maar ook de begin- en eindgrenzen. Als je nog niet zo vertrouwd bent met het sommatieteken, is het aangewezen om de eerste twee of drie termen en de laatste term expliciet op te schrijven.
- De sommatie-index mag geen andere betekenis hebben in de context.

  Als $k \in \mathbb{R}$, dan is
  $$\sum_{i=1}^{4} k^i = \sum_{j=1}^{4} k^j = k + k^2 + k^3 + k^4$$
  maar
  $$\sum_{k=1}^{4} k^k = 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 \neq \sum_{i=1}^{4} k^i.$$
  Je mag voor $k + k^2 + k^3 + k^4$ *niet* de letter k kiezen als sommatie-index.

Voorbeeld 4.1.2.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{99} i &= 1 + 2 + \cdots + 99 = \sum_{k=1}^{99} k && \text{(hernoem de index)}\\
\sum_{i=1}^{99} 2i &= 2 + 4 + \cdots + 198 \\
&= 2(1 + 2 + \cdots + 99) \\
&= 2 \cdot \sum_{i=1}^{99} i && \text{(factor buitenbrengen)}\\
\sum_{i=1}^{99} 1 &= 1 + 1 + \cdots + 1 = 99 && \text{(constante)}\\
\sum_{j=1}^{4} (a + x_j) &= (a + x_1) + (a + x_2) + (a + x_3) + (a + x_4) \\
&= 4a + \sum_{i=1}^{4} x_i && \text{(herschrijf de sommand)}\\
\sum_{i=1}^{3} i^2 &= 1 + 2^2 + 3^2 = \sum_{i=0}^{2} (i+1)^2 && \text{(herindexeer)}
\end{aligned}$$

Oefening 4.1.1. Bereken volgende sommen:

1. $\sum_{k=1}^{3} k^3 = \ldots\ldots$
2. $\sum_{k=-3}^{3} k^3 = \ldots\ldots$

Oefening 4.1.2. Schrijf volgende sommatie voluit.

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Het sommatieteken $\sum$

1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{4} 2ju_{2j}^2 = \dots\dots$

Om een gegeven som te schrijven met behulp van het sommatieteken $\sum$ moeten we op zoek gaan naar de gemeenschappelijke vorm van de termen. Dat moet leiden tot een formule voor een algemene term, zeg a_k, die bijna altijd afhangt van een zelfgekozen sommatie-index (hier dus k). Vervolgens zoeken we de onder- en bovengrenzen, dit zijn respectievelijk de eerste en de laatste waarde die k moet aannemen opdat a_k precies alle termen van de som doorloopt.

Voorbeeld 4.1.3. Schrijf met een sommatieteken:

1. $\displaystyle\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49} = \sum_{i=4}^{7}\frac{1}{i^2}$

2. $\displaystyle a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4 = \sum_{i=1}^{4} a_ib_i$

3. $\displaystyle\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}x^3+x^4+\frac{\sqrt{5}}{2}x^5+\frac{\sqrt{6}}{2}x^6+\frac{\sqrt{7}}{2}x^7+\sqrt{2}x^8+\frac{3}{2}x^9+\frac{\sqrt{10}}{2}x^{10}+\frac{\sqrt{11}}{2}x^{11}+\sqrt{3}x^{12}.$

Uitwerking: De algemene term is hier $a_k = \dfrac{\sqrt{k}}{2}x^k$.

De ondergrens is dan 1 en de bovengrens 12.

Bovenstaande som kunnen we dus korter opschrijven als

$$\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{k}}{2}x^k.$$

Als de termen van de gegeven som afwisselend positief en negatief zijn, kan je in de algemene term vermenigvuldigen met de factor $(-1)^k$ of $(-1)^{k+1}$. Voor oneven k is $(-1)^k = -1$, dus deze factor in de algemene term vermenigvuldigt alle termen met oneven sommatie-index met -1. Voor even k is $(-1)^{k+1} = -1$, dus deze factor in de algemene term vermenigvuldigt alle termen met even sommatie-index met -1.

Voorbeeld 4.1.4.

1. $1-2+3-4+5-6+7-8+\cdots+129-130.$

Uitwerking: We nemen als ondergrens $k = 1$ en als bovengrens $k = 130$. De termen met een even sommatie-index k zijn negatief (de term voor $k = 2$ is -2, de term voor $k = 4$ is -4, ...). Vermits $(-1)^{k+1}$ gelijk is aan 1 voor oneven k en gelijk aan -1 voor even k, is de algemene term hier $a_k = (-1)^{k+1}k$.

Bovenstaande som kunnen we dus korter opschrijven als

$$\sum_{k=1}^{130}(-1)^{k+1}k.$$

2. $-1+2-3+4-5+6-7+8+\cdots-129+130.$

Uitwerking: We nemen als ondergrens $k = 1$ en als bovengrens $k = 130$. De termen met een oneven sommatie-index k zijn negatief (de term voor $k = 1$ is -1, de term voor $k = 3$ is -3, ...). Vermits $(-1)^k$ gelijk is aan -1 voor oneven k en gelijk aan 1 voor even k, is de algemene term hier $a_k = (-1)^k k$.

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Het sommatieteken $\sum$

Bovenstaande som kunnen we dus korter opschrijven als

$$\sum_{k=1}^{130}(-1)^k k.$$

We bekijken verder de rekenregel van het afzonderen van de eerste of de laatste term. We beginnen met een voorbeeld:

Voorbeeld 4.1.5.

Beschouw de som

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2 + 4 + 8 = 14. \tag{1}$$

Zonderen we hierin de eerste term af, dan bekomen we

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2 + \sum_{k=2}^{3} 2^k,$$

de laatste term afzonderen geeft

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = \sum_{k=1}^{2} 2^k + 8.$$

Oefening 4.1.3 (Vul aan).

1. $\displaystyle\sum_{i=3}^{5} \left(2i^2+3\right) = \sum_{i=3}^{4} \left(2i^2+3\right) + \ldots\ldots$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 + \ldots\ldots$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k^2 = \sum_{k=1}^{2} k^2 + \ldots\ldots$
4. $\displaystyle\sum_{m=2}^{5} 4m = \ldots\ldots + \sum_{m=3}^{5} 4m$

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 De faculteit $n!$

Definitie 4.2.1 (Faculteit). De **faculteit** van een natuurlijk getal $n!$ (lees: n-faculteit) is

$$n! \overset{\text{def}}{=} n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \quad \text{als } n \in \mathbb{N}_0$$

$$0! \overset{\text{def}}{=} 1.$$

We kunnen natuurlijk de volgorde van de factoren omkeren, en ook schrijven:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-2)\cdot (n-1)\cdot n$$

Voorbeeld 4.2.1.

1. $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$
2. $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5\cdot 4! = 120$
3. $\dfrac{100!}{98!} = 9900$

   Uitwerking: $\dfrac{100!}{98!} = \dfrac{100\cdot 99\cdot \cancel{98}\cdot \cancel{97}\cdot \ldots \cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{98}\cdot \cancel{97}\cdot \ldots \cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}$
4. $50\cdot 49\cdot 48\cdot 47 = \dfrac{50!}{46!}$

De voorbeelden illustreren volgende rekenregels voor de faculteitsoperatie:

Eigenschap 4.2.1.

$$n! = n(n-1)! \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

$$(n+1)! = (n+1)n! \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{n!}{p!} = \frac{n(n-1)\ldots(p+1)\cancel{p}\cdot\cancel{(p-1)}\ldots\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{p}\cdot\cancel{(p-1)}\ldots\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}} = n(n-1)\ldots(p+1) \qquad p < n$$

Merk op dat de eerste twee regels precies hetzelfde zeggen namelijk dat de faculteit van een natuurlijk getal gelijk is aan het product van dat getal met de faculteit van het vorige natuurlijke getal.

Opmerking 4.2.1. Je kan geen factor buiten haakjes brengen:

$6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ en $6! = (2\cdot 3)!$,

maar $6! \neq 2\cdot 3! = 2\cdot (3\cdot 2\cdot 1)$

Oefening 4.2.1. Bereken:

1. $\dfrac{10!}{7!} = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{1984!}{1983!} = \ldots\ldots$

Oefening 4.2.2. Vereenvoudig. $(k, n \in \mathbb{N}$ en $k + n \geqslant 2)$

4.2 De faculteit $n!$

1. $\dfrac{(k+1)!}{k!} = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{(k+3)!}{k!} = \ldots\ldots$

Oefening 4.2.3. Vul aan.

1. $(k+1)! + k! = (\ldots\ldots)k!$
2. $\dfrac{1}{(k-1)! \cdot (n+1)!} + \dfrac{1}{k! \cdot n!} = \dfrac{\ldots\ldots}{k! \cdot (n+1)!}$

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Binomiaalgetallen

We definiëren een handige notatie voor getallen die in allerlei contexten opduiken:

Definitie 4.3.1 (Binomiaalgetallen)**.**

Het **binomiaalgetal** n **over** p, genoteerd $\binom{n}{p}$, van twee natuurlijke getallen n en p met $p \leq n$ is

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Opmerking 4.3.1.

(a) Men leest $\binom{n}{p}$ als 'n over p' of als 'n kies p'.
Maar, let hiermee op want ook de breuk $\frac{n}{p}$ wordt soms gelezen als n over p.

(b) Deze getallen komen voor in het Binomium van Newton, en dat verklaart de naam *binomi-aal*getallen.

(c) Deze getallen komen ook voor bij de studie van telproblemen: $\binom{n}{p}$ is precies gelijk aan het aantal *deelverzamelingen* van p elementen uit een verzameling van n elementen. Dat aantal wordt ook genoteerd als C_n^p. Er geldt dus dat (let op de omwisseling van de sub- en superscripts!):

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Voorbeeld 4.3.1 (Basisvoorbeeld)**.**

(a) $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{(\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1})(2 \cdot 1)} = 10 \quad (= C_5^3)$

(b) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \binom{5}{3} = 10$ (zie hierboven)

(c) $\binom{2}{2} = \frac{\cancel{2!}}{\cancel{2!}0!} = 1 \quad (= C_2^2)$ (want $0! = 1$)

(d) $\binom{4}{0} = \frac{\cancel{4!}}{0!\cancel{4!}} = 1 \quad (= C_4^0)$

(e) $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 4 \quad (= C_4^1)$ (want $4! = 4 \cdot 3!$).

Volgende rekenregels kunnen worden afgeleid uit de definitie:

Eigenschap 4.3.1 (Rekenregels binomiaalgetallen)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Binomiaalgetallen

Voor natuurlijke getallen n en p met $p \leq n$ geldt:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} &= \binom{n}{n-p} \\
\binom{n}{0} &= \binom{n}{n} = 1 \\
\binom{n}{1} &= \binom{n}{n-1} = n \qquad n \geq 1 \\
\binom{n+1}{p} &= \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \qquad p \geq 1
\end{aligned}$$

Oefening 4.3.1. Bereken volgende uitdrukkingen.

1. $\binom{5}{1} = \ldots\ldots$
2. $\binom{20}{19} = \ldots\ldots$
3. $\binom{42}{20} - \binom{42}{22} = \ldots\ldots$
4. $\binom{k+1}{k} = \ldots\ldots$

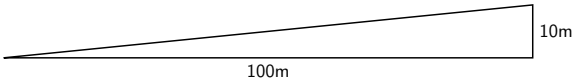
Oefening 4.3.2. Juist of fout?

1. $\binom{2k}{k} = \frac{2}{k!}$ | Juist | Fout |

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 De vergelijking van een rechte

De helling van een rechte is de verticale toename gedeeld door de bijhorende horizontale toename.



$$\text{Helling} = \frac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}} = \frac{10}{100} = 0.1$$

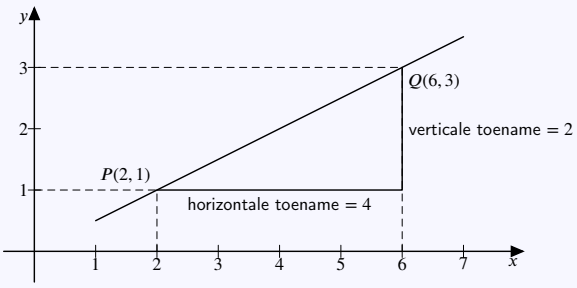
Definitie 5.1.1. De **richtingscoëfficiënt** of **rico** van een rechte is de *helling* van die rechte.

Als de rechte door de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) gaat, is de rico m gelijk aan

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Twee rechten zijn **evenwijdig** als ze dezelfde richtingscoëfficiënt hebben.

Voorbeeld 5.1.1. Bereken de rico van de rechte door de punten $P(2,1)$ en $Q(6,3)$.



De rico van de rechte kan als volgt berekend worden:

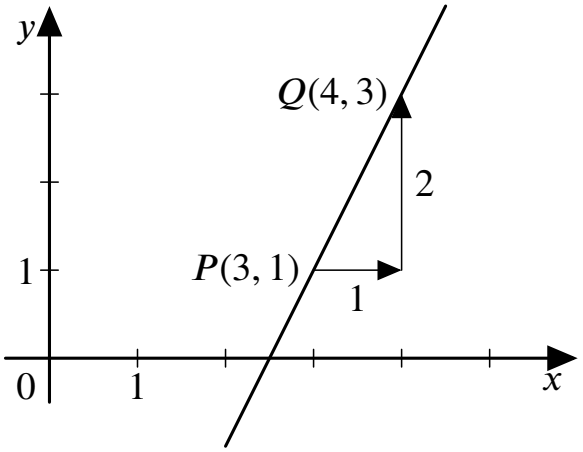
$$\frac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}} = \frac{3-1}{6-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Door twee punten gaat precies één rechte, en een rechte ligt dus volledig vast als je twee punten kent. Een rechte wordt echter ook volledig bepaald door haar rico en één van haar punten. Inderdaad, je kan voor een rechte door het punt $P(3,1)$ met rico $m = 2$ een tweede punt Q construeren.

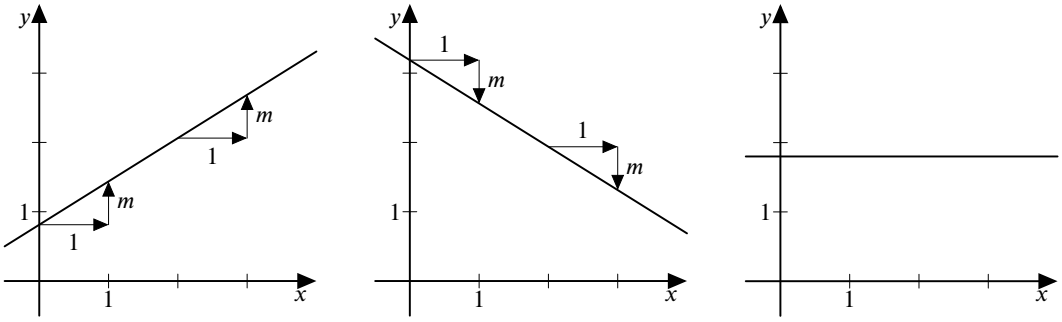
Dat $m = \dfrac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}} = 2$ kan je interpreteren als volgt: indien je één eenheid naar rechts gaat, dan moet je twee eenheden naar boven gaan, wil je op de rechte blijven. We vertrekken vanuit het punt $P(3,1)$. We gaan één eenheid naar rechts, dan zitten we in het punt $P(4,1)$. Ten slotte gaan we m eenheden naar boven. We belanden in het punt $Q(4,3)$. De rechte gaat door $P(3,1)$ en $Q(4,3)$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 De vergelijking van een rechte



Merk op: bij stijgende rechten is $m > 0$ en bij dalende rechten is $m < 0$. Horizontale rechten hebben rico gelijk aan 0, terwijl de rico van verticale rechten niet bestaat.



Voorbeeld 5.1.2. Neem de rechte die door punt $P(3,5)$ gaat en met rico -3. Zoek een ander punt van deze rechte. Tip: maak even een schets om dit te visualiseren.

Vertrek van het punt $P(3,5)$ en ga één eenheid naar rechts en drie eenheden naar beneden. Je komt uit in het punt $(4,2)$. Uiteraard zijn er meerdere mogelijkheden (bijvoorbeeld: $(2,8), (5,-1), \ldots$).

Eigenschap 5.1.1.

- De vergelijking van een niet-verticale rechte kan steeds geschreven worden in de vorm

$$y = mx + q,$$

waarbij m de rico is en q het snijpunt met de y-as.

- De vergelijking van de rechte door het **punt** (x_1, y_1) met **rico** m.

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

- De vergelijking van de rechte door de **twee punten** (x_1, y_1) en (x_2, y_2) met $x_1 \neq x_2$.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

- De vergelijking van een verticale rechte is steeds van de vorm $x = b$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 De vergelijking van een rechte

Oefening 5.1.1. Stel de vergelijking op van de rechte in de vorm $y = mx + q$.

1. rechte door $(2, 5)$ en $(3, 8)$. Antwoord: $y = \ldots\ldots$

2. rechte door $(-5, -2)$ en $(-1, -3)$. Antwoord: $y = \ldots\ldots$

3. rechte door $(0, 0)$ en $(2, 3)$. Antwoord: $y = \ldots\ldots$

4. rechte door $(1, 6)$ met rico -4. Antwoord: $y = \ldots\ldots$

5. rechte door $(0, -1)$ evenwijdig met de rechte $y = 3x + 2$. Antwoord: $y = \ldots\ldots$

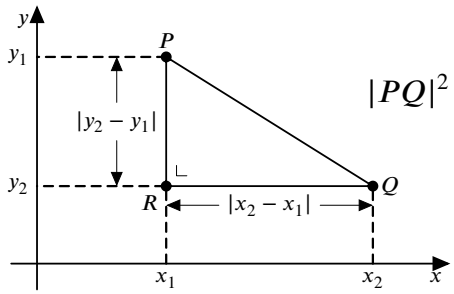
Oefening 5.1.2. Schets alle oplossingen van de vergelijking $x - 2y = -2$

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 De vergelijking van een cirkel

Definitie 5.2.1. We noteren met $|AB|$ de **afstand** tussen twee punten A en B. Er geldt $|AB| = |BA|$.

De stelling van Pythagoras levert een *formule* voor de afstand $|PQ|$ tussen twee punten $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$. Hiervoor construeren we punt R zoals op de tekening , met driehoek PQR rechthoekig in R.



$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= |PR|^2 + |RQ|^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \end{aligned}$$

Eigenschap 5.2.1. De **afstand** tussen punt P met coördinaten (x_1, y_1) en Q met coördinaten (x_2, y_2) is

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

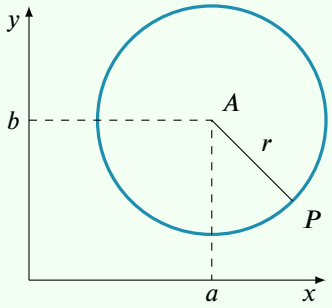
Voorbeeld 5.2.1. De afstand tussen punt P met coördinaten $(2, 3)$ en Q met coördinaten $(-2, -1)$ is

$$|PQ| = \sqrt{((-2) - 2)^2 + ((-1) - 3)^2} = \sqrt{32} \approx 5.66$$

Oefening 5.2.1. De afstand tussen de punten $(-1, 0)$ en $(2, 4)$ is ... ...

Definitie 5.2.2. De **cirkel** met **middelpunt** A en **straal** $r > 0$ is de verzameling van alle punten die op een afstand r van het punt A liggen.

Dus: een punt P ligt op de cirkel met middelpunt A en straal r als en slechts als $|PA| = r$.



De vergelijking van een cirkel is een nodige en voldoende voorwaarde waar de coördinaten van een punt aan moeten voldoen opdat dit punt op de cirkel zou liggen. De voorwaarde $|PA| = r$ is equivalent met

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

waarbij (x, y) de coördinaten zijn van het punt P, en (a, b) de coördinaten van het middelplunt A. Door linkerlid en rechterlid te kwadrateren, bekomen we de vergelijking van de cirkel:

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 De vergelijking van een cirkel

Eigenschap 5.2.2. De cirkel met middelpunt $A : (a, b)$ en straal r heeft als vergelijking

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Voorbeeld 5.2.2. De cirkel met middelpunt $(0, 2)$ en straal 3 heeft als vergelijking

$$(x-0)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

of dus

$$x^2 + (y-2)^2 = 9.$$

Door de kwadraten uit te rekenen krijgen we ook

$$x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$$

Oefening 5.2.2. Ligt $(2, 3)$ op de cirkel met middelpunt $(1, -1)$ en straal 4? | Ja | Nee |

Oefening 5.2.3. Stel de vergelijking op van de cirkel met gegeven middelpunt en straal:

1. middelpunt $(-1, 0)$ en straal 1

2. middelpunt $(5, 2)$ en straal 4

Voorbeeld 5.2.3. Bepaal het middelpunt en de straal van volgende cirkel: $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 20$

Uitwerking: Om aan deze oefening te beginnen moeten we de gegeven vergelijking herschrijven in de vorm $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

We tellen bij beide leden eenzelfde getal op

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 20 + 5$$

zodat we de vergelijking kunnen schrijven als

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$$

Dit is de vergelijking van de cirkel met middelpunt $(-1, 2)$ en straal 5.

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Eerstegraadsveeltermen en rechten

De meest eenvoudige veeltermen zijn die van de *eerste graad*.

Definitie 6.1.1. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$.

- Een **eerstegraadsveelterm in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
$$ax + b$$
- Met deze veelterm kunnen we een **lineaire functie** associëren:
$$f(x) = ax + b$$
- Een **eerstegraadsvergelijking** (of **lineaire vergelijking**) **in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
$$ax + b = 0$$

Voorbeeld 6.1.1.

- $7x + 9$ is een eerstegraadsveelterm (in x).
- $f(x) = 7x + 9$ is een lineaire functie (met variabele x).
- $7x + 9 = 0$ is een lineaire vergelijking (in één onbekende x).

Eigenschap 6.1.1.

Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$. Dan geldt voor de lineaire functie $f(x) = ax + b$:

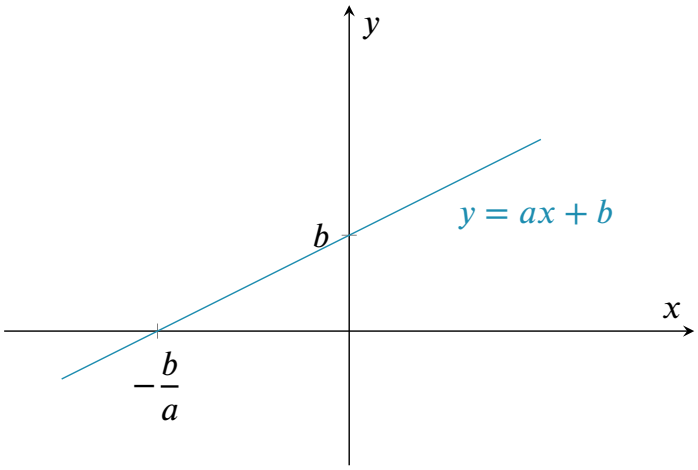
- de grafiek van de functie is een *rechte* met vergelijking $y = ax + b$ en **richtingscoëfficiënt** a.
- als a positief is, is de functie strikt *stijgend* en als a negatief is de functie strikt *dalend*.
- het (enige) snijpunt van de grafiek met de y-as is het punt $(0, b)$.
- het (enige) snijpunt van de grafiek met de x-as is het punt $(-\frac{b}{a}, 0)$. Het getal $-\frac{b}{a}$ is ook het (enige) *nulpunt* van de functie, en de (enige) oplossing van de vergelijking $ax + b = 0$.

Deze informatie vatten we samen in volgend **tekenverloop** (ook *tekentabel*) voor de functie $f(x) = ax + b$

x		$-b/a$	
$ax + b$ met $a > 0$	$-$	0	$+$
$ax + b$ met $a < 0$	$+$	0	$-$

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Eerstegraadsveeltermen en rechten



Opmerking 6.1.1.

- We spreken meestal van *nulpunten* van een functie, *oplossingen* van een vergelijking en *wortels* van veeltermen, maar deze begrippen betekenen hetzelfde.
- als $a = 0$ reduceert de functie zich tot $f(x) = 0x + b = b$, en dat is geen lineaire functie maar een *constante* functie. De grafiek is dan de *horizontale* rechte met vergelijking $y = b$.

Oefening 6.1.1.

1. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $8 - 4x < 0$.

CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Tweedegraadsveeltermen en parabolen

Definitie 6.2.1. Zij $a, b, c \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$.

- Een **tweedegraadsveelterm in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
$$ax^2 + bx + c$$
- Met deze veelterm kunnen we een **(kwadratische) functie** associëren:
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
- Een **tweedegraadsvergelijking** (ook **vierkantsvergelijking** of **kwadratische vergelijking**) **in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Voorbeeld 6.2.1.

- $7x^2 + 2x + 4$ is een tweedegraadsveelterm.
- $f(x) = 7x^2 + 2x + 4$ is een kwadratische functie.
- $7x^2 + 2x + 4 = 0$ is een vierkantsvergelijking.

Eigenschap 6.2.1. Zij $a, b, c \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$. Dan geldt voor de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- de grafiek van de functie is een *parabool* met vergelijking $y = ax^2 + bx + c$.
- als a negatief is, is dat een zogenaamde *bergparabool*, als a positief is, is dat een *dalparabool*.
- de nulpunten van de functie zijn de oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$, en die vinden we met behulp van de **discriminant** $D = b^2 - 4ac$ waarbij geldt dat
  - Als $D > 0$ zijn er **twee verschillende reële** nulpunten.
  - Als $D = 0$ zijn er **twee gelijke reële** nulpunten.
  - Als $D < 0$ zijn er **geen reële** nulpunten
- als $D \geq 0$ worden de nulpunten (of wortels) gegeven door
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{(wortelformule)}$$
- deze nulpunten zijn de snijpunten van de grafiek van de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ met de x-as. Als $D = 0$ is $x_1 = x_2$ en hebben we slechts 1 snijpunt met de x-as.

Deze informatie vatten we samen in volgend **tekenverloop** (tekentabel) voor de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- Als $D > 0$ zijn er **twee verschillende nulpunten** $x_1 < x_2$, en volgend tekenverloop:

x		x_1		x_2	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$	0	$-$	0	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$	0	$+$	0	$-$

CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Tweedegraadsveeltermen en parabolen

- Als $D = 0$ zijn er **twee samenvallende nulpunten** $x_1 = x_2$, en volgend tekenverloop:

x		$x_1 = x_2$	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$	0	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$	0	$-$

- Als $D < 0$ zijn er **geen nulpunten**, en volgend tekenverloop:

x	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$

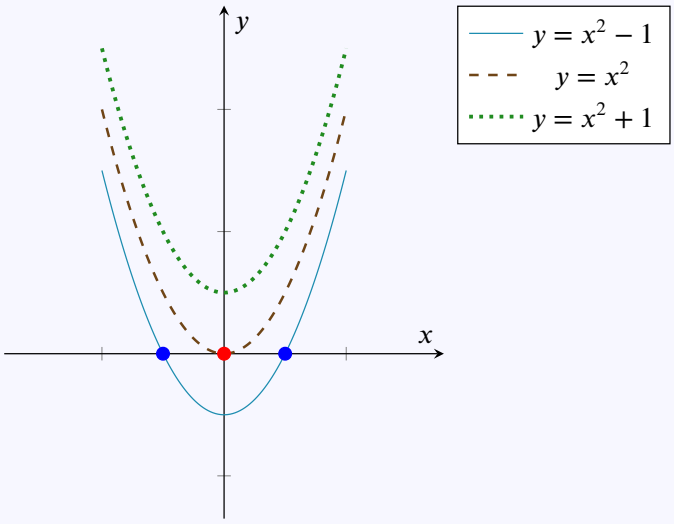
Voorbeeld 6.2.2.

1. Bereken de nulpunten van de functies $f(x) = x^2$, $f(x) = x^2 - 1$ en $f(x) = x^2 + 1$, en maak een tekening.

Uitwerking:

De nulpunten van $f(x) = x^2$ zijn 0 (twee keer, maar aan elkaar gelijk), die van $f(x) = x^2 - 1$ zijn ± 1, en $f(x) = x^2 + 1$ heeft geen reële nulpunten.

De grafieken van de overeenkomstige functies – waarop het aantal nulpunten direct afleesbaar is – zijn de volgende:



Oefening 6.2.1.

1. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $x^2 \geqslant -5x - 6$.

2. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $-2x^2 + 4x - 5 \geqslant 0$.

3. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $yx^2 + x - y = 0$, met $y \in \mathbb{R}_0$.

Eigenschap 6.2.2.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/24H.46)

6.2 Tweedegraadsveeltermen en parabolen

Als x_1 en x_2 de wortels zijn van $ax^2 + bx + c$, dan kunnen we deze veelterm **ontbinden in factoren**:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Oefening 6.2.2.

1. Ontbind $2x^2 + 5x + 3$ in factoren.

CC BY-NC-SA 4.0

7.1 Gelijkheden

Als voorbereiding op het bestuderen van ongelijkheden verdiepen we ons eerst even in het eenvoudigere geval van vergelijkingen. We onderzoeken meer bepaald een specifiek type probleem dat kan optreden bij het oplossen van sommige vergelijkingen en ongelijkheden: het introduceren van 'valse oplossingen'.

Voorbeeld 7.1.1. Beschouw de vergelijking

$$\sqrt{x+2} = x.$$

Het is niet onmiddellijk duidelijk hoe we deze vergelijking met een vierkantswortel kunnen oplossen. Een mogelijkheid is om *de vergelijking te kwadrateren*: als we beide leden van de vergelijking kwadrateren dan verdwijnt de vierkantswortel:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x+2}\right)^2 &= x^2 \\ \Leftrightarrow\ x+2 &= x^2,\end{aligned}$$

en dit is een tweedegraadsvergelijking $x^2 - x - 2 = 0$, waarvan je kan berekenen dat de oplossingen -1 en 2 zijn. Mooi, daarmee hebben we de vergelijking opgelost. Of toch niet ?

Als we $x = 2$ invullen in $\sqrt{x+2} = x$ vinden we $\sqrt{4} = 2$, wat uiteraard klopt. Maar als we $x = -1$ invullen vinden we $\sqrt{1} = -1$. Maar $\sqrt{1}$ is helemaal niet gelijk aan -1, en $x = -1$ is dus *geen* oplossing van $\sqrt{x+2} = x$, ook al was het wel een oplossing van de gekwadrateerde vergelijking.

Hoe kunnen we dit soort problemen voorkomen? Een vergelijking met een vierkantswortel zouden we graag oplossen zoals hierboven, namelijk door de vergelijking te kwadrateren. Kwadrateren introduceert echter mogelijk valse oplossingen, die we met behulp van zogenaamde *bestaansvoorwaarden* en *kwadrateringsvoorwaarden* kunnen uitsluiten. Bij het oplossen van een vergelijking met een vierkantswortel in, moeten we rekening houden met volgende voorwaarden:

- **Bestaansvoorwaarde**: wat onder de vierkantswortel staat moet positief zijn.
- **Kwadrateringsvoorwaarde**: wat gelijk is aan een vierkantswortel moet positief zijn.

Deze voorwaarden zorgen er voor dat je geen valse oplossingen krijgt.

Van waar komt die kwadrateringsvoorwaarde precies? We weten dat als $a = b$, dat dan zeker ook $a^2 = b^2$ (want de kwadraten van twee gelijke getallen zijn natuurlijk ook gelijk aan elkaar). Maar, als $a^2 = b^2$, dan volgt niet noodzakelijk dat $a = b$, want $a^2 = b^2$ geldt ook als $a = -b$. De kwadrateringsvoorwaarde sluit de extra 'valse' oplossing $a = -b$ uit.

Voorbeeld 7.1.2. Herneem vorig voorbeeld:

$$\sqrt{x+2} = x.$$

De **bestaansvoorwaarde** zegt dat wat onder de vierkantswortel staat positief moet zijn, oftewel dat $x + 2 \geq 0$. Dit kunnen we herschrijven als $x \geq -2$. Beide oplossingen van de gekwadrateerde vergelijking (-1 en 2) voldoen aan deze voorwaarde.
De **kwadrateringsvoorwaarde** zegt dat wat gelijk is aan een vierkantswortel positief moet zijn. In dit geval is de vierkanstwortel gelijk aan x, en dus moet $x \geq 0$. Het getal 2 is groter dan nul, en is dan ook een oplossing van de vergelijking $\sqrt{x+2} = x$: het voldoet immers aan beide voorwaarden en is een oplossing van de gekwadrateerde vergelijking. Het getal -1 is echter niet groter dan 0, de kwadrateringsvoorwaarde is niet voldaan, en -1 is inderdaad geen oplossing van $\sqrt{x+2} = x$.

CC BY-NC-SA 4.0

7.1 Gelijkheden

We hebben de situatie nu bekeken voor een specifiek geval. De kwadrateringsvoorwaarde is in het leven geroepen voor het oplossen van vergelijkingen met vierkantswortels, maar bestaansvoorwaarden komen in nog veel andere situaties voor, zoals bijvoorbeeld delen door iets dat nul kan worden.

Opmerking 7.1.1 (Andere voorbeelden van bestaansvoorwaarden)**.**

Bestaansvoorwaarden treden ook op in andere situaties, bijvoorbeeld:

- Het argument van de logaritme moet strikt positief zijn: de uitdrukking $\log x$ heeft enkel zin als $x > 0$.
- Het argument van de tangens mag niet van de vorm $\frac{\pi}{2} + k\pi$ zijn met $k \in \mathbb{Z}$. Dus de uitdrukking $\tan x$ is enkel zinvol voor $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

CC BY-NC-SA 4.0

7.2 Ongelijkheden

Eigenschap 7.2.1 (Basiseigenschappen ongelijkheden)**.** Voor elke $x, y, r \in \mathbb{R}$ geldt

$$\begin{array}{lrcll} & x < y & \iff & x + r < y + r & \text{(plus getal)} \\ \text{Geval } 0 < r: & x < y & \iff & r \cdot x < r \cdot y & \text{(maal positief getal)} \\ \text{Geval } r < 0: & x < y & \iff & r \cdot x > r \cdot y \quad (\text{ of } r \cdot y < r \cdot x) & \text{(maal negatief getal)} \end{array}$$

Opmerking 7.2.1.

- Ongelijkheden kunnen aan elkaar worden gekoppeld:

  $$a < b \leq c \iff a < b \text{ en } b \leq c.$$

  Merk op dat uit beide uitdrukkingen telkens ook volgt dat $a < c$.
- Uitdrukkingen van de vorm $a < b > c$ worden *nooit* gebruikt: je schrijft dan $a < b$ en $c < b$.

Met deze notatie en de basiseigenschappen van de ongelijkheden kunnen we de oplossingsverzameling zoeken van ongelijkheden, namelijk de verzameling alle getallen die voldoen aan de ongelijkheid.

Voorbeeld 7.2.1 (Oplossen van ongelijkheden)**.**

1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $-2x + 3 < 5$.

$$\begin{array}{rcll} -2x + 3 & < & 5 & \\ & \Updownarrow & & (\text{ } -3 \text{ optellen}) \\ -2x & < & 2 & \\ & \Updownarrow & & (\text{ delen door } -2, \text{ ongelijkheid omkeren}) \\ x & > & -1 & (x \text{ is groter dan } -1) \end{array}$$

Dus is de oplossingsverzameling $V =]-1, +\infty[$.

Deze ongelijkheid kan ook opgelost worden door eerst bij beide leden -5 op te tellen

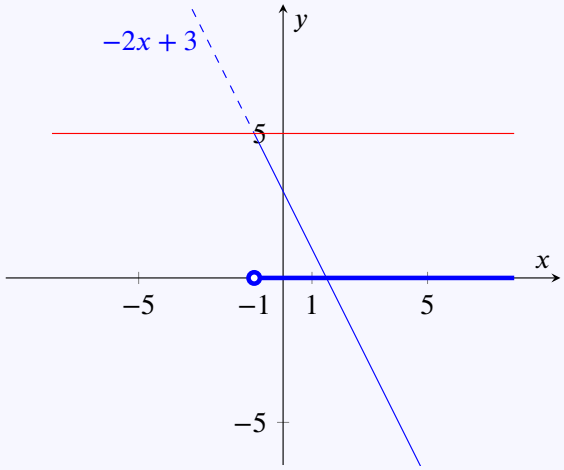
$$-2x - 2 < 0$$

en dan het tekenverloop van de eerstegraadsfunctie $x \mapsto -2x - 2$ te gebruiken:

x		-1	
$-2x-2$	$+$	0	$-$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/24H.46)

7.2 Ongelijkheden

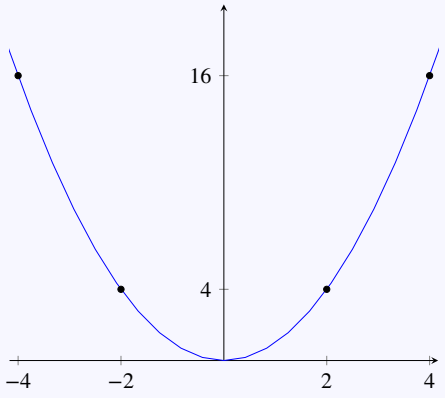


Oefening 7.2.1.

1. Welke reële getallen x voldoen aan $-2x \leq -4$? Oplossingsverzameling: ... ...

Wat gebeurt er als we een functie toepassen op beide leden van een ongelijkheid?

Voorbeeld 7.2.2. We onderzoeken bij wijze van voorbeeld het verband voor de functie $f(x) = x^2$.



Er geldt dan:

$$\begin{array}{rcl} 2 < 4 & \text{en} & 2^2 < 4^2 \\ -4 < -2 & \text{en} & (-4)^2 > (-2)^2 \\ -2 < 4 & \text{en} & (-2)^2 < 4^2 \\ -4 < 2 & \text{en} & (-4)^2 > 2^2 \\ -2 < 2 & \text{en} & (-2)^2 = 2^2 \end{array}$$

Als x en y beide positief zijn, wordt de orde behouden. Als x en y beide negatief zijn, draait de orde om. Als x en y een verschillend teken hebben, kunnen we niets zeggen over de relatie tussen x^2 en y^2: zowel $x^2 < y^2$, $x^2 > y^2$ als $x^2 = y^2$ zijn mogelijk. In dit geval mogen we dus niet kwadrateren.

We kunnen de verschillende gevallen samenvatten als

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq x < y & \Longrightarrow & x^2 < y^2 \\ x < y \leq 0 & \Longrightarrow & x^2 > y^2 \\ x < 0 < y & \Longrightarrow & \text{zowel } x^2 \leq y^2 \text{ als } x^2 \geq y^2 \text{ zijn mogelijk} \end{array}$$

CC BY-NC-SA 4.0

7.2 Ongelijkheden

Dit voorbeeld toont aan dat je erg moet opletten bij het al dan niet behouden blijven van ongelijkheden.

Definitie 7.2.1. Zij f een reële functie op een interval I. Dan geldt:

$$\begin{array}{rcl} f \text{ is strikt stijgend op } I & \iff & \text{voor alle } x,y \in I : (x<y \implies f(x)<f(y)) \\ f \text{ is strikt dalend op } I & \iff & \text{voor alle } x,y \in I : (x<y \implies f(x)>f(y)) \end{array}$$

Dus, als je *weet* dat een bepaalde functie stijgt (omdat je de grafiek kent), dan weet je ook dat $f(x) < f(y)$ van zodra $x < y$.

Voorbeeld 7.2.3.

1. De functie $f : x \mapsto 2x+3$ is stijgend, en dus is $f(2) < f(4)$.
2. De functie $f : x \mapsto -2x+3$ is dalend, en dus is $f(2) > f(4)$.
3. De functie $f : x \mapsto x^2$ is stijgend op het interval $[0,10]$, en dus is $f(2) < f(4)$.
4. De functie $f : x \mapsto x^2$ is dalend op het interval $[-10,0]$, en dus is $f(-4) > f(-2)$.
5. De functie $f : x \mapsto \sqrt{x}$ is stijgend op het interval $[0,+\infty[$ en dus is $f(2) < f(4)$.

Oefening 7.2.2. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid

1. $2 < \sqrt{x} \iff x \in$ | $]4,+\infty[$ | $]-4,+\infty[$ | $[0,+\infty[$ | $[0,4[$ | geen oplossingen |
2. $-2 < \sqrt{x} \iff x \in$ | $]4,+\infty[$ | $]-4,+\infty[$ | $[0,+\infty[$ | $[0,4[$ | geen oplossingen |
3. $2 < -\sqrt{x} \iff x \in$ | $]4,+\infty[$ | $]-4,+\infty[$ | $[0,+\infty[$ | $[0,4[$ | geen oplossingen |
4. $-2 < -\sqrt{x} \iff x \in$ | $]4,+\infty[$ | $]-4,+\infty[$ | $[0,+\infty[$ | $[0,4[$ | geen oplossingen |

Voorbeeld 7.2.4. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x-1} > 3$.

De uitdrukking onder het wortelteken moet positief zijn, anders heeft de opgave geen betekenis. Dit is de bestaansvoorwaarde:

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1\,.$$

We mogen kwadrateren omdat beide leden van de ongelijkheid positief zijn en de orde blijft bewaard. We krijgen dan $x - 1 > 9$.

Omdat $x - 1 > 9$ overeenstemt met $x > 10$, is aan de bestaansvoorwaarde $(x \geq 1)$ zeker voldaan.

De oplossingsverzameling is dus $V =]10,+\infty[$.

CC BY-NC-SA 4.0

7.3 Absolute waarde en ongelijkheden

Eigenschap 7.3.1 (Basiseigenschap absolute waarde)**.** Als $x, a \in \mathbb{R}$ en $r \in \mathbb{R}_0^+$, dan is

$$|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$$

Opmerking 7.3.1.

- Met deze eigenschappen kan je dus één ongelijkheid *met* een absolute waarde omzetten in een *dubbele* ongelijkheid *zonder* absolute waarde.
- Deze eigenschappen kunnen ook met $\leq$ geformuleerd worden, bijvoorbeeld

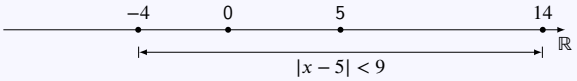
$$|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r \Leftrightarrow x \in [-r, r]$$

Oefening 7.3.1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\left|\frac{2x}{3}\right| < 1$. Oplossingsverzameling: ... ...

Voorbeeld 7.3.1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|x-5| < 9$.

$$\begin{array}{rcll} |x-5| & < & 9 & \text{(de afstand tussen } x \text{ en } 5 \text{ is kleiner dan } 9) \\ & \Updownarrow & & (|x-a| < r \iff -r < x-a < r) \\ -9 < & x-5 & < 9 & (x-5 \text{ ligt tussen } -9 \text{ en } 9) \\ & \Updownarrow & & (+5 \text{ optellen}) \\ -4 < & x & < 14 & (x \text{ ligt tussen } -4 \text{ en } 14) \end{array}$$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-4, 14[$.



Oefening 7.3.2.

1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|2x-5| < 9$. Oplossingsverzameling: ... ...
2. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|3-2x| < 1$. Oplossingsverzameling: ... ...
3. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|x^2-3| < 9$. Oplossingsverzameling: ... ...

CC BY-NC-SA 4.0