KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Voorbereiding
Week 4
Oefenzitting 2

(Versie 2026/09/26H.13)

Inhoudsopgave

1 Quiz Week 4 Oefenzitting 2 1.1

1.1 Quiz Week 4 Oefenzitting 2 . . . . . 1.1

2 Berekening afgeleiden 2.1

2.1 Basisregels 2.1

2.2 Afgeleiden trancendente functies 2.4

2.3 Product- en quotiëntregel 2.5

2.4 Kettingregel 2.7

2.5 Hogere orde afgeleiden 2.11

2.5.A Basisoefeningen afgeleiden 2.12

2.5.B Oefeningen hogere orde afgeleiden 2.15

1.1 Quiz Week 4 Oefenzitting 2

1.1 Quiz Week 4 Oefenzitting 2

Oefening 1.1.1. Bereken volgende afgeleiden:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7^2) = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^7) = \ldots\ldots$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7^x) = \ldots\ldots$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^4 \cdot \ln x\right) = \ldots\ldots$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \cdot \ln x \cdot \sin x) = \ldots\ldots$
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\ln x}{\sin x} = \ldots\ldots$
7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^2 x = \ldots\ldots$
8. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x^2) = \ldots\ldots$
9. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^3(4x^2 - 7) = \ldots\ldots$

Oefening 1.1.2.

1. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie

$$f(x) = \ln g(x).$$

in termen van de functie g en de afgeleide functie g'.

$\ldots\ldots$

2. Bereken de tweede afgeleide: $\frac{d^2}{dx^2}(\mathrm{bgsin}\, x + x) = \ldots\ldots$.

3. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van de functie $f(x) = 4x^{-4} - 1$ in het punt met x-coördinaat 1. $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Basisregels

De meest eenvoudige regels voor het berekenen van afgeleiden gaan over afgeleiden van machten, sommen en scalaire veelvouden.

Eigenschap 2.1.1 (Basisregels voor afgeleiden)**.**

De afgeleide van constante en machtsfunctie $x \mapsto c$ en $x \mapsto x^r$ (met $c, r \in \mathbb{R}$) zijn:

$$(x^r)' = rx^{r-1} \qquad (c)' = 0$$

Dezelfde regel kan geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^r) = rx^{r-1} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c = 0$$

Merk op dat de machtregel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^r) = rx^{r-1}$ niet alleen geldt voor natuurlijke getallen r als exponent, maar voor *alle* exponenten $r \in \mathbb{R}$.

Opmerking 2.1.1. We begrijpen deze regels als volgt:

- de afgeleide van een constante functie $x \mapsto c$ is de nulfunctie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5+\sqrt{2}) = 0$
- de identieke functie $x \mapsto x$ is de functie $x \mapsto x^r$ met $r = 1$, dus de afgeleide functie van de identieke functie is de functie $x \mapsto 1x^0$, wat de constante functie $x \mapsto 1$ is.

Oefening 2.1.1.

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7) = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\pi^2) = \ldots\ldots$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = \ldots\ldots$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3) = \ldots\ldots$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{n+42}) = \ldots\ldots$
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\pi) = \ldots\ldots$

Voorbeeld 2.1.1. Berekening afgeleiden van rationale machten:

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-2}) = (-2)\cdot x^{-2-1} = -2x^{-3}$

(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-42}) = (-42)\cdot x^{-42-1} = -42x^{-43}$

(c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}\cdot x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Oefening 2.1.2. Bereken volgende afgeleiden:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-1/2}) = \ldots\ldots$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{\sqrt{x}}) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Basisregels

Er zijn ook eenvoudige regels voor de som en scalaire veelvouden:

Eigenschap 2.1.2 (Lineariteit van afleiden)**.** De afgeleide van de som $f+g$ en het scalair veelvoud cf van afleidbare functies f en g (met $c \in \mathbb{R}$) wordt gegeven door:

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g'$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cf) = c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g$$

Voorbeeld 2.1.2. We begrijpen deze regels als volgt:

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x) = 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 5 \cdot 1 = 5$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7+5x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}7 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x) = 0 + 5 = 5$

Oefening 2.1.3.

1. $(7x)' = \ldots\ldots$
2. $(7x^2)' = \ldots\ldots$
3. $(7x+1)' = \ldots\ldots$
4. $(7x^2+7x)' = \ldots\ldots$
5. $(x(x+1))' = \ldots\ldots$

Met deze beperkte set van regels kunnen de afgeleiden van *alle* veeltermen berekend worden.

Oefening 2.1.4. Bereken volgende afgeleiden van veeltermen:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2) = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2) \overset{\text{(somregel)}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 \overset{\text{(rekenregels)}}{=} 0 + 1 + 2x = 1 + 2x$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3) = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3 = 0 + 1 + 2x + 3x^2 = 1 + 2x + 3x^2$

Maar je kan ook het resultaat van vorige oefening gebruiken: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3 = 1 + 2x + 3x^2$

En je kan dit antwoord ook in één keer opschrijven, door term per term af te leiden: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3) = (0+)1 + 2x + 3x^2$

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3+x^4) = \ldots\ldots$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+2x^2+3x^3+4x^4) = \ldots\ldots$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(17+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Basisregels

Uitwerking: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(17 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3) = 0 + 1 + \frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = 1 + x + x^2$

6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{\pi} + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4) = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{\pi} + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4) = 0 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot 2x + \frac{1}{3!} \cdot 3x^2 + \frac{1}{4!} \cdot 4x^3 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{1}{3 \cdot 2!} \cdot 3x^2 + \frac{1}{4 \cdot 3!} \cdot 4x^3 = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$

Oefening 2.1.5. Bereken volgende afgeleiden

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x^2 + 8x + 9) = \ldots\ldots$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x^2 + 8x + 3^2) = \ldots\ldots$

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((2x)^2 + 8x + 3^2) = \ldots\ldots$

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x(x + 2) + 3^2) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Afgeleiden trancendente functies

Eigenschap 2.2.1 (Afgeleiden exponentiële en logaritmische functies (met $a \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1$)).

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \ln a$$
$$(\ln x)' = 1/x \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = e^x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = a^x \ln a$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

Voorbeeld 2.2.1.
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7^x) = 7^x \ln 7$. Verwar dit niet met $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^7) = 7x^6$

Oefening 2.2.1. Bereken de afgeleiden van volgende exponentiële en logaritmische functies.

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\pi^x) = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(25 \cdot 7^x) = \ldots\ldots$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((a+7)^x) = \ldots\ldots$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \ldots\ldots$

Eigenschap 2.2.2 (Afgeleiden goniometrische, cyclometrische en hyperbolische functies).

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$
$$(\mathrm{bgsin}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\mathrm{bgcos}\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\mathrm{bgtan}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\sinh x)' = \cosh x \qquad (\cosh x)' = \sinh x$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie.

Opmerking 2.2.1. Omdat $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ kan men ook schrijven dat

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

en dat is soms handig omdat het de afgeleide van de tangens terug schrijft in functie van een tangens.

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Product- en quotiëntregel

Eigenschap 2.3.1 (Productregel en quotiëntregel)**.**

De afgeleide van het product $f \cdot g$ en het quotiënt $\frac{f}{g}$ van twee afleidbare functies f en g wordt gegeven door:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \textbf{(productregel)} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \textbf{(quotiëntregel)}$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \cdot g) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g + f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \quad \textbf{(productregel)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g - f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}{g^2} \quad \textbf{(quotiëntregel)}$$

Voorbeeld 2.3.1. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto x^4 \ln x$.

We zoeken de afgeleide van het product van x^4 en $\ln x$, dus we gebruiken de productregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^4 \cdot \ln x\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^4\right) \cdot \ln x + x^4 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) \\ &= 4x^3 \cdot \ln x + x^4 \cdot \frac{1}{x} = x^3(4 \ln x + 1).\end{aligned}$$

Voorbeeld 2.3.2. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \frac{2x+3}{4x+5}$.

We zoeken de afgeleide van het quotiënt van $2x+3$ en $4x+5$, dus we gebruiken de quotiëntregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{2x+3}{4x+5} &= \frac{2(4x+5) - 4(2x+3)}{(4x+5)^2} \\ &= \frac{8x + 10 - 8x - 12}{(4x+5)^2} = \frac{-2}{(4x+5)^2}\end{aligned}$$

Voorbeeld 2.3.3. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \frac{\ln x}{\sin x}$.

We zoeken de afgeleide van het quotiënt van $\ln x$ en $\sin x$, dus we gebruiken de quotiëntregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln x}{\sin x}\right) &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) \cdot \sin x - \ln x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\frac{\sin x}{x} - \ln x \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{1}{x \sin x} - \frac{\ln x \cos x}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

Oefening 2.3.1.

1. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (x^3 + 27)(x^4 - 1)$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Product- en quotiëntregel

2. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$

3. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (x^{42} + x^{13} + 1)(x^{2020} - 1)$

Eigenschap 2.3.2. De formule voor product kan je veralgemenen naar een product van meerdere factoren:

$$\begin{aligned}(f \cdot g \cdot h)' &= (f \cdot (g \cdot h))' \\ &= f' \cdot (g \cdot h) + f \cdot (g \cdot h)' \\ &= f' \cdot (g \cdot h) + f \cdot (g' \cdot h + g \cdot h') \\ &= f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'\end{aligned}$$

Dus: leid *elke* factor af, vermenigvuldig die afgeleide met de andere factoren en tel al de producten op.

Voorbeeld 2.3.4. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto x \cdot \ln x \cdot \sin x$.

We zoeken de afgeleide van het product van x,$\ln x$ en $\sin x$, dus we gebruiken de productregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \cdot \ln x \cdot \sin x) &= (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x)(\ln x \cdot \sin x) + (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x)(x \cdot \sin x) + (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x)(x \cdot \ln x) \\ &= \ln x \sin x + \sin x + x \ln x \cos x.\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Kettingregel

De zogenaamde *kettingregel* laat toe om de afgeleide te berekenen van *samengestelde* functies.

Eigenschap 2.4.1 (Kettingregel)**.**

De *afgeleide van de samenstelling* van twee afleidbare functies f en g is gelijk aan:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \textbf{(kettingregel)}$$

Dezelfde kettingregel kan ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) \quad \textbf{(kettingregel)}$$

Opmerking 2.4.1. We hebben in de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie de afgeleide van f toch genoteerd als f' om de notatie eenvoudig te houden. De kettingregel kan ook geformuleerd worden als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g}(f(g)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$$

of met de letters zoals in de cursustekst:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y(u(x))) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(y(u)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)$$

De formules worden duidelijker met enkele voorbeelden:

Voorbeeld 2.4.1.

(a) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (5x+2)^2$:

Merk allereerst op dat je in dit voorbeeld de kettingregel niet *moet* gebruiken. Je kan ook het kwadraat eerst uitrekenen:

$$((5x+2)^2)' = (25x^2 + 20x + 4)' = 50x + 20$$

Je *mag* de kettingregel wel gebruiken en je vindt uiteraard hetzelfde resultaat.

- De functie $x \mapsto (5x+2)^2$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto 5x+2$$

dan is $f(g(x)) = f(5x+2) = (5x+2)^2$. Omdat

$$f' : x \mapsto 2x$$
$$g' : x \mapsto 5$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{5x+2}^{g(x)})^2}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{2(\overbrace{5x+2}^{g(x)})}_{f'(g(x))} \cdot \overbrace{5}^{g'(x)} = 10(5x+2) = 50x+20$$

2.4 Kettingregel

waarbij $f'(g(x)) = f'(5x+2) = 2(5x+2)$

Indien je vertrouwd bent met de kettingregel *moet* je de samenstellende functies geen namen geven. Je mag ook sneller rekenen als volgt:

$$((5x+2)^2)' = 2(5x+2)\cdot 5 = 10(5x+2)$$

- Je kan ook de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken. Dat geeft (enkel kort opgeschreven):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x+2)^2 = 2(5x+2)\cdot 5.$$

(b) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \sin^2 x$:
Voor de duidelijkheid schrijven we verder het kwadraat met haakjes: $x \mapsto (\sin x)^2$.

- De functie $x \mapsto (\sin x)^2$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto \sin x$$

dan is $f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^2$. Omdat

$$f' : x \mapsto 2x$$
$$g' : x \mapsto \cos x$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{\sin x}^{g(x)})^2}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{2(\overbrace{\sin x}^{g(x)})}_{f'(g(x))}\cdot \overbrace{\cos x}^{g'(x)} = 2\sin x\cos x$$

waarbij $f'(g(x)) = f'(\sin x) = 2(\sin x)$

Indien je vertrouwd bent met de kettingregel *moet* je de samenstellende functies geen namen geven. Je mag ook sneller rekenen als volgt:

$$((\sin x)^2)' = 2(\sin x)\cdot\cos x = 2\sin x\cos x$$

- Je kan ook de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken. Dat geeft (enkel kort opgeschreven):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)^2 = 2(\sin x)\cdot\cos x = 2\sin x\cos x$$

(c) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \sin x^2$:
Voor de duidelijkheid schrijven we verder haakjes rond het kwadraat: $x \mapsto \sin(x^2)$.

- De functie $x \mapsto \sin(x^2)$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto \sin x$$
$$g : x \mapsto x^2$$

dan is $f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2)$. Omdat

$$f' : x \mapsto \cos x$$
$$g' : x \mapsto 2x$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Kettingregel

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{\sin(\overbrace{x^2}^{g(x)})}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{\cos(\overbrace{x^2}^{g(x)})}_{f'(g(x))} \cdot \overbrace{2x}^{g'(x)} = 2x\cos x^2$$

waarbij $f'(g(x)) = f'(x^2) = \cos(x^2)$

Je *moet* de samenstellende functies geen namen geven. Je kan ook sneller rekenen als volgt:

$$(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x$$

- Je kan ook de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken, dat geeft

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x^2) = \cos x^2 \cdot 2x$$

Oefening 2.4.1.

1. Bereken $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 5^{x^2} = \ldots\ldots$

2. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie

$$f(x) = \ln g(x)$$

in termen van de functie g en de afgeleide functie g'.

Eigenschap 2.4.2. De *ketting*regel berekent de afgeleide van een ketting of *keten* van samenstellingen:

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Dus je leidt de samenstellende functies af *van buiten naar binnen* en vermenigvuldigt de afgeleiden.

Voorbeeld 2.4.2. Bereken $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos^3(4x^2 - 7)$.

We gebruiken weer de kettingregel, maar nu hebben we een samenstelling van drie functies: $f(x) = x^3$, $g(x) = \cos x$ en $h(x) = 4x^2 - 7$.

$$f(g(h(x))) = f(g(4x^2 - 7)) = f(\cos(4x^2 - 7)) = \cos^3(4x^2 - 7)$$

In de eerste stap van de berekening gebruiken we:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(g(h(x)))] = f'(g(h(x))) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(g(h(x)))]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos^3\left(4x^2-7\right)\right] &= 3\left(\cos\left(4x^2-7\right)\right)^2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos\left(4x^2-7\right)\right] \\
&= 3\cos^2\left(4x^2-7\right)\left(-\sin\left(4x^2-7\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[4x^2-7\right]\right) \\
&= -3\cos^2\left(4x^2-7\right)\sin\left(4x^2-7\right) \cdot 8x \\
&= -24x\sin\left(4x^2-7\right)\cos^2\left(4x^2-7\right).
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Kettingregel

Oefening 2.4.2.

1. Bereken $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{\sin^3(e^{x^2})} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/26H.13)

2.5 Hogere orde afgeleiden

Omdat de afgeleide van een functie $f : x \mapsto f(x)$ opnieuw een functie $f' : x \mapsto f'(x)$ is, houdt niets ons tegen om te proberen ook f' af te leiden.

Definitie 2.5.1 (Hogere orde afgeleiden)**.**

Als voor een afleidbare reële functie f ook de afgeleide functie f' opnieuw afleidbaar is, dan is de **tweede afgeleide** van f, genoteerd $f'' = \dfrac{d^2 f}{dx^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\right)$ de afgeleide van de afgeleide functie f'.

Opmerking 2.5.1.

Analoog kan je ook derde afgeleide f''' van f definiëren. Meer algemeen kan je ook de n-de afgeleide ($n \in \mathbb{N}_0$) van een functie f definiëren. Die noteren we als $f^{(n)}$ of $\dfrac{d^n f}{dx^n}$. De notatie met het accent wordt meestal beperkt tot f', f'' en f''', vanaf de vierde afgeleide wordt de notatie met het haakje $f^{(4)}$ gebruikt. Merk op dat de haakjes *niet* mogen worden weggelaten in bijvoorbeeld $f^{(5)}$, want anders zou voor de sinus verwarring mogelijk zijn tussen $\sin^5(x)$ en de vijfde afgeleide $\sin^{(5)}(x)$.

Voorbeeld 2.5.1.

Bereken de tweede afgeleide $\dfrac{d^2}{dx^2}(\mathrm{bgsin}\, x + x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\left[\mathrm{bgsin}\, x + x\right] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left[\mathrm{bgsin}\, x + x\right]\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^{-1/2}\right] + \frac{d}{dx}[1] \\
&= -\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-3/2} \cdot \frac{d}{dx}\left[1-x^2\right] + 0 \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\,(-2x) \\
&= \frac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.
\end{aligned}$$

Oefening 2.5.1.

1. Bereken de derde afgeleide van $f(x) = 2\,e^{x^2-1} - \sin 3x + \dfrac{x^3}{2} + 4x^2 - 6x - \dfrac{12}{5}$.

Oplossing: … …

CC BY-NC-SA 4.0

2.5.A Basisoefeningen afgeleiden

2.5.A.1 Niveau 1

Oefening 2.5.2. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\left(x^{1/3}\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(x^{-1/3}\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(x^4\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(9x^9\right)' = \ldots\ldots$
5. $(x^4 - 4x)' = \ldots\ldots$
6. $(x + \sin x)' = \ldots\ldots$
7. $(x - \cos x)' = \ldots\ldots$
8. $(7e^x)' = \ldots\ldots$
9. $(7 + e^x)' = \ldots\ldots$
10. $(\sin x + e^x)' = \ldots\ldots$

Oefening 2.5.3. Bereken de afgeleide van volgende functies op twee manieren:

1. $(x^2 \cdot x^2)' = \ldots\ldots$
2. $\left((3x+5)^2\right)' = \ldots\ldots$

Oefening 2.5.4. Bereken de afgeleide van volgende rationale functies.

1. $\left(\dfrac{x-4}{x}\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(\dfrac{x}{x+3}\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(\dfrac{1}{x+5}\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(\dfrac{4-x}{3-x}\right)' = \ldots\ldots$

2.5.A.2 Niveau 2

Oefening 2.5.5. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((1+x)\ln x) = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2 \cos t) = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{-1}{t^2}\right) = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{3t-1}{2t+2}\right) = \ldots\ldots$
5. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(4x+5) = \ldots\ldots$
6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(7t^2) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.5.A Basisoefeningen afgeleiden

7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{4x^3+1}{3x} = \ldots\ldots$

8. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan\frac{1}{x} = \ldots\ldots$

9. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(-8x^2-1) = \ldots\ldots$

10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^3 3x = \ldots\ldots$

11. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2-7x+8} = \ldots\ldots$

12. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln t\,\sin(t^2)) = \ldots\ldots$

13. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(1-t^2) = \ldots\ldots$

14. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt[3]{(x^2+3)^4} = \ldots\ldots$

Oefening 2.5.6. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^{-2} = \ldots\ldots$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3-2\sqrt{x}+5x-2) = \ldots\ldots$

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5-x^4) = \ldots\ldots$

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2x^{-n} = \ldots\ldots$

5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((1+x)(x+2)\big) = \ldots\ldots$

6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((x+2)^3e^x\big) = \ldots\ldots$

7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(t^{-3}(t+5)^7\big) = \ldots\ldots$

8. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\sin t^2} = \ldots\ldots$

9. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{4}{1+2\cos\theta}\right) = \ldots\ldots$

10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2^{\sin x+2x} = \ldots\ldots$

11. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sqrt{1-2\theta} = \ldots\ldots$

12. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1+\tan x} = \ldots\ldots$

13. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right) = \ldots\ldots$

14. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(2\theta^{1/2}+\frac{3}{2}\theta^{2/3}+\frac{4}{3}\theta^{3/4}\right) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.5.A Basisoefeningen afgeleiden

15. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\sin(3x)\cdot\cos(2x)\big) = \ldots\ldots$

16. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\sqrt{2x-1} = \ldots\ldots$

Oefening 2.5.7. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie f in termen van g en van de afgeleide van de functie g voor volgende functies f:

1. Als $f(x) = 2g(x)$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

2. Als $f(x) = (g(x))^2$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

3. Als $f(x) = g(x^2)$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

4. Als $f(x) = \mathrm{bgtan}\, g(x)$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

5. Als $f(x) = g(3x) + 3g(x) + (g(x))^3 + g(x) + g(3) + xg(3) + g(3^x) + 3^{g(x)}$,
dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

Oefening 2.5.8. Zij $a, b, c \in \mathbb{R}$ constanten. Bepaal dan de afgeleide van onderstaande functies.

1. Als $s(t) = a + b\sin(bt - c)$, dan is $s'(t) = \ldots\ldots$

2. Als $s(\theta) = ab\theta + c\theta^2$, dan is $s'(\theta) = \ldots\ldots$

3. Als $s(x) = b[1 - \cos(a^2x)]$, dan is $s'(x) = \ldots\ldots$

Oefening 2.5.9. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van de functie f in het gegeven punt.

1. $f(x) = 4x^{-4} - 1$ in het punt met als x-coördinaat 1. $\ldots\ldots$

2. $f(x) = 1 - \cos x$ in het punt met als x-coördinaat $\frac{\pi}{2}$. $\ldots\ldots$

3. $f(x) = 1 - x^2$ in het punt met als x-coördinaat 2. $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.5.B Oefeningen hogere orde afgeleiden

2.5.B.3 Niveau 2

Oefening 2.5.10. Bereken de tweede afgeleide van volgende functies:

(a) $f(x) = \ln(x^2)$. $f''(x) = \ldots\ldots$

(b) $f(\theta) = \theta\cos\theta$ $f''(\theta) = \ldots\ldots$

(c) $f(t) = \sin(t^4)$ $f''(t) = \ldots\ldots$

Oefening 2.5.11. Bereken volgende afgeleiden:

1. $\frac{d^2}{dx^2}x^3 = \ldots\ldots$
2. $\frac{d^3}{dx^3}6x^3 = \ldots\ldots$
3. $\frac{d^{13}}{dx^{13}}(314x^9 + x^5 + \frac{\pi}{2}) = \ldots\ldots$
4. $\frac{d^{13}}{dx^{13}}314^{15} = \ldots\ldots$
5. $\frac{d}{dx}\sin x = \ldots\ldots$
6. $\frac{d^2}{dx^2}\sin x = \ldots\ldots$
7. $\frac{d^3}{dx^3}\sin x = \ldots\ldots$
8. $\frac{d^4}{dx^4}\sin x = \ldots\ldots$
9. $\frac{d^{12}}{dx^{12}}\sin x = \ldots\ldots$
10. $\frac{d^{13}}{dx^{13}}\sin x = \ldots\ldots$
11. $\frac{d^{120}}{dx^{120}}\sin x = \ldots\ldots$
12. $\frac{d^n}{dx^n}x^n = \ldots\ldots$
13. $\frac{d}{dx}x^{n+1} = \ldots\ldots$
14. $\frac{d^n}{dx^n}x^{n+1} = \ldots\ldots$
15. $\frac{d}{dx}x^{n!} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0