KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Voorbereiding
Week 3
Oefenzitting 2

(Versie 2026/09/18H.6)

Inhoudsopgave

1 Quiz Week 3 Oefenzitting 2 1.1

1.1 Quiz Week 3 Oefenzitting 2 . . . 1.1

2 De logaritme 2.1

2.1 De logaritme . . . 2.1

2.1.A Basisoefeningen logaritmen . . . 2.4

2.2 Rekenregels voor logaritmen . . . 2.5

2.2.A Oefeningen rekenregels logaritmen . . . 2.9

3 Exponentiele en logaritmische functies 3.1

3.1 Exponentiële functies . . . 3.1

3.2 Logaritmische functies . . . 3.5

3.2.A Oefeningen exponentiële en logaritmische functies . . . 3.9

1.1 Quiz Week 3 Oefenzitting 2

1.1 Quiz Week 3 Oefenzitting 2

Oefening 1.1.1 (De logaritme)**.** Bereken de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel.

1. $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \ldots\ldots$

2. $\log_4 \left(\log_4 \sqrt[4]{4}\right) = \ldots\ldots$

3. $\log_9 25 - \log_3 15 = \ldots\ldots$

4. $\ln 108 - 2 \cdot \ln 6 + \ln\left(\frac{e}{3}\right) = \ldots\ldots$

Oefening 1.1.2 (Exponentiële en logaritmische functies)**.**

1. Vereenvoudig $e^{3\ln 2} = \ldots\ldots$

2. Los volgende vergelijking op: $e^{3x} = 2 \qquad x = \ldots\ldots$

3. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $e^{2x} + e^x - 6 = 0 \qquad x = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 De logaritme

Veronderstelde voorkennis: machten

We kennen voor een gegeven grondtal a en een gegeven exponent r de *macht* a^r. Zo hoort bij grondtal 3 en exponent 2 de macht $3^2 = 9$ en bij grondtal 2 en exponent 3 de macht $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Bij *logaritmen* keren we de berekening om: we *vertrekken* van een gegeven grondtal a en een gegeven macht a^r en *zoeken* de *exponent* r die hoort bij dat grondtal a om die macht a^r te bekomen. Als de macht geschreven is als a^r kunnen we r natuurlijk gewoon aflezen, maar als de macht is uitgerekend werkt dat niet meer. In het voorbeeld hierboven: we krijgen het grondtal 3 en de macht 9 en we zoeken de exponent r zodat $3^r = 9$. Die is 2 want $3^{\mathbf{2}} = 9$. We noemen die exponent 2 de 3-logaritme van 9, en we noteren die als $\log_3 9$. We hebben dus:

$$\log_3 9 = \mathbf{2} \quad \text{omdat} \quad 3^{\mathbf{2}} = 9 \quad \text{en er geldt dus dat } 3^{\log_3 9} = 9 \text{ en } \log_3 3^2 = 2$$
$$\log_2 8 = \mathbf{3} \quad \text{omdat} \quad 2^{\mathbf{3}} = 8 \quad \text{en er geldt dus dat } 2^{\log_2 8} = 8 \text{ en } \log_2 2^3 = 3$$

Definitie 2.1.1 (Logaritme)**.** De **logaritme** met grondtal a van x, ook de a-logaritme van x genoemd, genoteerd $\log_a x$, is per definitie

de exponent r waartoe men het grondtal a moet verheffen om x als uitkomst te krijgen.

Met symbolen:

$$\log_a x = r \Leftrightarrow a^r = x.$$

Deze definitie is enkel zinvol voor a en x strikt positieve reële getallen met $a \neq 1$ (zie verder) .

Voorbeeld 2.1.1.

Je kan de logaritme $\log_a x$ dus *direct aflezen* als je x als een macht met grondtal a kan schrijven.

1. $\log_2 8 = \log_2 2^{\mathbf{3}} = 3$
2. $\log 1000 = \log 10^{\mathbf{3}} = 3$
3. $\log_4 \frac{1}{4} = \log_4 4^{\mathbf{-1}} = -1$
4. $\log_4 4 = 1$
5. $\log_4 1 = 0$

Opmerking 2.1.1.

- In het secundair onderwijs wordt soms de notatie ${}^a\log x$ gebruikt.
  In de wetenschappen gebruikt men meestal $\log_a x$.
- Net zoals wortels als $\sqrt{4}, \sqrt{25}$ en $\sqrt[3]{8}$ makkelijk te berekenen zijn terwijl je voor $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ of $\sqrt[3]{9}$ een rekentoestel nodig hebt, geldt voor logaritmen dat $\log_2 4, \log_5 25$ en $\log_2 8$ makkelijk te berekenen zijn, terwijl je voor $\log_3 8$ of $\log_5 30$ een rekentoestel nodig hebt.
- Onmiddellijke gevolgen van de definities (met $a > 0$ en $a \neq 1$):

  $$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a^b = b$$
  $$\log_a a = 1 \qquad \log_a \frac{1}{a^b} = -b$$

- De **tiendelige** logaritme $\log x$: het grondtal $a = 10$ komt veel voor omdat we rekenen met het tiendelig talstelsel. We spreken af om het grondtal 10 *weg* te laten: $\log 100 = \log_{10} 100 = 2$. De *tiendelige* logaritme wordt ook wel *Briggse* logaritme genoemd.
- De **natuurlijke** logaritme $\ln x$: een tweede bijzondere grondtal is het *getal van Euler*: $e \approx 2.718281$. Dit getal e neemt binnen de wiskunde een speciale plaats in, net zoals bijvoorbeeld

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 De logaritme

het getal $\pi \approx 3.14159$. De logaritme met grondtal e krijgt een eigen notatie: $\log_e x = \ln x$ en een eigen naam: de 'ln' verwijst naar 'logaritmus naturalis' (dus '*natuurlijke logaritme*'), en wordt soms ook de *Neperse* logaritme genoemd.

Voorbeeld 2.1.2.

1. $\log_3 27 = 3$
2. $\log_5 25 = 2$
3. $\log_5 1 = 0$
4. $\log_4 2 = \frac{1}{2}$

Opmerking 2.1.2. Speciale grondtallen en argumenten waarbij de logaritme niet bestaat:

(a) $\log_1 5$ bestaat niet. Er bestaat immers geen exponent r zodat $1^r = 5$, want 1^r is steeds 1.

(b) $\log_0 5$ bestaat niet. Er bestaat geen exponent r waarvoor geldt dat $0^r = 5$. Positieve machten van 0 zijn 0, negatieve machten van 0 bestaan niet omdat je dan door 0 zou moeten delen, wat niet toegelaten is. Het resterende geval 0^0 is wiskundig onbepaald.

(c) $\log_{-4} 2$ bestaat niet, want er bestaat geen r waarvoor geldt dat $(-4)^r = 2$. Er bestaat zeker geen natuurlijk getal r waarvoor $(-4)^r = 2$, en rationale getallen r zijn problematisch omdat bijvoorbeeld $(-4)^{1/2} = \sqrt{-4}$ niet bestaat.

(d) $\log_2(-4)$ bestaat ook niet, want er bestaat geen r waarvoor geldt dat $2^r = -4$. Inderdaad, machten van 2 zijn altijd positief.

(e) $\log_3 10$ bestaat, maar we kunnen dit niet exact berekenen omdat we het getal 10 niet kunnen schrijven als een macht met grondtal 3. Omdat $3^2 < 10 < 3^3$ kunnen we wel besluiten dat $\log_3 10$ een waarde moet zijn tussen 2 en 3. Met een rekentoestel of computer kunnen we een betere benaderende waarde vinden. Zo is bijvoorbeeld $\log_3 10 \approx 2.0959$, afgerond op 4 decimalen.

We merken dus op dat de definitie van de logaritme $\log_a x$ inderdaad moet beperkt worden:

- we aanvaarden als grondtal a enkel *strikt positieve getallen*
- we aanvaarden als grondtal a niet de waarde 1 (want machten van 1 zijn altijd gelijk aan 1)
- we aanvaarden als argument x enkel *strikt positieve getallen* (want machten met een strikt positief grondtal a zijn altijd strikt positief).

De logaritme $\log_a x$ kan zelf *wel alle reële waarden aannemen* (dus zowel negatief, nul als positief).

Uit de definitie volgt onmiddellijk volgende eigenschap:

Eigenschap 2.1.1 (Basisformules van de logaritme)**.**

Als a, x positieve reële getallen zijn, en $a \neq 1$, dan geldt

$$\log_a a^x = x \quad \text{en} \quad a^{\log_a x} = x$$

In het bijzonder geldt

$$\ln e^x = x \quad \text{en} \quad e^{\ln x} = x \quad \text{en} \quad \log 10^x = x \quad \text{en} \quad 10^{\log x} = x$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 De logaritme

Als we $\log_a a^x = x$ toepassen voor $x = 0$ en $x = 1$ krijgen we

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1$$

Oefening 2.1.1.

Bereken volgende logaritmen (zonder rekenmachine).

1. $\log_3 81 = \ldots\ldots$

2. $\log 100 = \ldots\ldots$

3. $\log 0.01 = \ldots\ldots$

4. $\log_2 64 = \ldots\ldots$

5. $\log_2 128 = \ldots\ldots$

6. $\log_2(4^7) = \ldots\ldots$

7. $\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = \ldots\ldots$

8. $\log_9 3 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1.A Basisoefeningen logaritmen

2.1.A.1 Niveau 1

Oefening 2.1.2. Bereken indien mogelijk de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Indien de logaritme bestaat maar niet exact berekend kan worden, geef dan de grenzen aan (bv. $\log_3 10$ is een waarde tussen 2 en 3).

1. $\log_3\left(\frac{1}{3^2}\right) = \ldots\ldots$

2. $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \ldots\ldots$

3. $\log_1 1$: $\ldots\ldots$

4. $\log \frac{1}{1000} = \ldots\ldots$

5. $\ln \sqrt[3]{e^2} = \ldots\ldots$

6. $\log_6 1 = \ldots\ldots$

7. $\log_4 8 = \ldots\ldots$

8. $\log_5 10$: $\ldots\ldots$

9. $\log_3(-3)^6 = \ldots\ldots$

10. $\log_{-3}(-3)^6$: $\ldots\ldots$

2.1.A.2 Niveau 2

Oefening 2.1.3. Bereken zonder rekenmachine.

1. $\log_2 64 = \ldots\ldots$

2. $\log_5 125 = \ldots\ldots$

3. $\log_2 \frac{1}{32} = \ldots\ldots$

4. $\log_6(36\sqrt{6}) = \ldots\ldots$

5. $\log 0,00001 = \ldots\ldots$

6. $\log_4\left(\log_4 \sqrt[4]{4}\right) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Rekenregels voor logaritmen

Veronderstelde voorkennis: breuken en machten

Uit de rekenregels voor machten volgen de rekenregels voor logaritmen.

Omdat $x = a^{\log_a x}$ en $y = a^{\log_a y}$ volgt uit de rekenregel voor het product van machten $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ dat

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}) = \log_a(a^{\log_a x + \log_a y}) = \log_a x + \log_a y$$

Op gelijkaardige manier volgt uit de rekenregel voor de macht van een macht $(a^r)^s = a^{s \cdot r}$ dat

$$\log_a(x^r) = \log_a(\left(a^{\log_a x}\right)^r) = \log_a(a^{r \cdot \log_a x}) = r \log_a x$$

en dus in het bijzonder (voor $r = -1$) dat $\log_a \frac{1}{x} = \log_a x^{-1} = -\log_a x$

Omdat $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$, geldt dus ook $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a \left(x \cdot y^{-1}\right) = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y$.

Voor een willekeurige b geldt ook volgend verband tussen $\log_a x$ en $\log_b x$:

$$\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \cdot \log_b a$$

Samengevat wordt dit:

Eigenschap 2.2.1 (Rekenregels logaritmen).

Logaritme van een product: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

of in woorden: *de logaritme van een product is de som van de logaritmen.*

Logaritme van een quotiënt: $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

of in woorden: *de logaritme van een quotiënt is het verschil van de logaritmen.*

Logaritme van een macht: $\log_a(x^s) = s \cdot \log_a x$

of in woorden: *de logaritme zet een macht om in een product.*

Speciaal geval $s = -1$: $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = \log_a x^{-1} = -\log_a x$

Verandering van grondtal: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ of ook $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$

Speciaal geval $b = x$: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Rekenregels voor logaritmen

Voorbeeld 2.2.1.

- $\log_3(7 \cdot y) = \log_3 7 + \log_3 y$
- $\log 500 - \log 5 = \log \dfrac{500}{5} = \log 100 = 2$
- $\log x^{1000} = 1000 \log x$
- $\log_2 17 = \dfrac{\ln 17}{\ln 2}$

Voorbeeld 2.2.2.

1. $\log 4 + \log 25 = \log(4 \cdot 25) = \log(100) = 2$

2. $\log_8 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 8} = \dfrac{2}{3}$

3. $\dfrac{\log 16}{\log 2} = \log_2 16 = 4$

4. $\log_5 125 = \log_5(5 \cdot 25) = \log_5 5 + \log_5 25 = 1 + 2 = 3$.
of ook: $\log_5 125 = \log_5(5^3) = 3$.

5. $\log_2\left(\dfrac{32}{4}\right) = \log_2 32 - \log_2 4 = 5 - 2 = 3$
of ook: $\log_2\left(\dfrac{32}{4}\right) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

6. $\ln e^2 - \ln e = \ln\left(\dfrac{e^2}{e}\right) = \ln e = 1$
of ook: $\ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1$

7. $\log_2 4^5 = 5 \cdot \log_2 4 = 5 \cdot 2 = 10$.
of ook: $\log_2 4^5 = \log_2(2^2)^5 = \log_2 2^{10} = 10$.

Waarschuwing 2.2.1 (Veelgemaakte fouten)**.** Bekijk grondig volgende uitdrukkingen:

1. $\log_5(20 + 5) \neq \log_5 20 + \log_5 5$

2. $\ln(20 + 5) \neq \ln 20 \cdot \ln 5$

3. $\log_5(30 - 5) \neq \dfrac{\log_5 30}{\log_5 5}$

4. $(\log 10)^3 \neq 3 \cdot \log 10$

5. $2 \ln \dfrac{e}{4} \neq \ln \dfrac{e^2}{4}$

In het algemeen kan je dus niet veel doen met de logaritme van een som (of verschil) (zie 1, 2 en 3).

~~$\log(x + y) = \log x + \log y$~~

~~$\log(x + y) = \log x \cdot \log y$~~

~~$\log(x - y) = \dfrac{\log x}{\log y}$~~

~~$(\log x)^n \neq n \cdot \log x$~~

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Rekenregels voor logaritmen

Opmerking 2.2.1 (Logaritmen met rekenmachine)**.**

Eenvoudige rekentoestellen kennen soms enkel de functie 'log()'. Je kan hiermee $\log_{10}(25)$ berekenen maar niet bijvoorbeeld $\log_5(25)$. Je kan echter gebruik maken van de formule om van grondtal te veranderen zodat je $\log_5(25)$ kan bereken als $\dfrac{\log 25}{\log 5}$.

In volgende voorbeelden worden de verschillende rekenregels tegelijk gebruikt:

Voorbeeld 2.2.3. Schrijf de uitdrukking $2 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_3 y + 0.5 \cdot \log_3 z$ als één logaritme:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_3 y + 0.5 \cdot \log_3 z &= \log_3(x^2) - \log_3(y^3) + \log_3(z^{0.5}) \\ &= \log_3(x^2 z^{0.5}) - \log_3(y^3) \\ &= \log_3\left(\frac{x^2 z^{0.5}}{y^3}\right) \\ &= \log_3\left(\frac{x^2\sqrt{z}}{y^3}\right). \end{aligned}$$

Hierbij hebben we eerst de rekenregel voor machten gebruikt, daarna de rekenregel voor product en tenslotte de rekenregel voor quotiënt.

Voorbeeld 2.2.4. Schrijf de uitdrukking $\log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + 2\log_{\frac{1}{5}} z$ als één logaritme:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + 2\log_{\frac{1}{5}} z &= \log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + \log_{\frac{1}{5}}(z^2) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}(xz^2) - \log_{\frac{1}{5}}(yz) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{xz^2}{yz}\right) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{xz}{y}\right). \end{aligned}$$

Opnieuw hebben we gebruik gemaakt van de rekenregel voor machten, de rekenregel voor product en de rekenregel voor quotiënt, in deze volgorde, en tenslotte de breuk binnen de logaritme vereenvoudigd.

Voorbeeld 2.2.5. Bereken de waarde van $\log_2 3 - \log_2 12$ zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Dat kan met behulp van de quotiëntregel:

$$\begin{aligned} \log_2 3 - \log_2 12 &= \log_2\left(\frac{3}{12}\right) = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \log_2(2^{-2}) = -2. \end{aligned}$$

Een alternatieve manier gebruikt de productregel:

$$\begin{aligned} \log_2 3 - \log_2 12 &= \log_2 3 - \log_2(3 \cdot 4) = \log_2 3 - \log_2 3 - \log_2 4 \\ &= -\log_2(2^2) = -2. \end{aligned}$$

Voorbeeld 2.2.6. Als gegeven is dat $\log x = 2.4$ en dat $\log y = -1.1$, bereken dan $\log\left(\sqrt{x} \cdot y^3\right)$.

Dit kan gebeuren op twee manieren.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Rekenregels voor logaritmen

Eerst gebruiken we de betekenis van de logaritme om x en y te bepalen: $x = 10^{2.4}$ en $y = 10^{-1.1}$. Dan geldt:

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{x}\cdot y^3\right) &= \log\left(\sqrt{10^{2.4}}\cdot(10^{-1.1})^3\right)\\ &= \log\left((10^{2.4/2})\cdot(10^{-1.1\cdot 3})\right)\\ &= \log\left(10^{1.2}\cdot 10^{-3.3}\right)\\ &= \log\left(10^{1.2-3.3}\right)\\ &= \log\left(10^{-2.1}\right) = -2.1.\end{aligned}$$

Anderzijds kunnen we gebruik maken van de rekenregels van logaritmen om de gegeven formule te herschrijven als een uitdrukking in $\log x$ en $\log y$:

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{x}\cdot y^3\right) &= \log\left(x^{0.5}\cdot y^3\right)\\ &= \log(x^{0.5}) + \log(y^3)\\ &= 0.5\cdot\log x + 3\cdot\log y\\ &= 0.5\cdot 2.4 + 3\cdot(-1.1) = 1.2 - 3.3 = -2.1.\end{aligned}$$

Voorbeeld 2.2.7. Herschrijf de uitdrukking $\log_a\sqrt{\frac{yz^2}{ax}}$ in functie van $\log_a x$, $\log_a y$ en $\log_a z$, weer door gebruik te maken van de rekenregels:

$$\begin{aligned}\log_a\sqrt{\frac{yz^2}{ax}} &= \log_a\left(\frac{yz^2}{ax}\right)^{0.5}\\ &= 0.5\log_a\left(\frac{yz^2}{ax}\right)\\ &= 0.5\cdot\left(\log_a(yz^2) - \log_a(ax)\right)\\ &= 0.5\cdot\left(\log_a y + log_a(z^2) - \log_a a - \log_a x\right)\\ &= 0.5\cdot\left(-\log_a x + \log_a y + 2\log_a z - 1\right).\end{aligned}$$

We schrijven eerst de vierkanstwortel als een macht, passen dan de rekenregel voor machten toe, vervolgens de regel voor quotiënt, de regel voor product en nogmaals de regel voor macht.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2.A Oefeningen rekenregels logaritmen

Oefening 2.2.1. Zij $a, b, c > 0$. Schrijf in functie van $\log a$, $\log b$ en $\log c$.

1. $\log \dfrac{a}{b^4} = \ldots\ldots$

2. $\log\left(c^3\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right) = \ldots\ldots$

3. $\log \dfrac{a^4bc}{\sqrt{bc^2}} = \ldots\ldots$

Oefening 2.2.2. Schrijf elke uitdrukking in functie van $\log x$, $\log(x-5)$ en $\log(x+1)$.

1. $\log \dfrac{x(x+1)}{x-5} = \ldots\ldots$

2. $\log\left((x+1)^2\sqrt{x-5}\right) = \ldots\ldots$

3. $\log\sqrt{\dfrac{x-5}{x^3(x+1)}} = \ldots\ldots$

4. $\log \dfrac{1}{(x+1)^2} = \ldots\ldots$

Oefening 2.2.3. Schrijf als één logaritme. $(x > 0, y > 0, z > 0)$

1. $2 \cdot \log x - 3 \cdot \log(xy^2) + 5 \cdot \log y = \log \ldots\ldots$

2. $\dfrac{1}{2} \cdot \log_3\left(\dfrac{y}{x}\right) - \log_3\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \log_3 \ldots\ldots$

3. $\log_5(xy) - \log_5(yz) + \log_5(zx) = \log_5 \ldots\ldots$

Oefening 2.2.4. Schrijf elke uitdrukking als één enkele logaritme.

1. $\log(x+1) - \log x^2 + \dfrac{1}{2}\log(x-3) = \ldots\ldots$

2. $3 - \log x = \ldots\ldots$

3. $5\log(x-1) - \dfrac{1}{2}\log(x+3) = \ldots\ldots$

Oefening 2.2.5. Bereken de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Neem zeker pen en papier bij de hand, want je kan ze niet allemaal uit je hoofd uitrekenen.

1. $\log 25 + \log 40 = \ldots\ldots$

2. $\log_3 36 - \log_3 4 = \ldots\ldots$

3. $\log_9 25 - \log_3 15 = \ldots\ldots$

4. $\ln 108 - 2 \cdot \ln 6 + \ln\left(\dfrac{e}{3}\right) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2.A Oefeningen rekenregels logaritmen

Oefening 2.2.6. Schrijf als één logaritme. Je mag het grondtal zelf kiezen. $(x > 0, y > 0)$

1. $\log_3 x + \log_9 x + \log_{\frac{1}{3}} x = \ldots\ldots$

2. $\log_5(4xy) - \log_{\frac{1}{5}}(4xy) = \ldots\ldots$

Oefening 2.2.7.

1. Schrijf onderstaande uitdrukking in functie van $\log(k-1)$, $\log k$ en $\log(k+1)$.

$$\log\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ldots\ldots$$

Oefening 2.2.8.

1. Zij $a, b, c, d > 0$. Toon aan dat $\log\frac{a}{b} - \log\frac{c}{d} = -\log\frac{b}{d} + \log\frac{a}{c}$

2. Zij $a, b > 0$. Toon aan dat $-\log\frac{2}{a} + \log\frac{2}{b} = -\log\frac{b}{a}$

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Exponentiële functies

Met twee positieve getallen a en r kunnen we altijd een derde getal a^r construeren. We noemen a het grondtal, r de exponent en a^r de macht (die gelezen wordt als *a tot de r-de macht*). Door nu één van beide getallen constant te houden en het andere in waarde te laten variëren kunnen we twee soorten *functies* definiëren.

- We kunnen een vaste waarde geven aan de exponent, bv. $r = 2$, en het *grondtal laten variëren*. Op deze manier bekomen we de functie

  $$f(x) = x^2 \quad (a^r \text{ met } r = 2).$$

  Op dezelfde manier bekomen we ook de functies

  $$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x} \quad (a^r \text{ met } r = -1)$$

  of

  $$f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x} \quad (a^r \text{ met } r = 1/2)$$

  of

  $$f(x) = x^r \quad (a^r \text{ met r vast gekozen}).$$

- Als we een vaste waarde geven aan het grondtal, bv. $a = 2$, kunnen we de *exponent laten variëren*. Zo bekomen we de functie

  $$f(x) = 2^x \quad (a^r \text{ met } a = 2).$$

  Deze functie noemen we een *exponentiële functie*.

  Op dezelfde manier bekomen we bijvoorbeeld ook de functies

  $$f(x) = 10^x \quad (a^r \text{ met } a = 10)$$

  of

  $$f(x) = a^x \quad (a^r \text{ met } a > 0 \text{ en } a \neq 1).$$

Opmerking 3.1.1.

Er moeten beperkingen worden opgelegd aan mogelijke grondtallen a van een exponentiële functie:

- a mag niet negatief zijn, want dat geeft problemen voor niet-gehele waarden van de exponent x (bv. $(-3)^{\frac{1}{2}}$)
- a mag niet gelijk zijn aan 0, want dat geeft problemen voor negatieve exponenten x (bv. $0^{-1} = 1/0$)
- a mag niet gelijk zijn aan 1, want $1^x = 1$ voor alle x, en de functie $f(x) = 1^x = 1$ is een *constante functie* met waarde 1. Deze functie beschouwen we niet als een exponentiële functie.

We bestuderen nu de *grafiek* van een exponentiële functie $f(x) = a^x$. Het zal blijken dat er een belangrijk onderscheid is tussen de gevallen a groter dan 1 en a tussen 0 en 1.

Voorbeeld 3.1.1 (Het geval $a > 1$:).

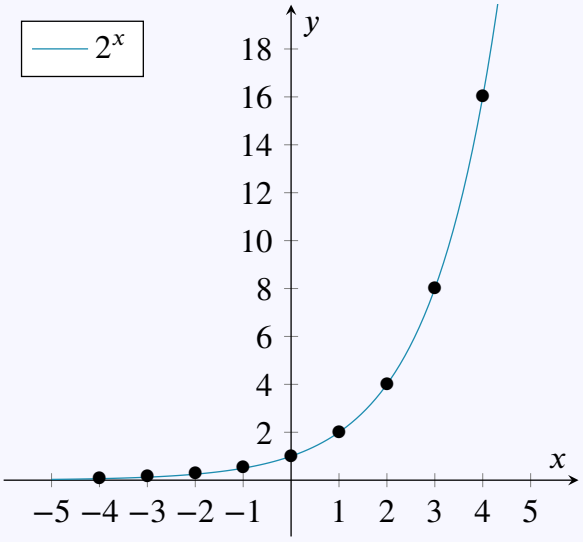
We nemen als voorbeeld $a = 2$. We schetsen de grafiek van de exponentiële functie $f(x) = 2^x$ met grondtal 2 door een aantal punten van de grafiek te bepalen.
In onderstaande tabel staan de functiewaarden voor $x = -4, -3, \ldots, 3, 4$:

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Exponentiële functies

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16

Dit levert een aantal punten op op de gezochte grafiek (zie de bolletjes op de figuur). Met een rekentoestel kunnen we ook functiewaarden berekenen voor niet-gehele waarden van x, bv. $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1.4142$. Op die manier krijgen we een vrij precies beeld van de grafiek:



Voorbeeld 3.1.2 (Het geval $0 < a < 1$:).

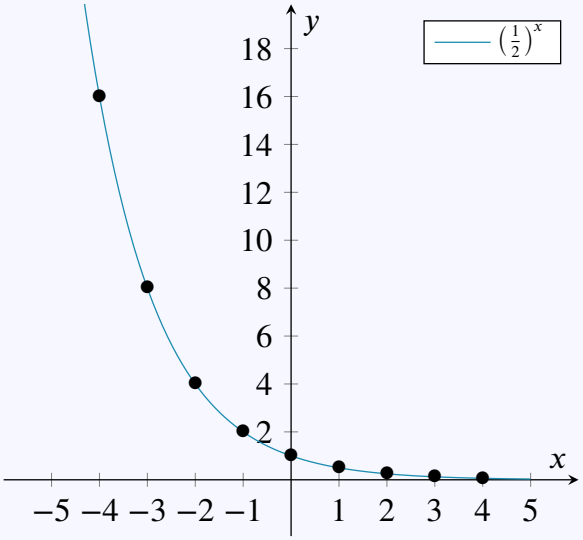
We nemen als voorbeeld $a = \frac{1}{2} = 0.5$. We schetsen de grafiek van de exponentiële functie $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ met grondtal $\frac{1}{2}$ door een aantal punten op de grafiek te bepalen.
In onderstaande tabel staan de functiewaarden voor $x = -4, -3, \ldots, 3, 4$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125	0.0625

Dit levert weer een aantal punten op op de grafiek. Met een rekentoestel kunnen we opnieuw functiewaarden voor niet-gehele waarden van x berekenen, bv. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.7071$. Op die manier krijgen we weer een vrij precies beeld van de grafiek:

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Exponentiële functies



Deze voorbeelden bestudeerden de specifieke grondtallen $a = 2$ en $a = \frac{1}{2}$, maar ze vertonen een aantal eigenschappen die gelden voor *alle* exponentiële functies:

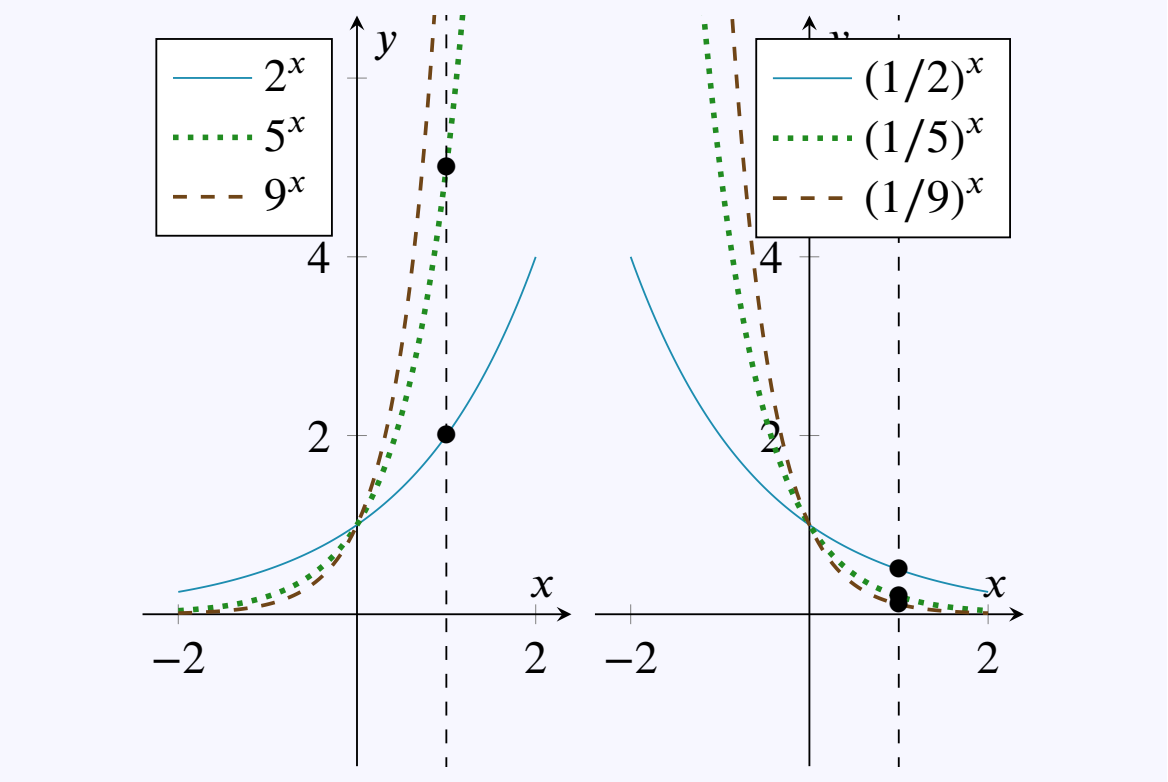
Eigenschap 3.1.1 (Exponentiële functies)**.**

- Als $a > 1$ dan is de functie $f(x) = a^x$ *strikt stijgend*: $x < y \iff a^x < a^y$
- Als $0 < a < 1$ dan is de functie $f(x) = a^x$ *strikt dalend*: $x < y \iff a^x > a^y$
- De functie $f(x) = a^x$ is gedefinieerd voor alle reële getallen x, dus het domein is $\mathbb{R}$.
- De functiewaarden van $f(x) = a^x$ zijn strikt positief.
- De grafiek van $f(x) = a^x$ snijdt de y-as steeds in het punt $(0, 1)$ (want $a^0 = 1$).
- De grafiek van $f(x) = a^x$ snijdt de x-as niet ($f(x) = a^x$ heeft geen nulpunten).
- De grafiek van $f(x) = a^x$ snijdt de rechte $x = 1$ in het punt $(1, a)$ (want $a^1 = a$).

Voorbeeld 3.1.3.

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Exponentiële functies



Wanneer we als grondtal a de specifieke waarde $e = 2,7182818\ldots$ kiezen, dan verkrijgen we een veel voorkomende exponentiële functie $f(x) = e^x$, die we meestal *de* exponentiële functie noemen. We noteren deze functie met exp.

Definitie 3.1.1 (*De* exponentiële functie)**.**

De functie $f(x) = e^x$ noemen we *de* exponentiële functie en wordt genoteerd met exp:

$$\exp(x) = e^x$$

Als we in de gelijkheid (zie De logaritme)

$$x = e^{\ln x}$$

x vervangen door a^x dan bekomen we

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

Hiermee kunnen we een *willekeurige* exponentiële functie $f(x) = a^x$ herschrijven in termen van *de* exponentiële functie $f(x) = e^x$.

Merk op dat $\ln a$ positief of negatief is naargelang $a > 1$ of $0 < a < 1$.

Eigenschap 3.1.2 (Herschijf een willekeurige exponentiële functie a^x in termen van e^x)**.**

als $a > 1$	dan is $a^x = e^{kx}$	met $k = \ln a > 0$
als $0 < a < 1$	dan is $a^x = e^{-kx}$	met $k = -\ln a = \ln(1/a) > 0$

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Logaritmische functies

We herhalen de definitie van logaritme

$$\log_a b = r \Leftrightarrow a^r = b,$$

en de belangrijke eigenschappen

$$\log_a a^x = x \qquad \text{en} \qquad a^{\log_a x} = x.$$

Door in de uitdrukking voor de logaritme $\log_a b$ het grondtal a constant te houden en het getal b te laten variëren, bekomen we een *functie*, namelijk een zogenaamde *logaritmische functie*:

Definitie 3.2.1 (Logaritmische functie)**.** De **logaritmische functie met grondtal** a ($a > 0$ en $a \neq 1$), is de reële functie

$$f(x) = \log_a(x)$$

waarbij x enkel *strikt positieve waarden* mag aannemen.

Opmerking 3.2.1.

- Bij de invoering van de logaritme $\log_a b$ (voorkennisles 2) hebben we de noodzaak besproken om beperkingen op te leggen aan het grondtal a en het argument b.
- $f(x) = a^x$ en $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ zijn **inverse** functies want

$$f(f^{-1}(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$$

en

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(a^x) = \log_a a^x = x.$$

We bestuderen nu de *grafiek* van een logaritmische functie $f(x) = \log_a(x)$. Het zal blijken dat er een belangrijk onderscheid is tussen de gevallen a groter dan 1 en a tussen 0 en 1. In de cursus Wiskunde I wordt enkel het geval $a > 1$ besproken, voor de volledigheid en de analogie met exponentiële functies behandelen we hier beide gevallen (zeker nuttig voor andere vakken).

Voorbeeld 3.2.1 (Het geval $a > 1$:)**.**

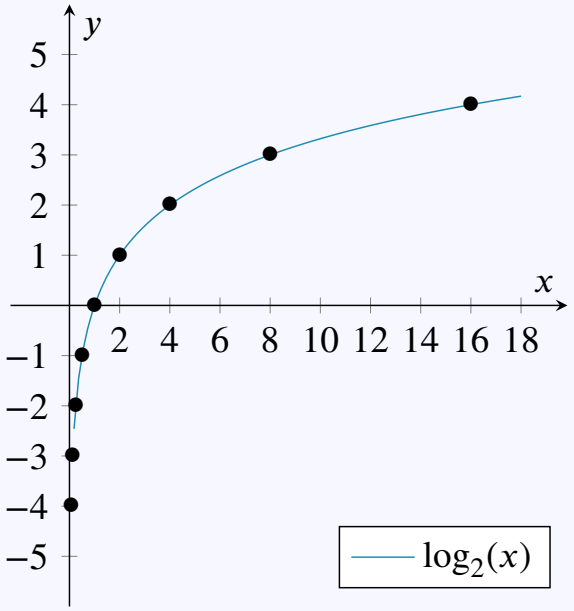
We nemen als voorbeeld $a = 2$. We schetsen de grafiek van de logaritmische functie $f(x) = \log_2(x)$ door een aantal punten van de grafiek te bepalen. Het ligt voor de hand om voor de x-waarden machten van 2 te kiezen, omdat daarvoor de 2-logaritme gemakkelijk te bepalen is.

x	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16
$y = \log_2(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Dit levert voldoende punten op om de grafiek betrouwbaar te schetsen:

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Logaritmische functies

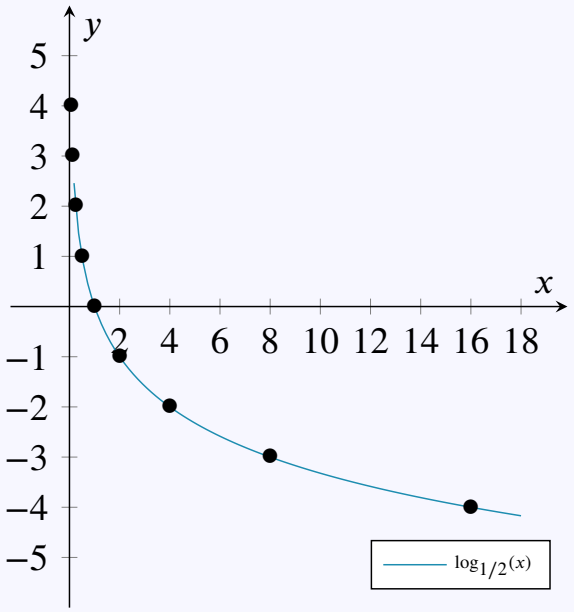


Voorbeeld 3.2.2 (Het geval $0 < a < 1$:).

We nemen als voorbeeld $a = \frac{1}{2} = 0.5$. We schetsen de grafiek van de logaritmische functie $f(x) = \log_{1/2}(x)$ met grondtal $\frac{1}{2}$ door een aantal punten van de grafiek te bepalen. We kunnen dezelfde tabel hergebruiken:

x	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16
$y = \log_{1/2}(x)$	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4

Dit levert opnieuw voldoende punten op om de grafiek betrouwbaar te schetsen:



CC BY-NC-SA 4.0

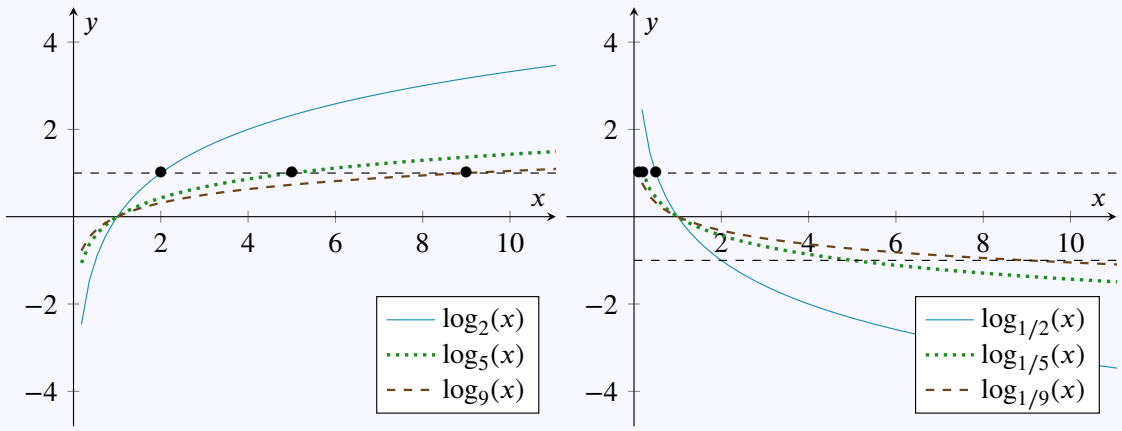
3.2 Logaritmische functies

Deze voorbeelden bestudeerden de specifieke grondtallen $a = 2$ en $a = 1/2$, maar ze vertonen een aantal eigenschappen die gelden voor *alle* logaritmische functies:

Eigenschap 3.2.1 (Logaritmische functies)**.**

- Als $a > 1$ dan is de functie $f(x) = \log_a(x)$ *strikt stijgend*: $x < y \iff \log_a(x) < \log_a(y)$
- Als $0 < a < 1$ dan is de functie $f(x) = \log_a(x)$ *strikt dalend*: $x < y \iff \log_a(x) > \log_a(y)$
- De functie $f(x) = \log_a(x)$ is enkel gedefinieerd voor $x > 0$.
- De functiewaarden $\log_a(x)$ kunnen alle reële waarden aannemen.
- De grafiek van $f(x) = \log_a(x)$ snijdt de x-as steeds in het punt $(1, 0)$ (want $\log_a 1 = 0$)
- De grafiek van $f(x) = \log_a(x)$ snijdt de y-as niet ($\log_a$ is niet gedefinieerd in 0)
- De grafiek van $f(x) = \log_a(x)$ snijdt de rechte $y = 1$ in het punt $(a, 1)$ (want $\log_a(a) = 1$)
- De functies $f(x) = \log_a(x)$ en $f(x) = a^x$ zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de eerste bissectrice.

Voorbeeld 3.2.3.



Definitie 3.2.2.

Als het grondtal a de waarde $e = 2.71\ldots$ heeft, dan schrijven we de functie $f(x) = \log_e(x)$ als

$$f(x) = \ln x$$

en geldt dus

$$\ln x = r \Leftrightarrow e^r = x$$

We herhalen de eigenschappen voor $f(x) = \ln x$

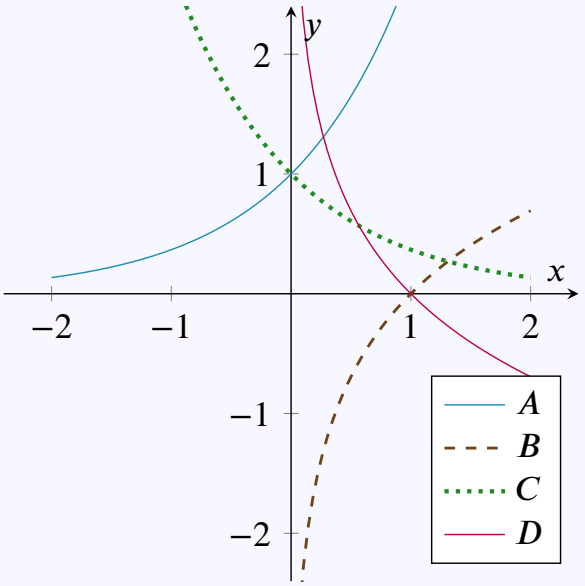
$$\ln e^x = x \qquad \text{en} \qquad e^{\ln x} = x.$$

Voorbeeld 3.2.4 (Grafiek van $f(x) = \ln x$)**.**

Welk van onderstaande grafieken is van de functie $f(x) = \ln(x)$?

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Logaritmische functies



Deze vraag kunnen we beantwoorden louter op basis van de vorm van de grafieken. Omdat $f(x) = \ln(x)$ een logaritmische functie is, is deze enkel gedefinieerd voor strikt positieve waarden van x. Omdat het grondtal $e > 1$, moet de grafiek stijgend zijn. Enkel grafiek B voldoet hieraan.

Opmerking 3.2.2 (Eigenschappen logaritmische functies)**.**

Je kan soms extra eigenschappen van logaritmische functies terugvinden op basis van de rekenregels voor logaritmen. Zo kan je de op het eerste zicht tamelijk ingewikkelde functie $f(x) = \log_4(2^x)$ herschrijven als

$$f(x) = \log_4(2^x) = x \cdot \log_4(2) = x \cdot \log_4(4^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}.$$

en vaststellen dat dit gewoon de lineaire functie $f(x) = \frac{1}{2}x$ is.

Voorbeeld 3.2.5 (Domein logaritmische functie)**.**

Bepaal het domein van de functie $f(x) = \log_3\left(\frac{3}{4-x}\right)$. Bepaal dus alle mogelijke reële waarden van x waarvoor het functievoorschrift geldig is.

- De noemer van de breuk binnen de logaritme mag niet nul mag zijn: $4 - x \neq 0$ en dus $x \neq 4$.
- Een logaritme kan enkel berekend worden voor een strikt positief getal. Dus moet $\frac{3}{4-x} > 0$. Omdat de teller van deze breuk strikt positief is, moet ook de noemer dat zijn: $4 - x > 0$ of $x < 4$.

Alleen als aan deze twee voorwaarden voldaan is, kan de functiewaarde bepaald worden.

Het domein van deze functie is dus het interval $]-\infty, 4[$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2.A Oefeningen exponentiële en logaritmische functies

Oefening 3.2.1. Vereenvoudig $e^{3\ln 2} = \ldots\ldots$

Oefening 3.2.2. Herschrijf volgende uitdrukkingen zonder exponentiële of logaritmische functies:

1. $4^{\log_2(x)} = \ldots\ldots$

2. $27^{\log_3(x)} = \ldots\ldots$

Oefening 3.2.3. Bepaal het domein van de functie $f(x) = \ln(\sqrt{2x} - 4)$: $\ldots\ldots$

Oefening 3.2.4. Los volgende vergelijkingen op:

1. $5^x = 7 \qquad x = \ldots\ldots$

2. $\ln(x^3) = -1 \qquad x = \ldots\ldots$

3. $e^{3x} = 2 \qquad x = \ldots\ldots$

Oefening 3.2.5. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $e^{2x} + e^x - 6 = 0 \qquad x = \ldots\ldots$

2. $e^x - 4e^{-x} = 3 \qquad x = \ldots\ldots$

Oefening 3.2.6. De vergelijking $4^x - 5 \cdot 2^x = 24$ werd opgelost naar x. Toch klopt de oplossing niet als we deze terug invullen in de vergelijking. Zoek de fout in de redenering en geef de juiste oplossing.

$$\begin{aligned} 2^{2x} - 5 \cdot 2^x &= 24 \\ \log_2 2^{2x} - \log_2(5 \cdot 2^x) &= \log_2 24 \\ 2x - \log_2 5 - \log_2 2^x &= \log_2 24 \\ 2x - \log_2 5 - x &= \log_2 24 \\ x &= \log_2 24 + \log_2 5 \\ x &= \log_2(24 \cdot 5) \\ x &= \log_2 120 \end{aligned}$$

De juiste oplossing: $x = \ldots\ldots$

Oefening 3.2.7. Schets de grafiek van de functie $\ln C(t)$ met $C(t) = 3e^{-2t}$.

Volgende oefening is enkel voor studenten die het vak chemie volgen. Je hoeft de betekenis van de gebruikte symbolen niet te kennen om de oefening te kunnen oplossen.

Oefening 3.2.8.

1. Gegeven $\Delta G^0 = -n \cdot F \cdot \Delta E^0$ en $\Delta G^0 = -R \cdot T \cdot \ln(K_{ev})$.

Toon aan dat $K_{ev} = 10^{\dfrac{n \cdot F \cdot \Delta E^0}{2,303 \cdot R \cdot T}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2.A Oefeningen exponentiële en logaritmische functies

2. Gegeven $0,89 = 1,5 - \frac{0,059}{2} \log\left(\frac{1}{\frac{10^{-14}}{K_a}10^{-14}}\right)$.

Toon aan dat $K_a = 4,7.10^{-8}$.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/18H.6)