KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Voorbereiding
Week 3
Oefenzitting 1

(Versie 2026/09/17H.41)

Inhoudsopgave

1 Quiz week 3 Oefenzitting 1 1.1

1.1 Quiz week 3 Oefenzitting 1 . . . . . 1.1

2 Goniometrie 2.1

2.1 Radialen 2.1

2.2 Goniometrische cirkel en goniometrische getallen 2.3

2.2.1 Rechthoekige driehoeken 2.5

2.2.2 Standaardhoeken 2.6

2.3 Verwante hoeken 2.8

2.4 Goniometrische functies 2.11

2.5 Cyclometrische functies 2.15

3 Poolcoordinaten 3.1

3.1 Poolcoördinaten 3.1

1.1 Quiz week 3 Oefenzitting 1

Oefening 1.1.1 (Goniometrie).

1. Hoeveel radialen is $120°$? …

2. $\sin \frac{3\pi}{2} = \ldots$

3. Gegeven $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos \frac{5\pi}{6} =$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Geef alle oplossingen van de vergelijking $\sin(\frac{\pi}{2}x) = 0$

…

5. $\operatorname{bgtan} 1 = \ldots$

Oefening 1.1.2 (Poolcoördinaten).

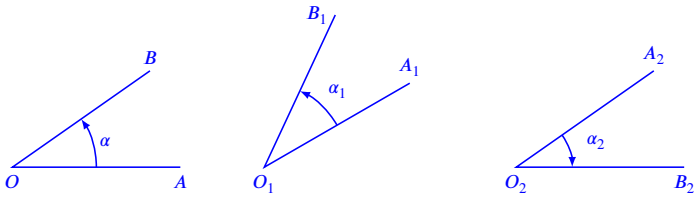
1. Het punt A met poolcoördinaten $(1, \pi)$ heeft cartesische coördinaten $x = \ldots$ en $y = \ldots$

2. Het punt B met cartesische coördinaten $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ heeft poolcoördinaten $r = \ldots$ en $\theta = \ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Radialen

Goniometrie is de studie van de zogenaamde *georiënteerde hoeken* $\measuredangle AOB$ met *hoekpunt* O, *eerste been* OA en *tweede been* OB. Als we dergelijke hoeken een naam geven, kiezen we traditioneel Griekse letters.



Twee *georiënteerde hoeken* $\alpha = \measuredangle AOB$ en $\alpha_1 = \measuredangle A_1O_1B_1$ zijn per afspraak *gelijk* als ze via verschuivingen en draaiingen op elkaar kunnen gelegd worden. In de tekening hierboven kunnen we hoek $\measuredangle AOB$ *niet* op $\measuredangle A_2O_2B_2$ leggen zonder te spiegelen. $\measuredangle AOB$ en $\measuredangle A_2O_2B_2$ zijn dus *verschillende* hoeken. Ook $\measuredangle AOB$ en $\measuredangle BOA$ zijn verschillende hoeken. We noemen de georiënteerde hoek $\measuredangle BOA$ de *tegengestelde* hoek van $\measuredangle AOB$, en noteren die met een minteken: als $\alpha = \measuredangle AOB$, dan is $-\alpha = \measuredangle BOA$. Als het punt B op de rechte OA ligt is er geen echte hoek, en spreken we van de *nulhoek* $\measuredangle AOA$.

We *meten* hoeken traditioneel in (boog)graden, waarbij een rechte hoek $90°$ is, een gestrekte hoek $180°$ en de nulhoek $0°$ of $360°$. Een geöriënteerde hoek meten we 'op $360°$ na', dus per afspraak zijn $20°$, $20° + 360° = 380°$, $20° + 720° = 740°$ en $20° - 360° = -340°$ allemaal maatgetallen van *dezelfde georienteerde hoek*. We schrijven dikwijls $\alpha + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$ voor *al* de maatgetallen van een hoek.

In de wiskunde is het veel handiger hoeken te meten in *radialen*. Daarbij meet een rechte hoek per afspraak $\frac{\pi}{2}$, een gestrekte hoek π en de nulhoek 0 of 2π. Het maatgetal ligt dus maar vast 'op 2π na', dus per afspraak zijn $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{25\pi}{6}$ en $\frac{\pi}{6} - 2\pi = \frac{-11\pi}{6}$ allemaal maatgetallen van dezelfde hoek. We schrijven dikwijls $\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ voor *al* de maatgetallen van een hoek.

Per afspraak noteren we de 'eenheid'rad voor radialen meestal niet, en we schrijven dus meestal een hoek met grootte π in plaats van een hoek met grootte π rad.

Het verband tussen een hoek gemeten in graden en radialen wordt gegeven door $360° = 2\pi$. We vinden dus: $\pi = 180°$, $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{3\pi}{4} = 135°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$, $\frac{3\pi}{2} = 270°$, ...

Voorbeeld 2.1.1 (Omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd)**.**

Je kan de omzetting van graden naar radialen maken met behulp van de regel van drie. Vertrekkende van het gegeven dat $360°$ gelijk is aan 2π radialen, bereken je aan hoeveel radialen één graad gelijk is, en dan ook aan hoeveel radialen bijvoorbeeld 7 graden zijn. Dezelfde redenering werkt voor de omrekening van radialen naar graden.

Graden	Radialen	Graden	Radialen
$360°$	2π	$360°$	2π
$: 360$	$: 360$	$: 2\pi$	$: 2\pi$
$1°$	$\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$	$\frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$	1
$\times 7$	$\times 7$	$\times 7$	$\times 7$
$7°$	$\frac{7\pi}{180}$	$\frac{7 \cdot 180°}{\pi}$	7

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Radialen

We zien dus dat 7° gelijk is aan $\frac{7\pi}{180}$ radialen en dat 7 radialen gelijk is aan $\frac{7 \cdot 180}{\pi}°$.

Oefening 2.1.1.

1. Hoeveel radialen is 120°? ……

2. Hoeveel graden is 1 rad? ……

Oefening 2.1.2. Zet om van graden naar radialen of omgekeerd. (Noteer pi voor π.)

Graden	*Radialen*
8°	……
…… °	$7\pi/4$
…… °	$\pi/10$
90°	……
1°	……

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/17H.41)

2.2 Goniometrische cirkel en goniometrische getallen

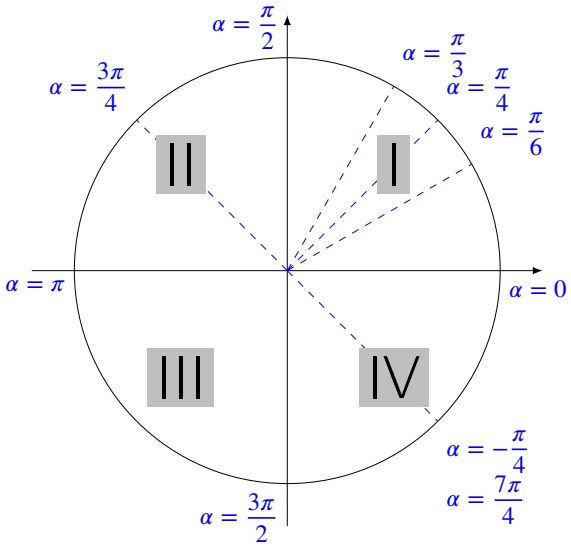
Omdat we hoeken vrij kunnen verschuiven en draaien (maar niet spiegelen), kunnen we elke hoek verplaatsen zodat zijn hoekpunt in de oorsprong van het vlak ligt en zijn eerste been op de positieve x-as. Het tweede been snijdt dan de cirkel met straal 1 en centrum de oorsprong in een uniek punt.

Definitie 2.2.1.

De **goniometrische cirkel** is de cirkel met straal 1 en centrum in de oorsprong.

Door het hoekpunt in de oorsprong te leggen, en het eerste been op de positieve x-as, komt met elke georiënteerde hoek α een uniek snijpunt P_α van het tweede been met de goniometrische cirkel overeen, en omgekeerd bepaalt elk punt P_α op de goniometrische cirkel een georiënteerde hoek α.

De goniometrische cirkel wordt verdeeld in vier **kwadranten**, die vanaf rechtsboven tegen de klok in genummerd worden met Romeinse cijfers I, II, III, IV zoals op de figuur hieronder. Let op de ligging van de hoeken, waarvan de grootte is uitgedrukt in radialen, deze moet je zonder nadenken weten liggen op de goniometrische cirkel.



Definitie 2.2.2.

De **cosinus** van de hoek α is de x-coördinaat van het punt P_α,
de **sinus** van de hoek α is de y-coördinaat van het punt P_α:

$$P_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

Per definitie is ook

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{(tangens)} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \text{(secans)}$$

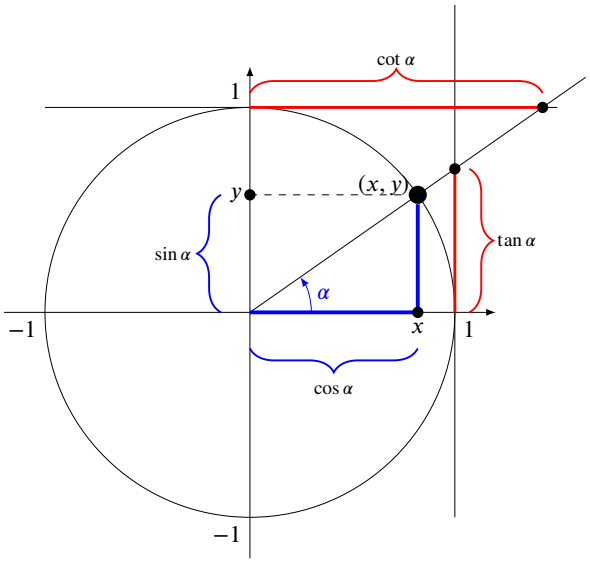
$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{(cotangens)} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \quad \text{(cosecans)}$$

We noemen de $\sin, \cos, \tan, \cot, \sec, \csc$ de **goniometrische getallen** van een hoek.

De cosinus en de sinus van een hoek α kan je op de goniometrische cirkel aflezen op de *assen*. Ook de tangens en de cotangens kan je aflezen, en wel op de *raaklijnen* aan de goniometrische cirkel in punten $(1,0)$ en $(0,1)$:

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Goniometrische cirkel en goniometrische getallen



Opmerking 2.2.1. De omtrek van de goniometrische cirkel is 2π. De *booglengte* van een kwart van deze goniometrische cirkel, bijvoorbeeld het kwart gelegen in het eerste kwadrant, is dan $\frac{\pi}{2}$. Dit is net de grootte van de bijhorende hoek, gemeten in radialen. In het algemeen geldt dat de lengte van de cirkelboog van de goniometrische cirkel gelegen tussen de twee benen van een hoek gelijk is aan het maatgetal van de hoek uitgedrukt in radialen, wanneer we dit maatgetal kiezen tussen 0 en 2π.

Oefening 2.2.1. Lees volgende waarden af op de goniometrische cirkel:

1. $\sin 2\pi = \ldots\ldots$ $\cos 2\pi = \ldots\ldots$
2. $\sin \frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos \frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$
3. $\sin \frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos \frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$
4. $\cos \pi = \ldots\ldots$ $\sin \pi = \ldots\ldots$
5. $\cos(-\pi) = \ldots\ldots$ $\sin(-\pi) = \ldots\ldots$
6. $\tan \pi = \ldots\ldots$

De vergelijking van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ leidt tot de hoofdformule van de goniometrie als we gebruiken dat voor de coördinaten van een punt P_α op de goniometrische cirkel geldt dat $(x, y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ voor een hoek α:

Eigenschap 2.2.1 (Hoofdformule van de goniometrie)**.** Voor elke hoek α geldt:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad \text{(hoofdformule goniometrie)}$$

Hieruit volgt onmiddellijk ook dat

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{(deel de hoofdformule door } \cos^2\alpha\text{)}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \text{(deel de hoofdformule door } \sin^2\alpha\text{)}$$

Opmerking 2.2.2.

Let op de notatie voor machten: $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2 = \cos^2(\alpha) \neq \cos(\alpha^2) = \cos\alpha^2$.

Merk ook op dat in het algemeen $\cos(\alpha+\beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta$ en $\cos 2\alpha \neq 2\cos\alpha$.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Goniometrische cirkel en goniometrische getallen

Inderdaad, $\cos(\alpha+\beta) \stackrel{?}{=} \cos\alpha + \cos\beta$ werkt al niet voor bijvoorbeeld $\beta = 0$:

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha+0) \neq \cos\alpha + \cos 0 = \cos\alpha + 1$$

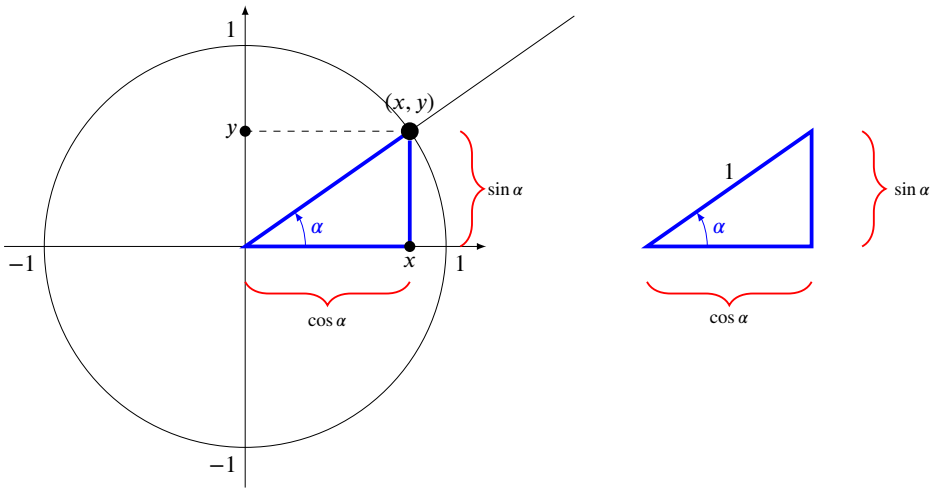
en $\cos 2\alpha \stackrel{?}{=} 2\cos\alpha$ werkt niet voor bijvoorbeeld $\alpha = 0$

$$\cos(2\cdot 0) = \cos 0 = 1 \text{ maar } 2\cdot\cos 0 = 2\cdot 1 = 2$$

Gelijkaardige problemen doen zich voor bij sinus, tangens, secans en cosecans. Er bestaat een hele collectie formules om toch de goniometrische getallen van sommen te berekenen.

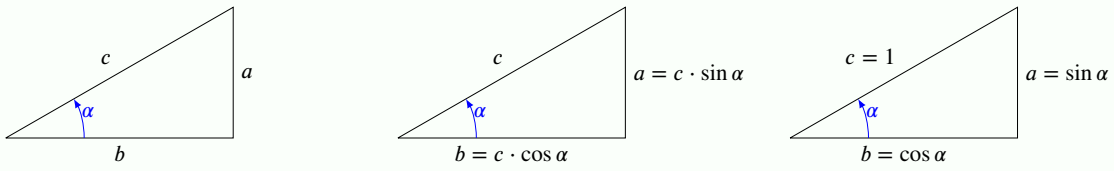
2.2.1 Rechthoekige driehoeken

Voor *scherpe hoeken* kunnen we de sinus en cosinus ook bekijken in een **rechthoekige driehoek**. Omdat het punt $P_\alpha = (x, y)$ op de goniometrische cirkel ligt, heeft de schuine zijde van de rechthoekige driehoek op onderstaande figuur lengte 1. De lengte van de *aanliggende zijde* van hoek α is gelijk aan $\cos\alpha$, de lengte van de *overstaande zijde* is $\sin\alpha$.



In volgende eigenschap bekijken we dit in rechthoekige driehoeken waarvan de lengte van de schuine zijde niet gelijk aan 1 hoeft te zijn. We moeten in dat geval *herschalen* met de lengte van de schuine zijde:

Eigenschap 2.2.2 (Sinus en cosinus in een rechthoekige driehoek)**.**



CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Goniometrische cirkel en goniometrische getallen

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{schuine zijde}}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{aanliggende zijde}}{\text{schuine zijde}}$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

2.2.2 Standaardhoeken

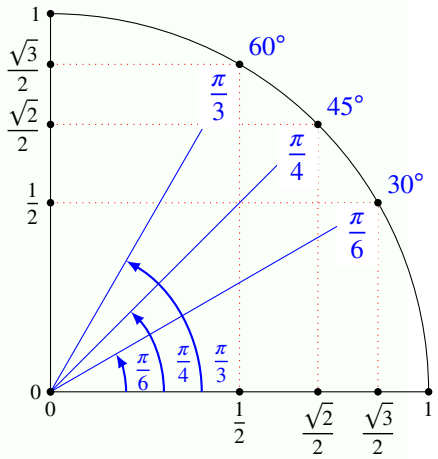
Voor een beperkt aantal hoeken blijkt het erg interessant te zijn de goniometrische getallen te kennen: enerzijds omdat ze in de praktijk regelmatig voorkomen, maar vooral ook omdat er *exacte* uitdrukkingen voor bestaan. Je hoeft deze getallen niet van buiten te kennen, deze tabel staat immers ook in de cursustekst van Wiskunde I, maar het is wel gemakkelijk als je dit niet telkens moet gaan opzoeken.

Eigenschap 2.2.3 (Goniometrische getallen van standaardhoeken)**.**

Onderstaande tabel is erg eenvoudig te onthouden:

Je schrijft de hoeken uit de tabel van klein naar groot, en de bijhorende sinussen zijn dan het rijtje halve vierkantswortels (de tweede rij in de tabel). De cosinus is hetzelfde rijtje omgekeerd, en de tangens is natuurlijk het quotiënt van de sinus en de cosinus.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/



$\tan\pi/2$ is niet gedefinieerd: $\tan\pi/2 = \frac{\sin\pi/2}{\cos\pi/2}$, maar $\cos\pi/2 = 0$.

Merk op dat $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Opmerking 2.2.3.

Een rekenmachine geeft enkel numerieke oplossingen, en het is soms veel handiger om met uitdrukkingen als $\sqrt{2}$ te rekenen dan met $1,41421\ldots$. Dat is bijvoorbeeld het geval als je de waarde even verder moet kwadrateren, wat met goniometrische formules wel eens voorkomt.

CC BY-NC-SA 4.0

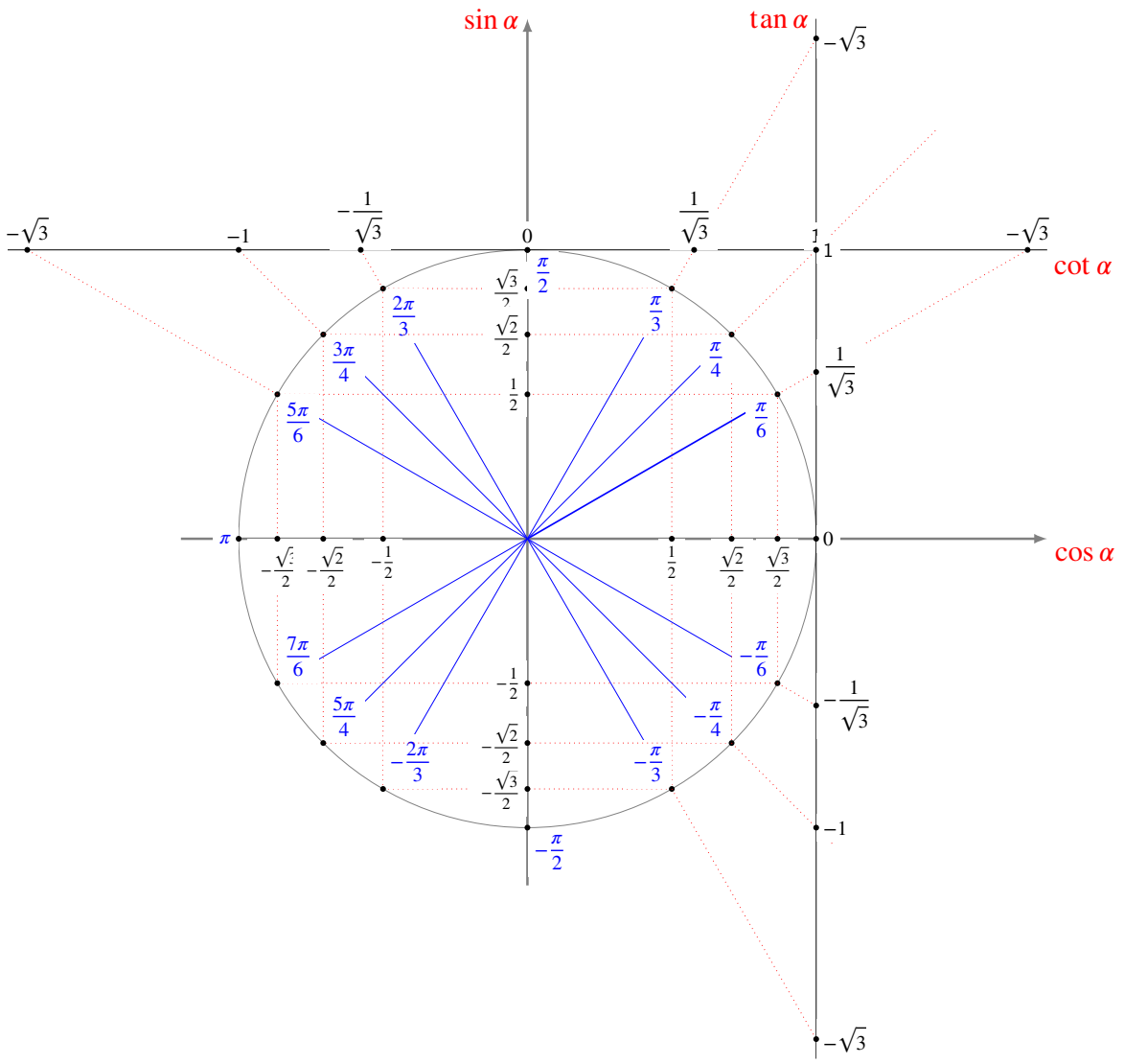
2.2 Goniometrische cirkel en goniometrische getallen

Volgende figuur van de goniometrische cirkel laat toe om op basis van vorige tabel ook goniometrische getallen van hoeken in de andere kwadranten af te lezen.

Je kan de sinus aflezen op de rechte $x = 0$ (dus de y-as), en de tangens op de rechte $x = 1$. Je leest de *co*sinus op de rechte $y = 0$ (dus de x-as), en de *co*tangens op de rechte $y = 1$.

Merk op dat je ook het *teken* van de sinus, cosinus en tangens dadelijk kan aflezen.

Je leert dit best niet van buiten, maar bestudeert het tot je er de evidentie van inziet.



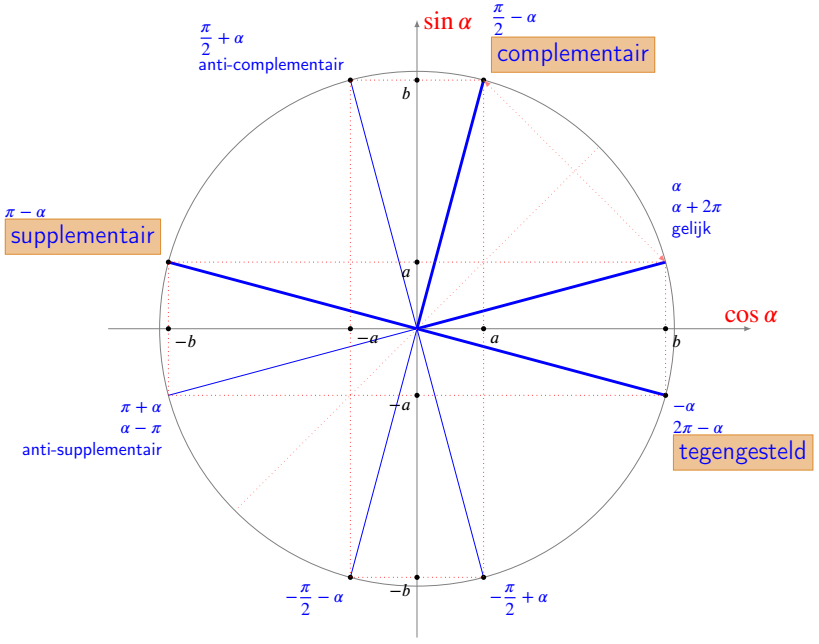
2.3 Verwante hoeken

Op de goniometrische cirkel zien we dat er eenvoudige verbanden zijn tussen de goniometrische getallen van zogenaamde *verwante* hoeken. Uit de gekende waarden voor sinus, cosinus, tangens en cotangens van enkele *standaardhoeken*, volgen dus ook de waarden van veel meer hoeken. Bovendien kunnen we het berekenen van goniometrische getallen van een willekeurige hoek steeds herleiden tot het berekenen van een goniometrisch getal van een hoek uit het eerste kwadrant.

Definitie 2.3.1 (Verwante hoeken)**.** Elke hoek α heeft volgende zogenaamde **verwante** hoeken:

$-\alpha$	is de **tegengestelde** hoek	(de som van α en $-\alpha$ is gelijk aan 0)
$\pi - \alpha$	is de **supplementaire** hoek	(de som van α en $\pi - \alpha$ is gelijk aan π)
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	is de **complementaire** hoek	(de som van α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$ is gelijk aan $\frac{\pi}{2}$)
$\pi + \alpha$	is de **anti-supplementaire** hoek	(het verschil van α en $\pi - \alpha$ is gelijk aan π)
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	is de **anti-complementaire** hoek	(het verschil van α en $\frac{\pi}{2} + \alpha$ is gelijk aan $\frac{\pi}{2}$)

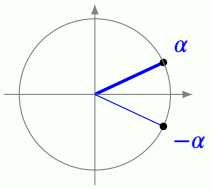
De verwante hoeken van een hoek α in het eerste kwadrant worden hieronder geschetst op de goniometrische cirkel. Voor de volledigheid zijn ook de hoeken $-\frac{\pi}{2} - \alpha$ en $-\frac{\pi}{2} + \alpha$ opgenomen in de figuur.



De benamingen van de verwante hoeken zijn niet belangrijk om te onthouden. Wel belangrijk is om onderstaande eigenschappen zelf te kunnen terugvinden door het maken van een figuur en deze eigenschappen te kunnen gebruiken in oefeningen.

Eigenschap 2.3.1 (Tegengestelde hoeken)**.**

$$\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot\alpha \end{aligned}$$

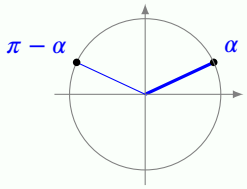


CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Verwante hoeken

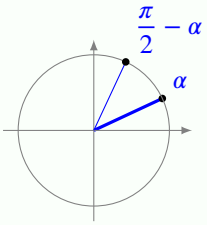
Eigenschap 2.3.2 (Supplementaire hoeken).

$$\begin{aligned}\sin(\pi-\alpha) &= \sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha) &= -\cos\alpha\\ \tan(\pi-\alpha) &= -\tan\alpha\\ \cot(\pi-\alpha) &= -\cot\alpha\end{aligned}$$



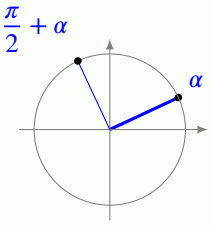
Eigenschap 2.3.3 (Complementaire hoeken).

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\alpha\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \sin\alpha\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cot\alpha\\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \tan\alpha\end{aligned}$$



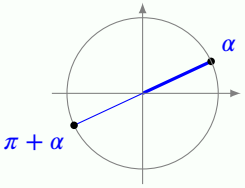
Eigenschap 2.3.4 (Anti-complementaire hoeken).

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\alpha\\ \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\alpha\\ \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\cot\alpha\\ \cot\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\tan\alpha\end{aligned}$$



Eigenschap 2.3.5 (Anti-supplementaire hoeken).

$$\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\pi) &= -\sin\alpha\\ \cos(\alpha\pm\pi) &= -\cos\alpha\\ \tan(\alpha\pm\pi) &= \tan\alpha\\ \cot(\alpha\pm\pi) &= \cot\alpha\end{aligned}$$

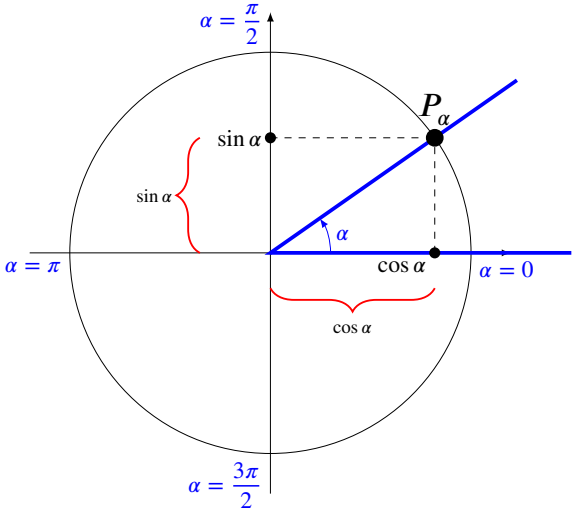


Oefening 2.3.1. Zoek aan de hand van de goniometrische cirkel (zie onder) waaraan volgende uitdrukkingen gelijk zijn.

1. $\cos(\pi-\alpha) =$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ |
2. $\sin(\alpha-\pi) =$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ |
3. $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) =$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ |
4. $\sin(\pi+\alpha) =$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ |
5. $\tan(\alpha-\frac{\pi}{2}) =$ | $-\tan\alpha$ | $-\cot\alpha$ | $\tan\alpha$ | $\cot\alpha$ |

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Verwante hoeken



Oefening 2.3.2. Bereken volgende goniometrische getallen door gebruik te maken van de gekende waarden van de standaardhoeken $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ en $\frac{\pi}{2}$ en de symmetrieën voor de verwante hoeken.

1. $\cos\frac{\pi}{3} =$

2. $\cos\frac{2\pi}{3} =$

3. $\cos\frac{5\pi}{6} =$

4. $\sin\frac{7\pi}{4} =$

5. $\cos\frac{-\pi}{2} =$

6. $\cos\frac{-2\pi}{3} =$

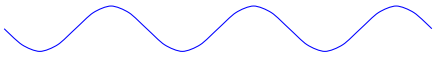
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Goniometrische functies

Met een hoek α hebben we een getal $\sin\alpha$ geassocieerd. Door nu de hoek α te laten *variëren* (dus 'variabel' te maken), bekomen we een *functie* in de 'variabele' α. In de wiskunde gebruiken we dikwijls de letter x voor variabelen. We zullen hier dus ook meestal spreken van $\sin x$ in plaats van $\sin\alpha$. Ook van de cosinus, de tangens en de cotangens kunnen we functies maken.

We gaan nu na hoe de grafieken van deze functies er uit zien. We nemen als voorbeeld $y = \sin(x)$, waarvan velen de vorm kennen of minstens herkennen:



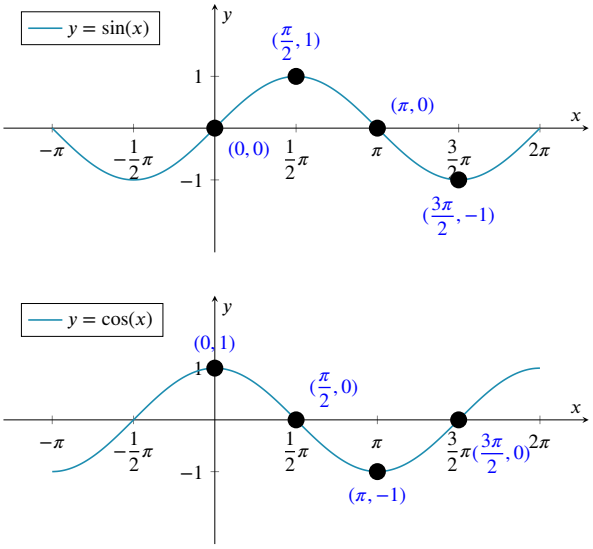
Zonder aanduidingen op de assen ziet de grafiek van $y = \cos(x)$ er net hetzelfde uit. Het is dus belangrijk om te weten waar de nulpunten, de maximale en de minimale waarden liggen.

Oefening 2.4.1. Lees volgende waarden af op de goniometrische cirkel:

1. $\sin 0 = \ldots\ldots$ $\sin\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\sin\pi = \ldots\ldots$ $\sin\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\sin 2\pi = \ldots\ldots$

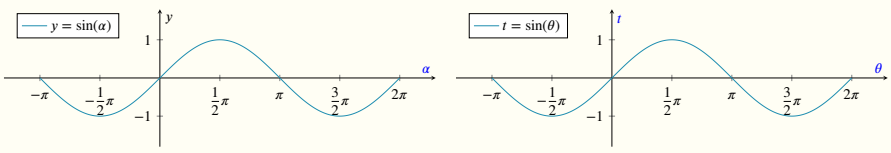
2. $\cos 0 = \ldots\ldots$ $\cos\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos\pi = \ldots\ldots$ $\cos\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos 2\pi = \ldots\ldots$

Met de waarden uit vorige oefening kunnen we nu enkele waarden op de x-as en y-as noteren:



Opmerking 2.4.1.

- Als we sinus, cosinus en tangens als functies beschouwen, geldt dat in principe *altijd* met de variabele uitgedrukt in radialen.
- Als we de sinus beschouwen als een functie, gebruiken we dikwijls de letter x als variabele eerder dan α. In toepassingen gebruikt men ook andere letters. Men tekent dan bijvoorbeeld ook grafieken in een αy-vlak of een θt-vlak



CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Goniometrische functies

Op basis van de grafiek kan je sommige goniometrische vergelijkingen direct oplossen. Je kan hiervoor ook de goniometrische cirkel gebruiken.

Oefening 2.4.2. Geef alle oplossingen van volgende vergelijkingen:

1. $\sin x = 0$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. $\sin x = 1$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

3. $\cos x = 0$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

4. $\cos x = 1$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Oefening 2.4.3. Geef alle oplossingen van volgende vergelijkingen:

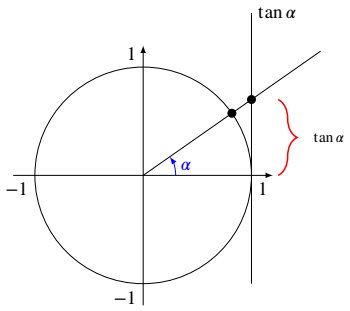
1. $\sin(\frac{\pi}{2}x) = 0$ heeft als oplossingsverzameling: ... ...

2. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ heeft als oplossingsverzameling: ... ...

Een gelijkaardig onderzoek kan ook voor de tangensfunctie $y = \tan(x)$ gedaan worden, op basis van de definitie

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\ .$$

De tangensfunctie is niet gedefinieerd in de nulpunten van de noemer, dus als $\cos x = 0$, zoals bijvoorbeeld in $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, of algemeen als $x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Waar $\sin x = 0$ zal ook de tangensfunctie nul zijn.
We kunnen de tangens ook aflezen op de goniometrische cirkel:

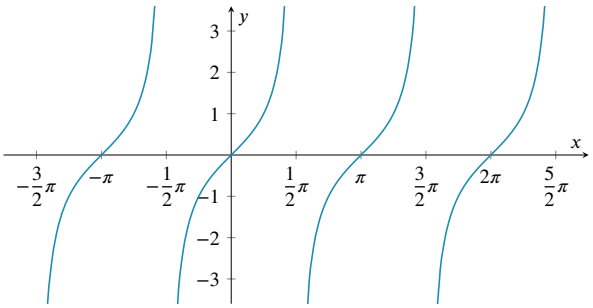


We lezen op de goniometrische cirkel af dat $\tan 0 = 0$, en dat naarmate de hoek groter wordt ook de tangens van de hoek groter wordt. Als de hoek de waarde $\frac{\pi}{2}$ krijgt, dan bestaat de tangens niet meer, dan wordt deze 'oneindig'. Volledig gelijkaardig wordt de tangens steeds negatiever als de hoek varieert van 0

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Goniometrische functies

tot $-\frac{\pi}{2}$. Door voldoende punten te berekenen, kan je nagaan dat de grafiek van de tangensfunctie er als volgt uit ziet:

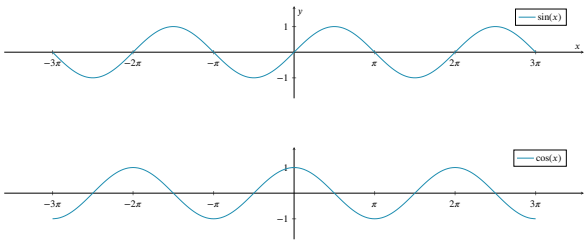


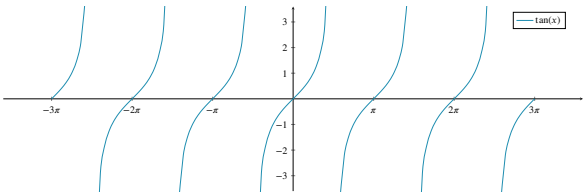
Oefening 2.4.4. Geef alle oplossingen van volgende vergelijking:

1. $\tan x = 0$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Op de grafieken van sin, cos en tan kan je onderstaande eigenschappen aflezen (en je moet ze dus zeker niet van buiten leren).





Eigenschap 2.4.1 (Eigenschappen van goniometrische functies)**.**

(a) de nulpunten van de goniometrische functies worden gegeven door:

- de sinusfunctie heeft nulpunten in $k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft nulpunten in $\frac{\pi}{2} + k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de tangensfunctie heeft nulpunten in $k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$

(b) de maxima en minima van de goniometrische functies worden gegeven door:

- de sinusfunctie heeft maxima in $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de sinusfunctie heeft minima in $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft maxima in $2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft minima in $\pi + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de tangensfunctie heeft geen maxima of minima

(c) $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

(d) $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Goniometrische functies

(e) $\tan(x+\pi) = \tan(x)$

(f) de tangensfunctie heeft *verticale asymptoten* in de punten $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$: in die punten zelf is de tangens niet gedefinieerd, maar de grafiek komt er wel willekeurig dicht tegen de verticale rechten $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

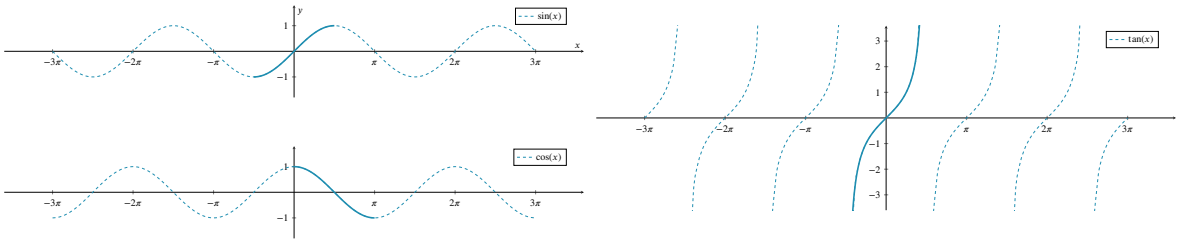
Eigenschappen (c),(d) en (e) betekenen dat de sinus, cosinus en tangens periodische functies zijn.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/17H.41)

2.5 Cyclometrische functies

We bestuderen de *inverse functies* van de gekende functies sinus, cosinus en tangens. We zoeken dus niet de sinus van een bepaald getal x (dus niet r zodat $r = \sin x$), maar net het omgekeerde: we krijgen $r \in [-1, 1]$ en zoeken x zodat $\sin x = r$. Het probleem is dat er *meerdere* dergelijke getallen x bestaan. Voor $r = 0$ weten we bijvoorbeeld dat $\sin(0) = \sin(\pi) = \sin(-\pi) = \sin(2\pi) = \sin(3\pi) = 0$. De sinusfunctie gedefinieerd op $\mathbb{R}$ heeft dus geen inverse functie.

Om dit probleem op te lossen kijken we eerst naar de grafieken van sin, cos en tan:



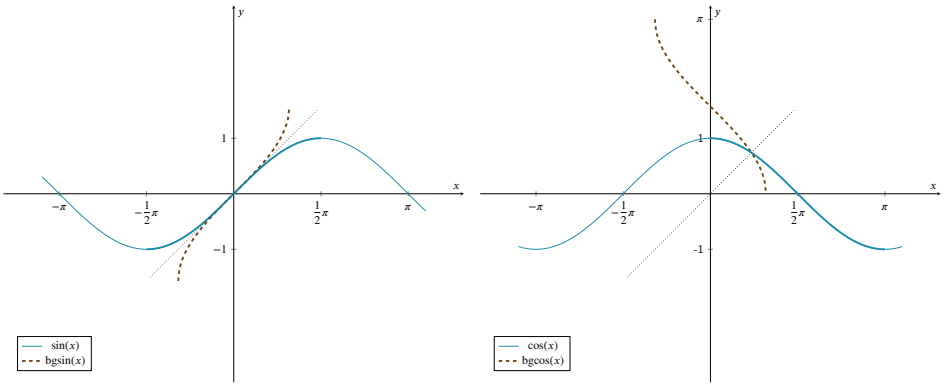
Op de grafiek kan je zien dat, wanneer we het domein van sin beperken tot $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *wel* geldt dat voor elke $r \in [-1, 1]$ er *één unieke* x is zodat $\sin x = r$. Om dezelfde reden spreken we af om het domein van cos te beperken tot $[0, \pi]$ en dat van tan tot $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Definitie 2.5.1 (Cyclometrische functies)**.**

Volgende **cyclometrische functies** zijn de inversen van de goniometrische functies als we het domein van die goniometrische functies gepast beperken:

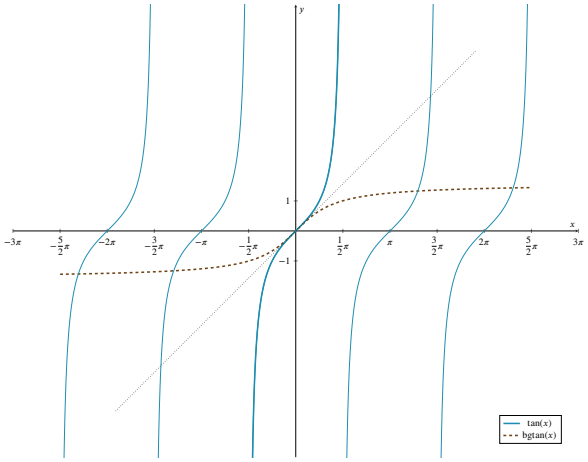
- De inverse van $y = \sin x$ beperkt tot het domein $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ is $y = \text{bgsin}\, x$ met domein $[-1, 1]$.
- De inverse van $y = \cos x$ beperkt tot het domein $[0, \pi]$ is $y = \text{bgcos}\, x$ met domein $[-1, 1]$.
- De inverse van $y = \tan x$ beperkt tot het domein $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ is $y = \text{bgtan}\, x$ met domein $\mathbb{R}$.

We bekomen de *grafiek* van de cyclometrische functies door het domein van de goniometrische functies te beperken, en de grafiek te spiegelen over de eerste bissectrice:

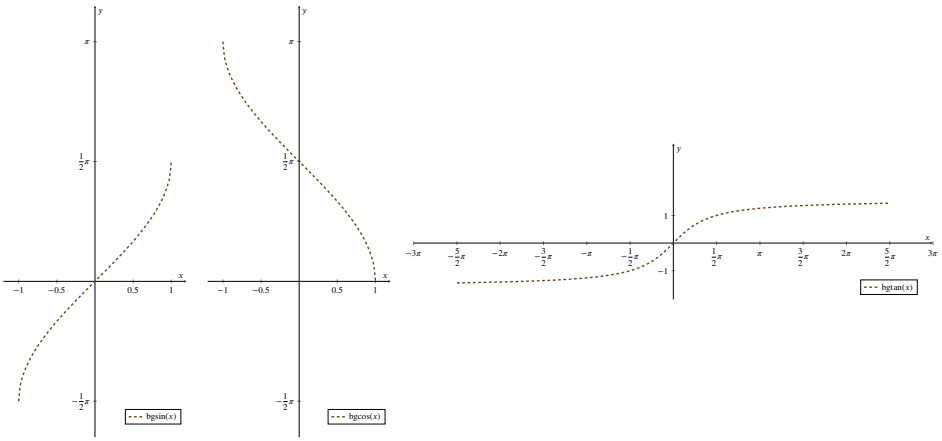


CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Cyclometrische functies



en dat resulteert in volgende grafieken van bgsin, bgcos en bgtan:



Opmerking 2.5.1.

- bgtan y is de hoek in $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, uitgedrukt in radialen, waarvan de tangens y is. (analoog voor bgsin en bgcos)
- Men gebruikt zowel de notaties bgtan, Bgtan, arctan als atan. (analoog voor bgsin en bgcos)
- De boogsinus en boogtangens is *altijd* een getal tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$, en dat is dus *altijd* een hoek in kwadrant I of IV.
- De boogcosinus van een getal is *altijd* een getal tussen 0 en π, en dat is dus *altijd* een hoek in kwadrant I of II.
- Zoals steeds voor inverse functies geldt dat de grafiek van de sin en bgsin elkaars *spiegelbeeld* zijn over de eerste bissectrice $y = x$. Idem voor cos en bgcos, en tan en bgtan.
- bgsin en bgcos zijn slechts gedefinieerd op het interval $[-1, 1]$.
- bgtan is gedefinieerd op $\mathbb{R}$.

Voorbeeld 2.5.1.

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Cyclometrische functies

- $\text{bgsin}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ want $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{6}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- $\text{bgsin}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ want $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ en $-\frac{\pi}{6}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- $\text{bgcos}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ want $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\frac{\pi}{4}$ ligt tussen 0 en π.
- $\text{bgcos}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$ want $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\frac{3\pi}{4}$ ligt tussen 0 en π.
- $\text{bgtan}\,1 = \frac{\pi}{4}$ want $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ en $\frac{\pi}{4}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- $\text{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ want $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$ en $-\frac{\pi}{4}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.

Wat volgt mag je overslaan:

Omdat bgtan niet de inverse is van de gewone tangensfunctie maar slechts van de tangensfunctie beperkt tot een deel van het domein is $\text{bgtan}(\tan(\alpha))$ niet altijd gelijk is aan α.

We bekijken van naderbij wat er gebeurt als we de functies bgtan en tan samenstellen:

Voorbeeld 2.5.2.

We weten bijvoorbeeld dat $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\text{bgtan}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$, $\text{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ en $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$. Hiermee kunnen we berekenen dat

- $\text{bgtan}(\tan(\frac{\pi}{4})) = \text{bgtan}(1) = \frac{\pi}{4}$. Voor $\alpha = \frac{\pi}{4}$ geldt bijgevolg $\text{bgtan}(\tan(\alpha)) = \alpha$.
- $\text{bgtan}(\tan(\frac{3\pi}{4})) = \text{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Voor $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ geldt $\text{bgtan}(\tan(\alpha)) \neq \alpha$. Hier geldt dat $\text{bgtan}(\tan(\frac{3\pi}{4})) = -\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - \pi$.

In het algemeen geldt voor hoeken tussen $\frac{\pi}{2}$ en $\frac{3\pi}{2}$ (hoeken in het 2de en 3de kwadrant) dat:

$$\text{bgtan}(\tan\alpha) = \alpha - \pi \text{ of dus } \alpha = \text{bgtan}(\tan\alpha) + \pi.$$

Voor hoeken in het 1ste en 4de kwadrant geldt wel $\text{bgtan}(\tan\alpha) = \alpha$.

Oefening 2.5.1. Bereken volgende uitdrukkingen.

1. $\text{bgtan}(\tan\frac{\pi}{3}) = \ldots\ldots$

2. $\text{bgtan}(\tan\frac{2\pi}{3}) = \ldots\ldots$

3. $\text{bgtan}(\tan\frac{3\pi}{3}) = \ldots\ldots$

4. $\text{bgtan}(\tan\frac{4\pi}{3}) = \ldots\ldots$

5. $\text{bgtan}(\tan\frac{5\pi}{3}) = \ldots\ldots$

6. $\text{bgtan}(\tan\frac{6\pi}{3}) = \ldots\ldots$

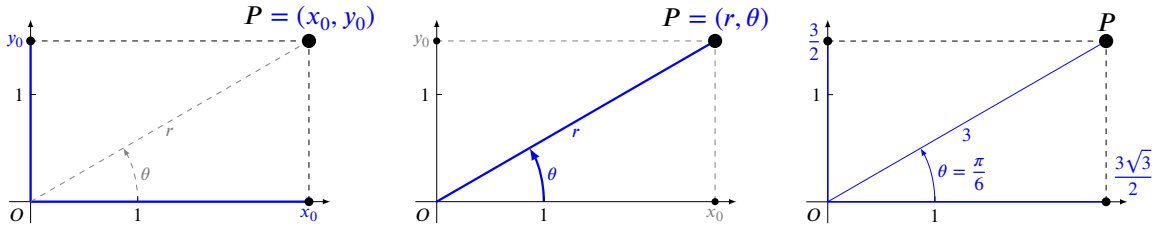
7. $\text{bgtan}(\tan\frac{7\pi}{3}) = \ldots\ldots$

8. $\text{bgtan}(\tan\frac{8\pi}{3}) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Poolcoördinaten

Gewoonlijk gebruiken we in het vlak een koppel *cartesische coördinaten* (x_0, y_0) om het punt aan te duiden dat in een gegeven assenstelsel x_0 *eenheden naar rechts* ligt van de oorsprong en y_0 *eenheden naar boven*. Er zijn echter ook alternatieve manieren om een punt in het vlak te bepalen, en in sommige toepassingen zijn die alternatieven veel handiger. De zogenaamde *poolcoördinaten* leggen een punt vast via een *hoek* en een *afstand*.



Op de eerste tekening zien we de cartesische coördinaten (x_0, y_0) van een punt P. De getallen x_0 en y_0 zijn de lengtes (met een teken) van de loodrechte projecties op respectievelijk de horizontale x-as en de verticale y-as.

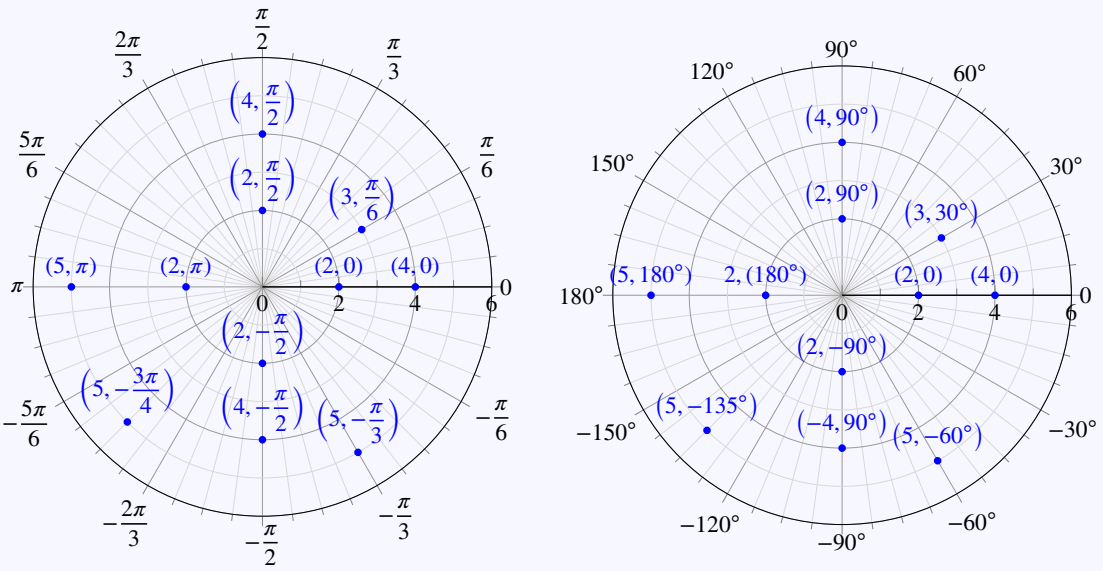
Op de tweede tekening zien we hoe je hetzelfde punt P ook kan vastleggen door de afstand r tot de oorsprong en de hoek θ met de positieve x-as. We noemen (r, θ) *pool*coördinaten van P:

Definitie 3.1.1. Poolcoördinaten van een punt P zijn elk koppel reële getallen (r, θ) waarvoor

- r de afstand is van de oorsprong O tot P (en dus $r \geq 0$)
- θ de grootte is in radialen van de (georiënteerde) hoek tussen de positieve x-as en het lijnstuk OP.

Voor een gegeven punt P ligt de afstand r vast, maar θ is slechts bepaald op een veelvoud van 2π na.

Voorbeeld 3.1.1 (Poolcoördinaten)**.**



Merk op dat de hoek θ steeds moet uitgedrukt zijn in radialen. De rechtse figuur is dus enkel bedoeld

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Poolcoördinaten

als hulp voor wie (nog) niet voldoende vertrouwd is met hoeken uitgedrukt in radialen.

Oefening 3.1.1 (Poolcoördinaten)**.** Bij welk punt op de figuur onderaan horen volgende poolcoördinaten?

1. $(1, \frac{\pi}{6}) = \ldots\ldots$

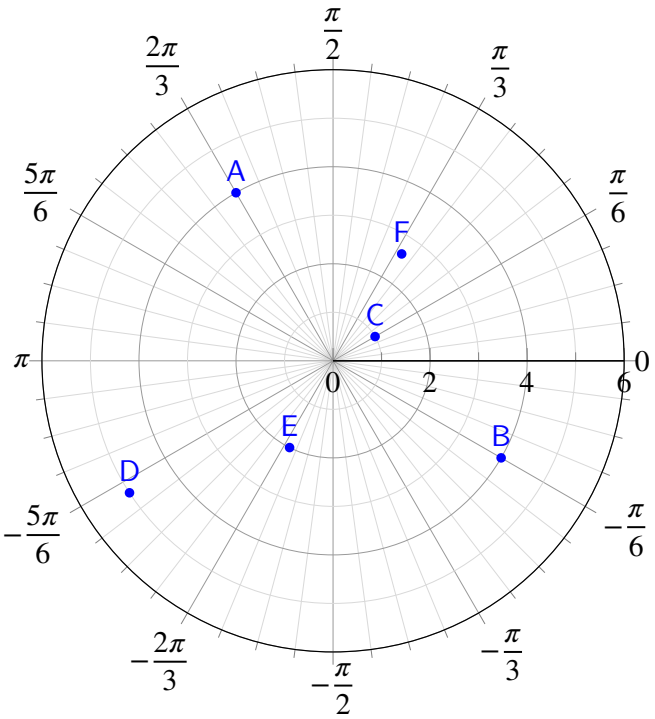
2. $(4, \frac{2\pi}{3}) = \ldots\ldots$

3. $(4, \frac{-\pi}{6}) = \ldots\ldots$

4. $(2, \frac{4\pi}{3}) = \ldots\ldots$

5. $(5, 10) = \ldots\ldots$

6. $(\frac{5\pi}{6}, 1) = \ldots\ldots$



Opmerking 3.1.1.

- Poolcoördinaten van een punt zijn *niet uniek bepaald*: als (r, θ) poolcoördinaten zijn van een punt P, dan zijn alle $(r, \theta + 2k\pi)$ met $k \in \mathbb{Z}$ ook poolcoördinaten van P. Soms spreekt men toch van *de* poolcoördinaten door te eisen dat bv. $\theta \in [0, 2\pi[$.
- De oorsprong heeft nog veel meer poolcoördinaten, namelijk alle koppels $(0, \theta)$ met $\theta \in \mathbb{R}$.
- De *notatie* van poolcoördinaten als een koppel (r, θ) is enigszins dubieus: de uitdrukking 'het punt $(1, \pi)$' is namelijk dubbelzinnig. Inderdaad, afhankelijk of $(1, \pi)$ de cartesische dan wel de poolcoördinaten zijn gaat het om een *ander* punt. Tenzij de precieze betekenis erg duidelijk blijkt uit de context, is het dus aangewezen om steeds te vermelden om *welke soort* coördinaten het gaat: het punt met *cartesische* coördinaten (a, b) of het punt met *pool*coördinaten (a, b).
- Het nut van poolcoördinaten is onder andere dat sommige vergelijkingen eenvoudiger worden in poolcoördinaten dan in cartesische coördinaten. Een duidelijk voorbeeld hiervan is een cirkel met centrum in de oorsprong en straal 2. Dit is een tweedegraadsvergelijking in cartesische coördinaten (x, y), namelijk $x^2 + y^2 = 4$, en een eerstegraadsvergelijking in poolcoördinaten (r, θ), namelijk $r = 2$. Omgekeerd zijn er ook vergelijkingen die eenvoudiger zijn in cartesische

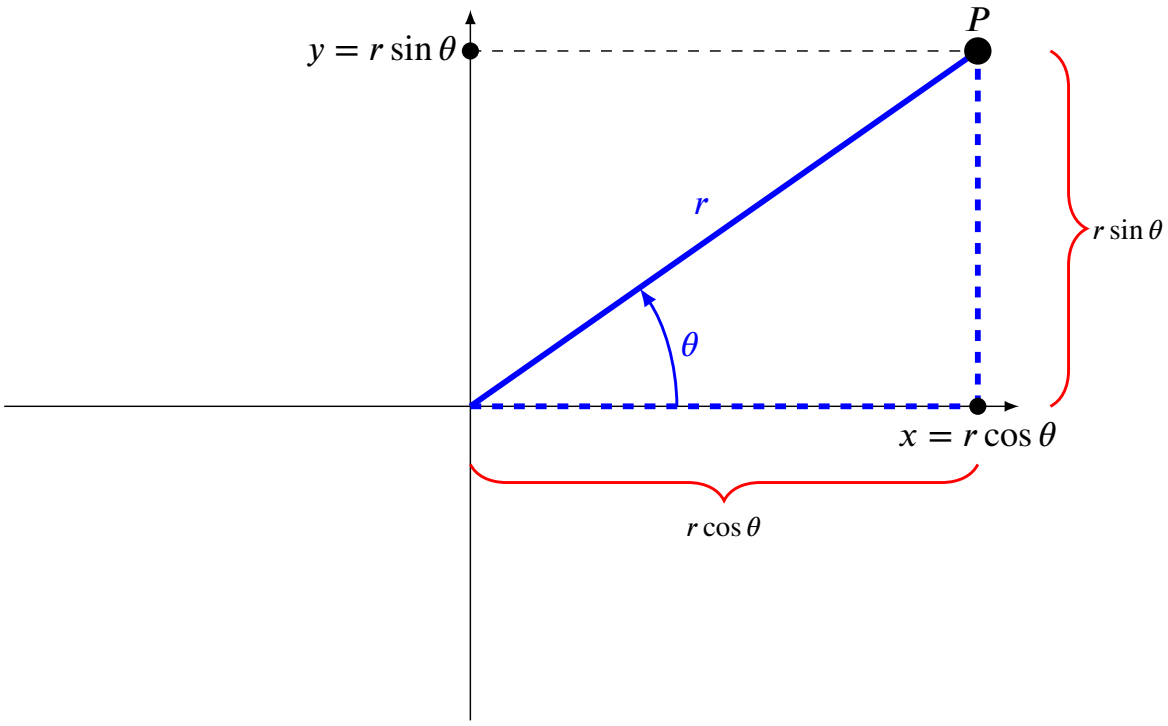
CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Poolcoördinaten

coördinaten, bv. de rechte $x = 2$ (die niet door de oorsprong gaat) heeft een merkwaardige vergelijking in poolcoördinaten.

Als een punt zowel cartesische coördinaten heeft als poolcoördinaten, ligt het voor de hand zich af te vragen of (en hoe) we de ene kunnen omrekenen naar de andere.

- Omrekenen van poolcoördinaten (r, θ) naar cartesische coördinaten (x, y) is eenvoudig: de formules $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$ volgen direct uit de formules van de sinus en de cosinus in de rechthoekige driehoek met hoekpunten $(0,0), (x,0)$ en (x,y).



- Omgekeerd, stel dat cartesische coördinaten (x, y) gegeven zijn, en we willen de poolcoördinaten (r, θ) bepalen. Omdat $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$, vinden we dat $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$, en dus $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Als we $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ invullen in $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$ krijgen we

$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

  Dit stelsel bepaalt ondubbelzinning de hoek θ.

Volgende eigenschap vat dat samen:

Eigenschap 3.1.1 (Transformatieformules cartesische coördinaten en poolcoördinaten)**.**

Een punt P met poolcoördinaten (r, θ) heeft als cartesische coördinaten (x, y):

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Poolcoördinaten

Een punt P met cartesische coördinaten (x, y) heeft poolcoördinaten (r, θ) die voldoen aan:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Voorbeeld 3.1.2.

1. Vind cartesische coördinaten van het punt met poolcoördinaten $(2, \frac{17\pi}{6})$.

Uitwerking: Uit de formule $x = r\cos\theta$ volgt dat $x = 2\cos\frac{17\pi}{6} = 2\cos\frac{5\pi}{6} = -2\frac{\sqrt{3}}{2}$, en uit de formule $y = r\sin\theta$ volgt dat $y = 2\sin\frac{17\pi}{6} = 2\sin\frac{5\pi}{6} = 2\cdot\frac{1}{2}$.

De cartesische coördinaten zijn dus $(-\sqrt{3}, 1)$

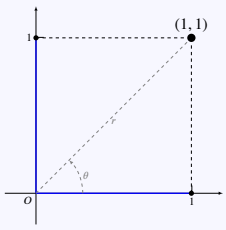
2. Vind poolcoördinaten van het punt met cartesische coördinaten $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$.

Uitwerking: Uit de formule voor r volgt dat $r = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Uit die voor $\cos\theta$ volgt dat $\cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$, dus is $\theta = \frac{2\pi}{3}$ of $\theta = \frac{4\pi}{3}$.
Uit die voor $\sin\theta$ volgt dat $\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dus is $\theta = \frac{\pi}{3}$ of $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

De poolcoördinaten zijn dus $(2\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3})$

De poolcoördinaten van sommige punten kunnen sneller bepaald worden op een tekening.

Voorbeeld 3.1.3 (De hoek θ grafisch zoeken)**.**
De poolcoördinaten van het punt met cartesische coördinaten $(1, 1)$ kunnen snel worden bepaald op een tekening. We zien dan meteen dat $\theta = \frac{\pi}{4}$. r moeten we wel berekenen $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.



Oefening 3.1.2. Omrekenen poolcoördinaten naar cartesische coördinaten.

1. Het punt A met poolcoördinaten $(1, \pi)$ heeft cartesische coördinaten $x = \ldots\ldots$ en $y = \ldots\ldots$

2. Het punt B met poolcoördinaten $(1, \frac{\pi}{2})$ heeft cartesische coördinaten $x = \ldots\ldots$ en $y = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Poolcoördinaten

3. Het punt C met poolcoördinaten $(2, -\frac{\pi}{2})$ heeft cartesische coördinaten $x = \ldots\ldots$ en $y = \ldots\ldots$

4. Het punt D met poolcoördinaten $(2, \frac{\pi}{4})$ heeft cartesische coördinaten $x = \ldots\ldots$ en $y = \ldots\ldots$

Oefening 3.1.3. Omrekenen van cartesische coördinaten naar poolcoördinaten. Kies de hoek θ tussen 0 en 2π.

1. Het punt A met cartesische coördinaten $(-1, -1)$ heeft poolcoördinaten $r = \ldots\ldots$ en $\theta = \ldots\ldots$

2. Het punt B met cartesische coördinaten $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ heeft poolcoördinaten $r = \ldots\ldots$ en $\theta = \ldots\ldots$

Opmerking 3.1.2. Omrekenen tussen cartesische coördinaten en poolcoördinaten.

Omrekenen van (r, θ) naar (x, y) is eenvoudig via $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$.
Omrekenen van (x, y) naar (r, θ) is ook eenvoudig voor r, want $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, maar wat moelijker voor θ.
Het stelsel

$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

bepaalt ondubbelzinnig de hoek θ. Inderdaad, als we zowel de cosinus als de sinus van een hoek kennen, ligt die hoek volledig vast. Hoeken waarvan we de cosinus en de sinus kennen, zoals bijvoorbeeld $\frac{\pi}{3}$ kunnen we met dit stelsel gemakkelijk vinden.

Om dit stelsel in het algemeen op te lossen (voor een punt verschillend van de oorsprong) hebben we echter de cyclometrische functies boogsinus, boogcosinus of boogtangens nodig.

Als $x \neq 0$ kunnen we de tweede vergelijking delen door de eerste (waardoor de vierkantswortel wegvalt) en krijgen we

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{als } x \neq 0$$

Als $x > 0$ dan is θ een hoek in het 1ste of het 4de kwadrant en is dus per definitie van de boogtangens

$$\theta = \text{bgtan}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{als } x > 0$$

Als $x < 0$ dan is θ een hoek in het 2de of het 3de kwadrant en dan geldt

$$\theta = \text{bgtan}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \quad \text{als } x < 0$$

(want $\text{bgtan}\left(\frac{y}{x}\right)$ ligt in het 1ste of het 4de kwadrant en door hier π bij op te tellen komen we in het 2de of 3de kwadrant terecht)

Als $x = 0$, dan ligt het punt (x, y) dus op de y-as en geldt

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{als } x = 0, y > 0$$
$$\theta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{als } x = 0, y < 0$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Poolcoördinaten

Samengevat geeft dit voor θ:

$$\theta = \begin{cases} \text{bgtan}\,\dfrac{y}{x} & \text{als } x > 0 \\ \pi + \text{bgtan}\,\dfrac{y}{x} & \text{als } x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{als } x = 0, y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{als } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

We hernemen een vorig voorbeeld:

Voorbeeld 3.1.4.

1. Vind poolcoördinaten van het punt met cartesische coördinaten $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$.

Uitwerking: $r = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$x < 0$ dus $\theta = \pi + \text{bgtan}\,\dfrac{y}{x} = \pi + \text{bgtan}\,\dfrac{\sqrt{6}}{-\sqrt{2}} = \pi + \text{bgtan}(-\sqrt{3}) = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

De poolcoördinaten zijn dus $(2\sqrt{2}, \dfrac{2\pi}{3})$

CC BY-NC-SA 4.0