KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Voorbereiding
Week 2
Oefenzitting 2

(Versie 2026/09/22H.38)

Inhoudsopgave

1 Quiz Week 2 Oefenzitting 2 1.1

1.1 Quiz Week 2 Oefenzitting 2 . . . . . 1.1

2 Functies 2.1

2.1 Functies 2.1

2.2 Inverse functies 2.4

3 Rechten en cirkels 3.1

3.1 De vergelijking van een rechte 3.1

3.2 De vergelijking van een cirkel 3.4

4 Veeltermen 4.1

4.1 Eerstegraadsveeltermen en rechten 4.1

4.2 Tweedegraadsveeltermen en parabolen 4.3

4.3 Veeltermen 4.6

4.4 Deling van veeltermen 4.9

4.5 Deling door $x - a$ 4.12

4.6 Veeltermen ontbinden in factoren 4.15

1.1 Quiz Week 2 Oefenzitting 2

Quiz Week 2 Oefenzitting 2

Oefening 1.1.1 (Domein van functies)**.** Geef het grootst mogelijke domein voor de functie met functievoorschrift.

1. $f(x) = \sqrt{1-x}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f = \ ]-\infty, 1]$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f = \ \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Oefening 1.1.2 (Rechten en cirkels)**.**

1. Geef de vergelijking van de rechte door $(2, 5)$ en $(3, 8)$. Antwoord: $y = \ldots\ldots$

2. Geef de vergelijking van de rechte door $(0, -1)$ evenwijdig met de rechte $y = 3x + 2$. Antwoord: $y = \ldots\ldots$

3. De cirkel met vergelijking $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 20$ heeft middelpunt $\ldots\ldots$ en straal $\ldots\ldots$

Oefening 1.1.3 (Grafieken schetsen)**.** Schets de grafieken van volgende functies

1. $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$

2. $f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{als } x > 1 \end{cases}$

Oefening 1.1.4 (Veeltermen ontbinden in factoren)**.**

1. Ontbind in factoren: $2x^2 + 5x + 3 = (x + \ldots\ldots)(\ldots\ldots x + \ldots\ldots)$

2. Ontbind de veelterm $2x^3 + x^2 - 8x + 5$ in factoren van zo laag mogelijke graad: $2x^3 + x^2 - 8x + 5 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Functies

Een mogelijke voorstellingswijze van een functie bestaat uit een (in dit geval blauwe) *black box*, die voor een bepaalde input I een bepaalde output O genereert:



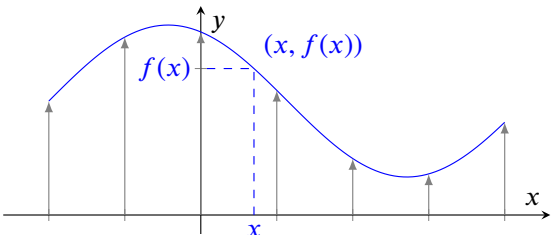
Een **functie** zet dus een *input* om in een *output*.

Een functie heeft meestal een **naam**. Dikwijls gebruiken we gewoon f van $f$unctie, maar ook h, g, f_1, f_2 komen dikwijls voor.

De **input** noemen we dikwijls x. Soms gebruiken we ook andere letters zoals t, n, x_1,x_2 of zelfs ook y en y_1 voor de input.

De **output** of het resultaat van de functie noteren we dan naargelang de keuzes voor de input en de functie met $f(x)$ of bijvoorbeeld $h(t)$. Soms geven we ook een generieke naam aan de output. De letter y is daarvoor een erg populaire keuze. We schrijven dan typisch $y = f(x)$. We bedoelen daarmee dat f een functie is waar je x kan instoppen en wat er dan uitkomt noemen we y, of $f(x)$.

Een reële functie f kunnen we *voorstellen* in een xy-vlak door voor elk getal x (op de x-as) op de verticale rechte door dat punt op 'hoogte' $f(x)$ het punt $(x, f(x))$ te markeren. Dat geeft een figuur (een kromme) die we de **grafiek** van de functie f noemen.



Het **domein** van een functie f, genoteerd $\operatorname{dom} f$, is de verzameling van alle *toegelaten inputs* van de functie.

Oefening 2.1.1. Teken (zonder een grafisch rekenmachine te gebruiken) de grafiek van de functies met volgende voorschriften.

1. $f(x) = |x|$
2. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$
3. $f(x) = \dfrac{x - |x|}{2}$
4. $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$

Oefening 2.1.2. Zoek telkens het grootst mogelijke domein voor een functie met volgend functievoorschrift.

1. $f(x) = \sqrt{x}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^+$. Onthou ook de grafiek gegeven in de uitwerking!
2. $f(x) = \sqrt{1 + x}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f = [-1, +\infty[$
3. $f(x) = \sqrt{1 - x}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f =]-\infty, 1]$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/22H.38)

2.1 Functies

4. $f(x) = 1 - |x|$. Antwoord: dom $f = \mathbb{R}$

5. $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$. Antwoord: dom $f = [-1, 1]$

6. $f(x) = \sqrt{-|x|}$. Antwoord: dom $f = \{0\}$

7. $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Antwoord: dom $f = \mathbb{R}_0$. Onthou ook de grafiek gegeven in de uitwerking!

8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Antwoord: dom $f = \mathbb{R}_0^+$

9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Antwoord: dom $f = \mathbb{R}_0$

10. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$. Antwoord: dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

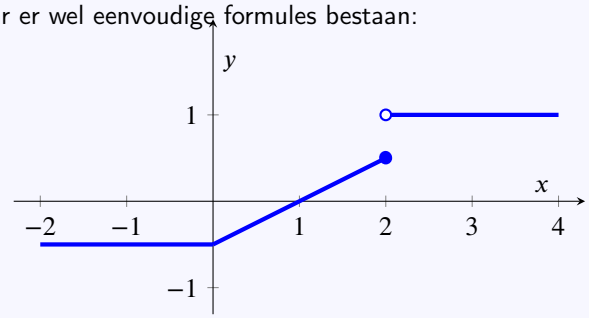
11. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$. Antwoord: dom $f = \mathbb{R}$

12. $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 1}$. Antwoord: dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Voorbeeld 2.1.1 (Meervoudig functievoorschrift)**.**

Soms bestaat er geen eenvoudige formule die geldt voor alle x, maar kunnen we het domein opsplitsen over deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ waar er wel eenvoudige formules bestaan:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & x < 0 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} & 0 \le x \le 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$



Oefening 2.1.3. Schets de grafieken van volgende functies met meervoudige functievoorschriften:

1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \neq 0 \\ 1 & \text{als } x = 0 \end{cases}$

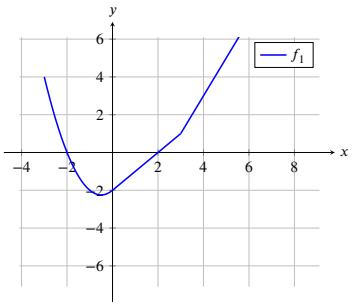
2. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{als } x < 0 \\ x & \text{als } x \geq 0 \end{cases}$

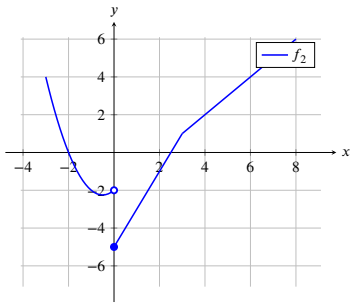
3. $f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{als } x > 1 \end{cases}$

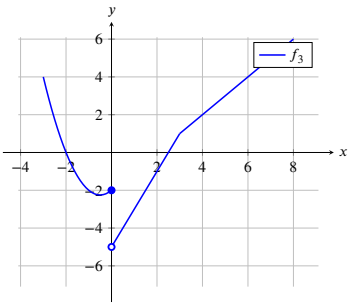
Oefening 2.1.4. Welk functievoorschrift hoort bij welke grafiek ?

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Functies







1. $\boxed{f_1}\ \boxed{f_2}\ \boxed{f_3} = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{als } x \le 0 \\ 2x-5 & \text{als } 0 < x < 3 \\ x-2 & \text{als } x \ge 3 \end{cases}$

2. $\boxed{f_1}\ \boxed{f_2}\ \boxed{f_3} = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{als } x < 0 \\ x-2 & \text{als } 0 \le x < 3 \\ 2x-5 & \text{als } x \ge 3 \end{cases}$

3. $\boxed{f_1}\ \boxed{f_2}\ \boxed{f_3} = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{als } x < 0 \\ 2x-5 & \text{als } 0 \le x < 3 \\ x-2 & \text{als } x \ge 3 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/22H.38)

2.2 Inverse functies

Een functie f is een machine die een invoer x omzet in een uitvoer $f(x)$. Die uitvoer wordt soms ook met de letter y aangeduid en dan schrijven we $y = f(x)$. De machine berekent dus voor elke x een bijhorende y. Men kan zich afvragen of er ook een 'undo-machine' bestaat die de berekening van f omkeert, en de uitvoer y terug omzet in de invoer x.

We noemen twee functies f en g *inversen* van elkaar, als ze elkaars actie ongedaan maken. Hiermee bedoelen we dat $g(f(x)) = x$ en $f(g(x)) = x$. Als f en g inverse functies zijn van elkaar dan noteren we f^{-1} in plaats van g voor de inverse functie van f. We noemen f **inverteerbaar** als er een inverse functie bestaat.

We bekijken enkele voorbeelden. De voorbeelden tonen ook aan dat het voorschrift van de inverse van een functie f te bepalen is uit het voorschrift van f. Het vinden van de inverse functie komt daarbij eigenlijk neer op het *oplossen van een vergelijking*: als $f(x) = y$, vindt dan een formule g voor x zodat geldt dat $x = g(y)$.

Voorbeeld 2.2.1. De functies $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ en $g(x) = 2x - 2$ zijn elkaars inverse. We kunnen dat *algebraïsch* bekijken door $f(g(x))$ en $g(f(x))$ te berekenen en aan te tonen dat beide uitdrukkingen gelijk zijn aan x:

$$f(g(x)) = f(2x-2) = \frac{1}{2}(2x-2) + 1 = x \tag{1}$$

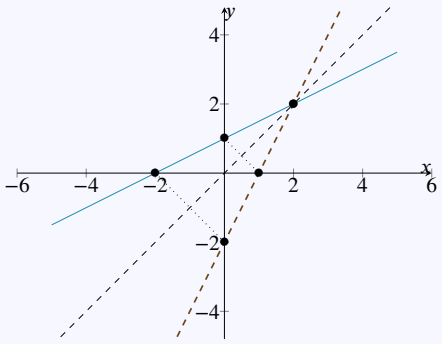
$$g(f(x)) = g(\frac{1}{2}x + 1) = 2(\frac{1}{2}x + 1) - 2 = x \tag{2}$$

We kunnen dus schrijven dat $g = f^{-1}$ en dat $f = g^{-1}$.

We kunnen ook *meetkundig* onderzoeken wat dat betekent voor de grafiek van f en g.

Onderstaande tabel en grafiek van de functies f en g toont dat voor elk paar (x, y) op de grafiek van f, het punt (y, x) op de grafiek van g ligt, en omgekeerd. De grafiek van g krijgen we dus door in de grafiek van f de x en y van plaats te verwisselen. Grafisch komt dat overeen met spiegelen over de eerste bissectrice. De eerste bissectrice is de rechte met vergelijking $y = x$. Spiegelen ten opzichte van die bissectrice komt overeen met x en y omwisselen: het punt $(2, 3)$ wordt gespiegeld naar het punt $(3, 2)$.

$f(x) = x/2 + 1$	$f^{-1}(x) = 2x - 2$
$(-4, -1)$	$(-1, -4)$
$(-2, 0)$	$(0, -2)$
$(0, 1)$	$(1, 0)$
$(2, 2)$	$(2, 2)$
$(4, 3)$	$(3, 4)$



Opmerking 2.2.1.

- Als f^{-1} bestaat, dan wordt de grafiek van f^{-1} bekomen door de grafiek van f te spiegelen rond de eerste bissectrice.
- Je mag kiezen welke letter je neemt als variable voor de inverse functie.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Inverse functies

Voorbeeld 2.2.2. Bereken indien mogelijk de inverse van $f(x) = 5x + 3$

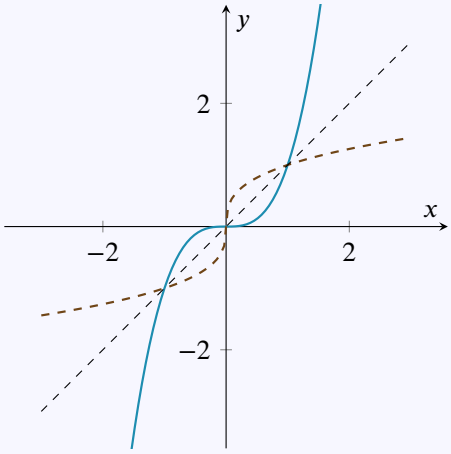
$$y = 5x + 3 \iff y - 3 = 5x \iff \frac{y-3}{5} = x$$

De inverse van $f(x) = 5x + 3$ is dus $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{5}$ of ook $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{5}$, want je mag kiezen welke letter je neemt als variabele voor de inverse functie.

Voorbeeld 2.2.3. Bereken indien mogelijk de inverse van $f(x) = x^3$

$$y = x^3 \iff y^{\frac{1}{3}} = x$$

De inverse van $f(x) = x^3$ is dus $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}$ of ook $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$.



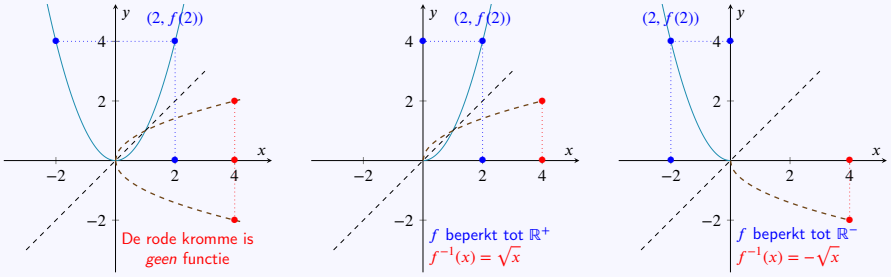
Voorbeeld 2.2.4. Bereken indien mogelijk de inverse van $f(x) = x^2$, met als domein $\mathbb{R}$.

$$y = x^2 \iff x = \pm\sqrt{y}$$

Deze functie is *niet inverteerbaar*:

Voor $y > 0$ zijn er twee oplossingen, $x = \sqrt{y}$ en $x = -\sqrt{y}$. Er zijn 2 mogelijke manieren om toch een inverse functie te definiëren:

- Als je het domein van $f(x) = x^2$ beperkt tot $\mathbb{R}^+$, dan is $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
- Als je het domein van $f(x) = x^2$ beperkt tot $\mathbb{R}^-$, dan is $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.



Het is dus mogelijk dat een functie f geen inverse heeft, maar dat een beperking van die functie tot

CC BY-NC-SA 4.0

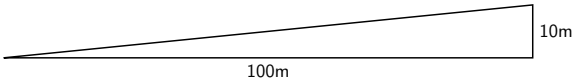
2.2 Inverse functies

een kleiner domein *wel* een inverse heeft. Typische voorbeelden zijn de inversen van de sinus, cosinus en tangens.

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 De vergelijking van een rechte

De helling van een rechte is de verticale toename gedeeld door de bijhorende horizontale toename.



$$\text{Helling} = \frac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}} = \frac{10}{100} = 0.1$$

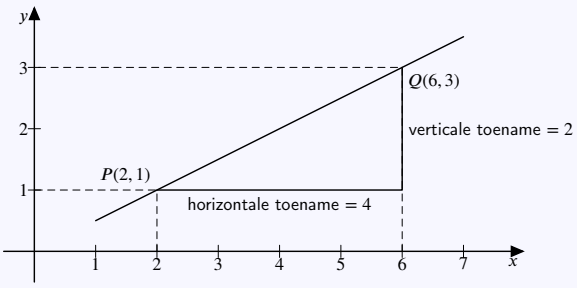
Definitie 3.1.1. De **richtingscoëfficiënt** of **rico** van een rechte is de *helling* van die rechte.

Als de rechte door de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) gaat, is de rico m gelijk aan

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Twee rechten zijn **evenwijdig** als ze dezelfde richtingscoëfficiënt hebben.

Voorbeeld 3.1.1. Bereken de rico van de rechte door de punten $P(2,1)$ en $Q(6,3)$.



De rico van de rechte kan als volgt berekend worden:

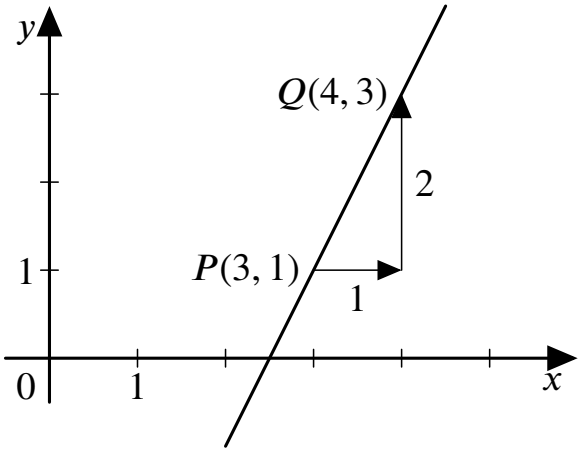
$$\frac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}} = \frac{3-1}{6-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Door twee punten gaat precies één rechte, en een rechte ligt dus volledig vast als je twee punten kent. Een rechte wordt echter ook volledig bepaald door haar rico en één van haar punten. Inderdaad, je kan voor een rechte door het punt $P(3,1)$ met rico $m = 2$ een tweede punt Q construeren.

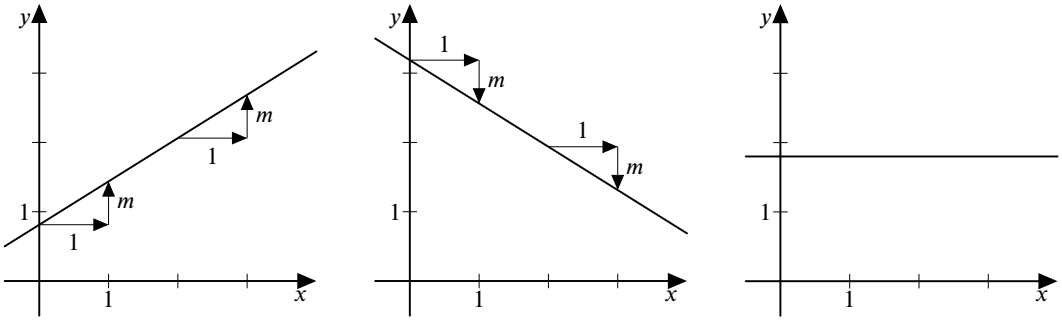
Dat $m = \dfrac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}} = 2$ kan je interpreteren als volgt: indien je één eenheid naar rechts gaat, dan moet je twee eenheden naar boven gaan, wil je op de rechte blijven. We vertrekken vanuit het punt $P(3,1)$. We gaan één eenheid naar rechts, dan zitten we in het punt $P(4,1)$. Ten slotte gaan we m eenheden naar boven. We belanden in het punt $Q(4,3)$. De rechte gaat door $P(3,1)$ en $Q(4,3)$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 De vergelijking van een rechte



Merk op: bij stijgende rechten is $m > 0$ en bij dalende rechten is $m < 0$. Horizontale rechten hebben rico gelijk aan 0, terwijl de rico van verticale rechten niet bestaat.



Voorbeeld 3.1.2. Neem de rechte die door punt $P(3,5)$ gaat en met rico -3. Zoek een ander punt van deze rechte. Tip: maak even een schets om dit te visualiseren.

Vertrek van het punt $P(3,5)$ en ga één eenheid naar rechts en drie eenheden naar beneden. Je komt uit in het punt $(4,2)$. Uiteraard zijn er meerdere mogelijkheden (bijvoorbeeld: $(2,8), (5,-1), \ldots$).

Eigenschap 3.1.1.

- De vergelijking van een niet-verticale rechte kan steeds geschreven worden in de vorm

$$y = mx + q,$$

waarbij m de rico is en q het snijpunt met de y-as.

- De vergelijking van de rechte door het **punt** (x_1, y_1) met **rico** m.

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

- De vergelijking van de rechte door de **twee punten** (x_1, y_1) en (x_2, y_2) met $x_1 \neq x_2$.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

- De vergelijking van een verticale rechte is steeds van de vorm $x = b$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 De vergelijking van een rechte

Oefening 3.1.1. Stel de vergelijking op van de rechte in de vorm $y = mx + q$.

1. rechte door $(2, 5)$ en $(3, 8)$. Antwoord: $y = \ldots\ldots$

2. rechte door $(-5, -2)$ en $(-1, -3)$. Antwoord: $y = \ldots\ldots$

3. rechte door $(0, 0)$ en $(2, 3)$. Antwoord: $y = \ldots\ldots$

4. rechte door $(1, 6)$ met rico -4. Antwoord: $y = \ldots\ldots$

5. rechte door $(0, -1)$ evenwijdig met de rechte $y = 3x + 2$. Antwoord: $y = \ldots\ldots$

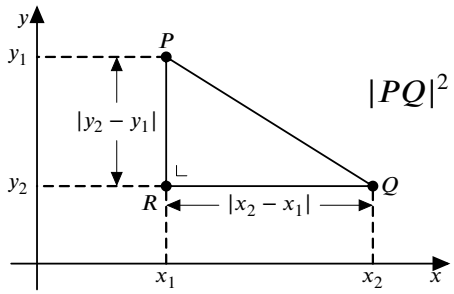
Oefening 3.1.2. Schets alle oplossingen van de vergelijking $x - 2y = -2$

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 De vergelijking van een cirkel

Definitie 3.2.1. We noteren met $|AB|$ de **afstand** tussen twee punten A en B. Er geldt $|AB| = |BA|$.

De stelling van Pythagoras levert een *formule* voor de afstand $|PQ|$ tussen twee punten $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$. Hiervoor construeren we punt R zoals op de tekening , met driehoek PQR rechthoekig in R.



$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= |PR|^2 + |RQ|^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \end{aligned}$$

Eigenschap 3.2.1. De **afstand** tussen punt P met coördinaten (x_1, y_1) en Q met coördinaten (x_2, y_2) is

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

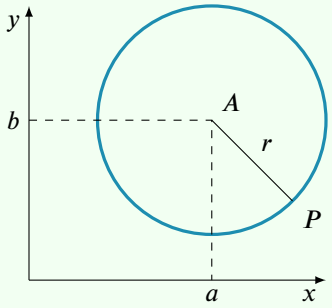
Voorbeeld 3.2.1. De afstand tussen punt P met coördinaten $(2, 3)$ en Q met coördinaten $(-2, -1)$ is

$$|PQ| = \sqrt{((-2) - 2)^2 + ((-1) - 3)^2} = \sqrt{32} \approx 5.66$$

Oefening 3.2.1. De afstand tussen de punten $(-1, 0)$ en $(2, 4)$ is ... ...

Definitie 3.2.2. De **cirkel** met **middelpunt** A en **straal** $r > 0$ is de verzameling van alle punten die op een afstand r van het punt A liggen.

Dus: een punt P ligt op de cirkel met middelpunt A en straal r als en slechts als $|PA| = r$.



De vergelijking van een cirkel is een nodige en voldoende voorwaarde waar de coördinaten van een punt aan moeten voldoen opdat dit punt op de cirkel zou liggen. De voorwaarde $|PA| = r$ is equivalent met

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

waarbij (x, y) de coördinaten zijn van het punt P, en (a, b) de coördinaten van het middelplunt A. Door linkerlid en rechterlid te kwadrateren, bekomen we de vergelijking van de cirkel:

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 De vergelijking van een cirkel

Eigenschap 3.2.2. De cirkel met middelpunt $A : (a, b)$ en straal r heeft als vergelijking

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Voorbeeld 3.2.2. De cirkel met middelpunt $(0, 2)$ en straal 3 heeft als vergelijking

$$(x-0)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

of dus

$$x^2 + (y-2)^2 = 9.$$

Door de kwadraten uit te rekenen krijgen we ook

$$x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$$

Oefening 3.2.2. Ligt $(2, 3)$ op de cirkel met middelpunt $(1, -1)$ en straal 4? | Ja | Nee |

Oefening 3.2.3. Stel de vergelijking op van de cirkel met gegeven middelpunt en straal:

1. middelpunt $(-1, 0)$ en straal 1

2. middelpunt $(5, 2)$ en straal 4

Voorbeeld 3.2.3. Bepaal het middelpunt en de straal van volgende cirkel: $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 20$

Uitwerking: Om aan deze oefening te beginnen moeten we de gegeven vergelijking herschrijven in de vorm $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

We tellen bij beide leden eenzelfde getal op

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 20 + 5$$

zodat we de vergelijking kunnen schrijven als

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$$

Dit is de vergelijking van de cirkel met middelpunt $(-1, 2)$ en straal 5.

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Eerstegraadsveeltermen en rechten

De meest eenvoudige veeltermen zijn die van de *eerste graad*.

Definitie 4.1.1. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$.

- Een **eerstegraadsveelterm in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
$$ax + b$$
- Met deze veelterm kunnen we een **lineaire functie** associëren:
$$f(x) = ax + b$$
- Een **eerstegraadsvergelijking** (of **lineaire vergelijking**) **in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
$$ax + b = 0$$

Voorbeeld 4.1.1.

- $7x + 9$ is een eerstegraadsveelterm (in x).
- $f(x) = 7x + 9$ is een lineaire functie (met variabele x).
- $7x + 9 = 0$ is een lineaire vergelijking (in één onbekende x).

Eigenschap 4.1.1.

Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$. Dan geldt voor de lineaire functie $f(x) = ax + b$:

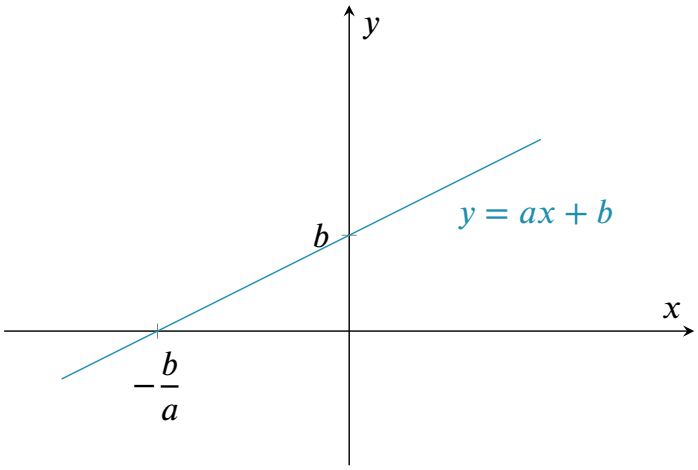
- de grafiek van de functie is een *rechte* met vergelijking $y = ax + b$ en **richtingscoëfficiënt** a.
- als a positief is, is de functie strikt *stijgend* en als a negatief is de functie strikt *dalend*.
- het (enige) snijpunt van de grafiek met de y-as is het punt $(0, b)$.
- het (enige) snijpunt van de grafiek met de x-as is het punt $(-\frac{b}{a}, 0)$. Het getal $-\frac{b}{a}$ is ook het (enige) *nulpunt* van de functie, en de (enige) oplossing van de vergelijking $ax + b = 0$.

Deze informatie vatten we samen in volgend **tekenverloop** (ook *tekentabel*) voor de functie $f(x) = ax + b$

x		$-b/a$	
$ax + b$ met $a > 0$	$-$	0	$+$
$ax + b$ met $a < 0$	$+$	0	$-$

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Eerstegraadsveeltermen en rechten



Opmerking 4.1.1.

- We spreken meestal van *nulpunten* van een functie, *oplossingen* van een vergelijking en *wortels* van veeltermen, maar deze begrippen betekenen hetzelfde.
- als $a = 0$ reduceert de functie zich tot $f(x) = 0x + b = b$, en dat is geen lineaire functie maar een *constante* functie. De grafiek is dan de *horizontale* rechte met vergelijking $y = b$.

Oefening 4.1.1.

1. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $8 - 4x < 0$.

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Tweedegraadsveeltermen en parabolen

Definitie 4.2.1. Zij $a, b, c \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$.

- Een **tweedegraadsveelterm in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
$$ax^2 + bx + c$$
- Met deze veelterm kunnen we een **(kwadratische) functie** associëren:
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
- Een **tweedegraadsvergelijking** (ook **vierkantsvergelijking** of **kwadratische vergelijking**) **in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Voorbeeld 4.2.1.

- $7x^2 + 2x + 4$ is een tweedegraadsveelterm.
- $f(x) = 7x^2 + 2x + 4$ is een kwadratische functie.
- $7x^2 + 2x + 4 = 0$ is een vierkantsvergelijking.

Eigenschap 4.2.1. Zij $a, b, c \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$. Dan geldt voor de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- de grafiek van de functie is een *parabool* met vergelijking $y = ax^2 + bx + c$.
- als a negatief is, is dat een zogenaamde *bergparabool*, als a positief is, is dat een *dalparabool*.
- de nulpunten van de functie zijn de oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$, en die vinden we met behulp van de **discriminant** $D = b^2 - 4ac$ waarbij geldt dat
  - Als $D > 0$ zijn er **twee verschillende reële** nulpunten.
  - Als $D = 0$ zijn er **twee gelijke reële** nulpunten.
  - Als $D < 0$ zijn er **geen reële** nulpunten
- als $D \geq 0$ worden de nulpunten (of wortels) gegeven door
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{(wortelformule)}$$
- deze nulpunten zijn de snijpunten van de grafiek van de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ met de x-as. Als $D = 0$ is $x_1 = x_2$ en hebben we slechts 1 snijpunt met de x-as.

Deze informatie vatten we samen in volgend **tekenverloop** (tekentabel) voor de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- Als $D > 0$ zijn er **twee verschillende nulpunten** $x_1 < x_2$, en volgend tekenverloop:

x		x_1		x_2	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$	0	$-$	0	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$	0	$+$	0	$-$

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Tweedegraadsveeltermen en parabolen

- Als $D = 0$ zijn er **twee samenvallende nulpunten** $x_1 = x_2$, en volgend tekenverloop:

x		$x_1 = x_2$	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$	0	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$	0	$-$

- Als $D < 0$ zijn er **geen nulpunten**, en volgend tekenverloop:

x	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$

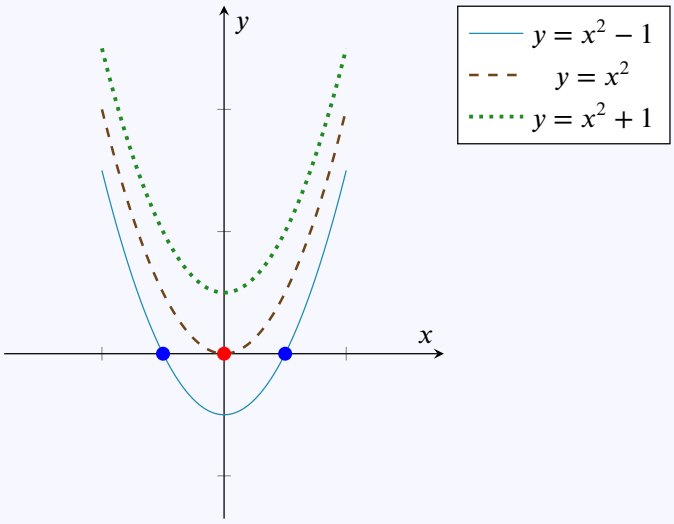
Voorbeeld 4.2.2.

1. Bereken de nulpunten van de functies $f(x) = x^2$, $f(x) = x^2 - 1$ en $f(x) = x^2 + 1$, en maak een tekening.

Uitwerking:

De nulpunten van $f(x) = x^2$ zijn 0 (twee keer, maar aan elkaar gelijk), die van $f(x) = x^2 - 1$ zijn ± 1, en $f(x) = x^2 + 1$ heeft geen reële nulpunten.

De grafieken van de overeenkomstige functies – waarop het aantal nulpunten direct afleesbaar is – zijn de volgende:



Oefening 4.2.1.

1. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $x^2 \geqslant -5x - 6$.

2. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $-2x^2 + 4x - 5 \geqslant 0$.

3. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $yx^2 + x - y = 0$, met $y \in \mathbb{R}_0$.

Eigenschap 4.2.2.

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Tweedegraadsveeltermen en parabolen

Als x_1 en x_2 de wortels zijn van $ax^2 + bx + c$, dan kunnen we deze veelterm **ontbinden in factoren**:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Oefening 4.2.2.

1. Ontbind $2x^2 + 5x + 3$ in factoren.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Veeltermen

Veronderstelde voorkennis: eenvoudige stelsels oplossen

Naar analogie met eerste- en tweedegraadsveeltermen definiëren we nu n-de graadsveeltermen.

Definitie 4.3.1 (Veelterm). Zij $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ met $a_n \neq 0$.

- Een n-**de graadsveelterm in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

  De $a_i x^i$ zijn **termen** van de veelterm, de a_i zijn **coëfficiënten**, en n is de **graad**.
  Men noteert de graad van $p(x)$ met $\text{gr}(p(x)) \stackrel{\text{def}}{=} n$.

- Aan dergelijke veelterm $p(x)$ is volgende **veeltermfunctie** p geassocieerd:

$$p : x \mapsto p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- Een n-**de graadsvergelijking in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

- De **getalwaarde** van $p(x)$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ is het getal $p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0$.

Voorbeeld 4.3.1.

- $2x + 3$ is een eerstegraadsveelterm. De getalwaarde van $2x + 3$ in 3 is 9.
- $5x^2 + 7x + 1$ is een tweedegraadsveelterm.
- $x^{2026} - 1$ is een veelterm van graad 2026.
- 7 is een veelterm van graad 0.
- $ax + b$ met $a \neq 0$ kan gezien worden als een eerstegraadsveelterm, met 'parameters' of 'constanten' a en b in plaats van concrete getallen.
- $\sqrt{\pi} x^5 - e^y + \alpha^2$ kan gezien worden als een veelterm in x van de vijfde graad, met parameters y en α.
- $x^2 - e^x$ is *geen* veelterm in x wegens de exponentiële functie.
- Je kan ook veeltermen in andere letters tegenkomen: $5t^2 + 3t$ en $t + \cos\alpha$ zijn veeltermen in t, en $e^{2x} u^2 - 1$ is een veelterm in u (maar niet in x).

Opmerking 4.3.1.

- Volgens deze definitie is een veelterm dus een formele *uitdrukking* (of een *formule*: een reeks letters, cijfers en enkele symbolen zoals + en −). We *rekenen* met dergelijke uitdrukkingen volgens voor de hand liggende rekenregels zoals:

$$2x + 3x = 5x$$

$$2 \cdot (5x) = 10x$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Veeltermen

$$(2x) \cdot (5x) = 10x^2$$

- Veeltermen zijn de functies die met enkel de elementaire bewerkingen optellen en vermenigvuldigen kunnen worden berekend. Je zal later zien dat veel functies goed kunnen worden *benaderd* door veeltermen.
- Een veelterm met één term noemen we een *term*, *éénterm* of *monoom*. Een veelterm met twee termen is een *tweeterm* of *binoom*. En één met *veel termen* is dus een *veel*term of *polynoom*.
- De getalwaarde van een veelterm in 0 is precies de constante term a_0 van de veelterm:

$$p(0) = a_n 0^n + a_{n-1} 0^{n-1} + \ldots + a_2 0^2 + a_1 0 + a_0 = a_0$$

- Met het sommatieteken kunnen we een veelterm ook schrijven als

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Oefening 4.3.1. Voor een veelterm $p(x)$ van graad 2 geldt: de hoogstegraadscoëfficiënt is 2, $p(1) = 3$ en $p(-1) = -3$. Wat is de constante term van $p(x)$? ... ...

Definitie 4.3.2 (Nulpunten van veeltermen)**.**

Een **nulpunt** (ook **nulwaarde** of **wortel**) van een veelterm $p(x)$ is een reëel getal a waarvoor $p(a) = 0$.

Oefening 4.3.2. Voor een veelterm $p(x)$ van graad 2 geldt: de constante term is 2, $x = 1$ is een nulpunt en $p(-1) = 6$. Wat is $p(2)$?

$p(2) = \ldots \ldots$

Het zoeken van nulpunten is precies hetzelfde als het oplossen van vergelijkingen:

Eigenschap 4.3.1 (Verband tussen nulpunten van veeltermen en oplossingen van vergelijkingen)**.**

De *nulpunten* van een veelterm $p(x)$ zijn de *oplossingen* van de *vergelijking* $p(x) = 0$.

Voorbeeld 4.3.2 (Nulpunten van eenvoudige veeltermen)**.**

1. Het getal 3 is een nulpunt van $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ omdat $p(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$.
2. Het getal 3 is een oplossing van de vergelijking $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.
3. De veelterm $x - 5$ heeft 5 als nulpunt(en).
4. De veelterm $x^2 - 4$ heeft -2 en 2 als nulpunt(en).
5. De veelterm $x^2 + 4$ heeft geen enkel reëel getal als nulpunt(en).

Er zijn relatief eenvoudige procedures om nulpunten te vinden van eerstegraadsveeltermen en tweedegraadsveeltermen. Er bestaan ook (ingewikkeldere) algoritmes voor het vinden van de nulpunten van veeltermen van de derde en vierde graad. Evariste Galois heeft in het begin van de negentiende eeuw aangetoond dat er voor vijfdegraadsveeltermen *geen* algemene procedure *kan* bestaan die alleen gebruik maakt van zogenaamde algebraïsche bewerkingen: optellen/aftrekken, vermenigvuldigen/delen en machtsverheffen/worteltrekken.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Veeltermen

Een veelterm $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ is per definitie een *som* van termen (vandaar de naam *veel-term*). Het is dikwijls handig om dergelijke som van termen ook te kunnen schrijven als een *product* van factoren. De uitdrukking 'ontbinden in factoren' betekent precies het schrijven van dergelijke som als een product:

Definitie 4.3.3 (Ontbinden in factoren)**.**

Een veelterm $d(x)$ is een **factor** van een veelterm $p(x)$ als we $p(x)$ kunnen schrijven als een product van $d(x)$ met een andere veelterm.

Dus: $d(x)$ is een *factor* van $p(x)$ als $p(x) = d(x) \cdot q(x)$ voor een zekere veelterm $q(x)$.

Een factor van de nulde graad (dus een getal) is een **triviale factor**. We beschouwen die niet als 'echte' factor.

Een veelterm $p(x)$ **ontbinden in factoren** betekent hem schrijven als een product van zo veel mogelijk niet-triviale factoren.

Voorbeeld 4.3.3 (Ontbinden in factoren)**.**

1. $x + 1$ is een factor van $x^2 - 1$ want $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.

2. De veelterm $x^2 - 1$ kan ontbonden worden in de factoren $x+1$ en $x-1$ want $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

Tot slot definiëren we nog wanneer twee veeltermen van dezelfde graad gelijk zijn aan elkaar. Veeltermen die niet dezelfde graad hebben kunnen niet gelijk zijn aan elkaar.

Definitie 4.3.4 (Gelijkheid van veeltermen)**.**

Twee veeltermen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

en

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

van dezelfde graad n zijn **gelijk** als de overeenkomstige coëfficiënten gelijk zijn:

$$a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_1 = b_1, a_0 = b_0.$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Deling van veeltermen

We bekijken eerst terug de deling met rest in de verzameling van de natuurlijke getallen.

Voorbeeld 4.4.1 (Delen-met-rest voor natuurlijke getallen.).

Zeggen dat de deling van 13 door 4 gelijk is aan 3 met rest 1, betekent dat

$$13 = 3 \cdot 4 + 1$$

omdat 4 hoogstens 3 keer in 13 kan, en er blijft dan nog 1 over.

Op dezelfde manier betekent 20 delen door 3 dat

$$20 = 6 \cdot 3 + 2$$

of met symbolen: als we *deeltal* D delen door *deler* d, krijgen we *quotiënt* q en *rest* r als volgende formule geldt:

$$D = q \cdot d + r \text{ met } r < d.$$

Daarbij is het erg belangrijk dat $r < d$: als dat niet het geval is, heb je nog niet ver genoeg gedeeld, want je kan dan de rest r nog verder delen door d.

Men kan voor veeltermen een analoge eigenschap bewijzen:

Eigenschap 4.4.1 (Euclidische deling).

Als $p(x)$ en $d(x)$ twee willekeurige veeltermen zijn,

dan bestaan er unieke veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ zodat volgende gelijkheid geldt

$$p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x) \quad \text{met } \mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$$

Definitie 4.4.1 (Euclidische deling van veeltermen).

Als $p(x)$ en $d(x)$ twee willekeurige veeltermen zijn, en $q(x)$ en $r(x)$ zijn de bijhorende unieke veeltermen zodat $p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$, waarbij $\mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$,

dan noemen we $p(x)$ het **deeltal**, $d(x)$ de **deler**, $q(x)$ het **quotiënt** en $r(x)$ de **rest**.

Als $r(x) = 0$ zegt men dat de veelterm $p(x)$ **deelbaar is door** de veelterm $d(x)$.

Opmerking 4.4.1.

Let op de strikte ongelijkheid $\mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$. Dus $\mathrm{gr}(r(x))$ mag niet gelijk zijn aan $\mathrm{gr}(d(x))$.

Er bestaat een algoritme dat voor een gegeven veelterm $p(x)$ en een gegeven deler $d(x)$ het quotiënt en de rest berekent. Het algoritme levert dus twee veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ op zodat

$$p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x) \quad \text{met } \mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$$

Voorbeeld 4.4.2 (Euclidische deling stap per stap uitgelegd).

Bereken het quotiënt en de rest van de deling van de veelterm $2x^3 + x^2 - 5x + 2$ door de veelterm $x - 3$.

Volgens de definitie hierboven moeten we dus op zoek naar de veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ die horen bij $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ (het deeltal) en $d(x) = x - 3$ (de deler).

CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Deling van veeltermen

We gebruiken een aangepaste vorm van de staartdeling van natuurlijke getallen. Bestudeer het schema samen met de uitleg.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & 2x^3 & + & x^2 & - & 5x & + & 2 & \multicolumn{1}{|l}{x-3} \\
\cline{9-9}
(b)- & 2x^3 & - & 6x^2 & & & & & \multicolumn{1}{|l}{2x^2+7x+16} \\
\cline{2-4}
 & & & 7x^2 & - & 5x & + & 2 & \multicolumn{1}{|l}{(a)\quad (c)\quad (e)} \\
 & & (d)- & 7x^2 & - & 21x & & & \multicolumn{1}{|l}{} \\
\cline{3-5}
 & & & & & 16x & + & 2 & \multicolumn{1}{|l}{} \\
 & & & & (f)- & 16x & - & 48 & \multicolumn{1}{|l}{} \\
\cline{5-8}
 & & & & & & & 50 & \multicolumn{1}{|l}{} \\
 & & & & & & & (g) & \multicolumn{1}{|l}{}
\end{array}
$$

(a) Deel de hoogstegraadsterm van $p(x)$ door de hoogstegraadsterm van $d(x)$. Dus deel $2x^3$ door x. Schrijf dit 'voorlopig quotiënt' $2x^3/x = 2x^2$ in de rechterkolom.

(b) Vermenigvuldig de deler $x-3$ met het 'voorlopig quotiënt' $2x^2$ en schrijf dit product $(x-3)\cdot 2x^2 = 2x^3 - 6x^2$ onder het deeltal. Trek dit product $2x^3 - 6x^2$ af van het deeltal $2x^3 + x^2 - 5x + 2$. Per constructie vallen de hoogste-graadstermen tegen elkaar weg. De 'voorlopige rest' is $2x^3 + x^2 - 5x + 2 - (2x^3 - 6x^2) = 7x^2 - 5x + 2$. Die 'voorlopige rest' is nog te groot, want de graad 2 van de 'voorlopige rest' is niet strikt kleiner dan de graad 1 van de deler. We gaan dus verder met de procedure.

(c) Deel opnieuw de hoogstegraadsterm van de 'voorlopige rest' (dus $7x^2$) door de hoogstegraadsterm van de deler $x-3$, dus door x. Voeg deze component $7x^2/x = 7x$ toe aan het 'voorlopig quotiënt' in de rechterkolom.

(d) Vermenigvuldig opnieuw de deler $x-3$ met deze nieuwe component $7x$ en schrijf het product $7x \cdot (x-3)$ onder de 'voorlopige rest' $7x^2 - 5x + 2$. Trek het product $7x^2 - 21x$ af van de 'voorlopige rest' $7x^2 - 5x + 2$. Per constructie vallen de hoogste-graadstermen weer tegen elkaar weg. De nieuwe 'voorlopige rest' is $7x^2 - 5x + 2 - (7x^2 - 21x) = 16x + 2$. Deze 'voorlopige rest' $16x + 2$ is nog te groot, want de graad van de 'voorlopige rest' is niet strikt kleiner dan de graad van de deler. We gaan dus verder met de procedure.

(e) Deel opnieuw de hoogstegraadsterm van de nieuwe 'voorlopige rest' $(16x)$ door x. Voeg 16 toe als nieuwe component van het 'voorlopig quotiënt'.

(f) Vermenigvuldig opnieuw de deler $x-3$ met die nieuwe component 16 en trek het product $16(x-3)$ af van de huidige 'voorlopige rest' $16x + 2$. Dit geeft de nieuwe 'voorlopige rest' 50.

(g) Omdat de graad van deze 'voorlopige rest' strikt kleiner is dan de graad van de deler, is het onmogelijk dat we de rest nog kunnen schrijven als een product van de deler met nog iets. Dit beëindigt dus de procedure. 50 is de uiteindelijke rest, en $2x^2 + 7x + 16$ is het uiteindelijke quotiënt.

Besluit: $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (2x^2 + 7x + 16)(x-3) + 50$

Voorbeeld 4.4.3. Deel $2x^3 - 8$ door $x + 2$.

Uitwerking:

CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Deling van veeltermen

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & 2x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & - & 8 & & x+2 \\
- & 2x^3 & + & 4x^2 & & & & & & \hline
 & & - & 4x^2 & + & 0x & - & 8 & & 2x^2-4x+8 \\
 & & - & 4x^2 & - & 8x & & & & \\
 & & \hline & & & 8x & - & 8 & & \\
 & & & & & 8x & + & 16 & & \\
 & & & & - & \hline & - & 24 & &
\end{array}
$$

Besluit: $2x^3 - 8 = (2x^2 - 4x + 8)(x + 2) - 24$

Voorbeeld 4.4.4. Deel $-x^3 + 9x + 2$ door $x + 4$.

Uitwerking:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & - & x^3 & + & 0x^2 & + & 9x & + & 2 & x+4 \\
- & - & x^3 & - & 4x^2 & & & & & \hline
 & & & & 4x^2 & + & 9x & + & 2 & -x^2+4x-7 \\
 & & & & 4x^2 & + & 16x & & & \\
 & & & - & \hline & - & 7x & + & 2 & \\
 & & & & & - & 7x & - & 28 & \\
 & & & & & & \hline & & 30 &
\end{array}
$$

Besluit: $-x^3 + 9x + 2 = (-x^2 + 4x - 7)(x + 4) + 30$

Voorbeeld 4.4.5. Deel $4x^4 + x^3 + 2x + 1$ door $2x^2 + 1$.

Uitwerking:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrr|l}
 & 4x^4 & + & x^3 & + & 0x^2 & + & 2x & + & 1 & & 2x^2+1 \\
- & 4x^4 & & & + & 2x^2 & & & & & & \hline
 & & & x^3 & - & 2x^2 & + & 2x & + & 1 & & 2x^2+0.5x-1 \\
 & & & x^3 & & & + & 0.5x & & & & \\
 & & - & \hline & - & 2x^2 & + & 1.5x & + & 1 & & \\
 & & & & - & 2x^2 & & & - & 1 & & \\
 & & & & - & \hline & & 1.5x & + & 2 & &
\end{array}
$$

Besluit: $4x^4 + x^3 + 2x + 1 = \left(2x^2 + \frac{1}{2}x - 1\right)(2x^2 + 1) + \left(\frac{3}{2}x + 2\right)$

Oefening 4.4.1. Zoek het quotiënt en de rest van volgende delingen met behulp van een Euclidische deling.

1. Deel $4x^3 + 4x^2 - 5x - 3$ door $2x^2 - x - 1$.

2. Deel $5x^3 + 125$ door $x + 5$.

CC BY-NC-SA 4.0

4.5 Deling door $x-a$

We bestuderen nu het delen van een veelterm door een veelterm van de *eerste graad*, dus een deler van de vorm $x-a$, met $a \in \mathbb{R}$.

Eigenschap 4.5.1 (Rest bij deling door $x-a$)**.**

Bij deling van een veelterm $p(x)$ door $x-a$ is de rest gelijk aan de getalwaarde $p(a)$ van $p(x)$ in a.

Bewijs. Uit de formule van de Euclidische deling volgt dat $p(x) = (x-a)q(x)+r(x)$ met $q(x)$ het quotiënt en $r(x)$ de rest met $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(x-a) = 1$. De rest $r(x)$ is dus een veelterm van graad nul, een getal. Noteer de rest dus als $r \in \mathbb{R}$, en bereken de getalwaarde van $p(x)$ in a: $p(a) = (a-a)q(a)+r = 0+r = r$, en dus $p(a) = r$. De rest is dus inderdaad gelijk aan de getalwaarde van $p(x)$ in a.

Voorbeeld 4.5.1.

De rest bij de deling van $p(x) = 2x^3 - 8$ door $x+2$ is $p(-2) = 2\cdot(-2)^3 - 8 = -16-8 = -24$.

Eigenschap 4.5.2 (Deelbaarheidscriterium)**.**

Een veelterm $p(x)$ is deelbaar door $x-a$ als en slechts als $p(a) = 0$.

Bewijs. $p(x)$ is deelbaar door $x-a$ als de rest van de deling van $p(x)$ door $x-a$ gelijk is aan nul. Uit vorige eigenschap volgt dat de rest van de deling van $p(x)$ door $x-a$ gelijk is aan $p(a)$. Dus de rest is nul als en slechts als $p(a) = 0$, en dat is precies het te bewijzen.

Opmerking 4.5.1. Als we een nulpunt a kennen van een veelterm $p(x)$ (met $\text{gr}(p(x)) > 1$), dan weten we wegens vorige eigenschap dat $p(x)$ deelbaar is door $x-a$. Dit wil zeggen dat er een unieke veelterm $q(x)$ bestaat zodat $p(x) = q(x)(x-a)$. We kunnen $q(x)$ vinden als quotiënt van de deling van $p(x)$ door $x-a$. Als we $p(x)$ schrijven als $p(x) = q(x)(x-a)$ hebben we $p(x)$ ontbonden in de factoren $q(x)$ en $x-a$. Als $\text{gr}(q(x)) > 1$ en $q(x)$ heeft minstens 1 nulpunt, dan kan $q(x)$ nog verder ontbonden worden in factoren. Om veeltermen te ontbinden in factoren moeten we dus zoeken naar nulpunten.

Voorbeeld 4.5.2.

Voor de veelterm $p(x) = 2x^4 - 4x^3 + x^2 - x - 2$, kunnen we berekenen dat $p(2) = 0$.

We kunnen $p(x)$ dus schrijven als $p(x) = q(x)(x-2)$, waarbij we $q(x)$ kunnen vinden als quotiënt van de deling van $p(x)$ door $x-2$. Na het uitvoeren van de Euclidische deling vinden we dat $q(x) = 2x^3+x+1$.

Hoe vind je een nulpunt van een veelterm? In het algemeen zal je hier een benaderingmethode voor moeten gebruiken. Voor het speciale maar toch veel voorkomend geval van veeltermen met *gehele* coefficiënten bestaat er wel een procedure:

Eigenschap 4.5.3.

Als een veelterm $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$, *met gehele coëfficiënten* a_i, deelbaar is door $x-a$, met a een *geheel getal*, **dan** is a *een gehele deler van de constante term* a_0 van deze veelterm $p(x)$.

Bewijs. Omdat $p(x)$ deelbaar is door $x-a$ volgt dat $p(a) = 0$. Welnu, a invullen in $p(x) = 0$ en de

CC BY-NC-SA 4.0

4.5 Deling door $x - a$

constante term naar het rechterlid brengen levert dan

$$a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots a_1 a = -a_0$$

waarbij in het linkerlid een factor a kan worden afgezonderd. Dat betekent precies dat a een deler is van $-a_0$, en dus ook van a_0.

Opmerking 4.5.2.

- We kunnen bovenstaande eigenschap ook formuleren als:

  Als a een geheel nulpunt is van een veelterm $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$, *met gehele coëfficiënten* a_i, **dan** is a *een gehele deler van de constante term* a_0 van deze veelterm $p(x)$.

- De eigenschap zegt **niet** dat elke gehele deler van de constante term a_0 van een veelterm een nulpunt is van deze veelterm, maar **wel** dat *alle mogelijke gehele nulpunten* te vinden zijn in de (eindige) verzameling van gehele delers van de constante term a_0.

Voorbeeld 4.5.3. Bepaal alle gehele a zodat $p(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ deelbaar is door $x - a$.

We moeten dus alle gehele nulpunten van $p(x)$ bepalen. Uit vorige eigenschap volgt dat enkel gehele delers van de constante term in aanmerking komen, dus $\pm 1, \pm 3, \pm 9$:

$$\begin{array}{llll}
p(x) & \text{is deelbaar door} & (x-1) & \text{omdat} \quad p(\ 1) = 0 \\
p(x) & \text{is deelbaar door} & (x+1) & \text{omdat} \quad p(-1) = 0 \\
p(x) & \text{is deelbaar door} & (x-3) & \text{omdat} \quad p(\ 3) = 0 \\
p(x) & \text{is deelbaar door} & (x+3) & \text{omdat} \quad p(-3) = 0 \\
p(x) & \text{is niet deelbaar door} & (x-9) & \text{omdat} \quad p(\ 9) \neq 0 \\
p(x) & \text{is niet deelbaar door} & (x+9) & \text{omdat} \quad p(-9) \neq 0.
\end{array}$$

Voorbeeld 4.5.4. Bepaal alle gehele a zodat $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ deelbaar is door $x - a$.

We moeten dus alle gehele nulpunten van $p(x)$ bepalen. Uit vorige eigenschap volgt dat enkel delers van de constante term in aanmerking komen, dus ± 1 en ± 2:

$$\begin{array}{llll}
p(x) & \text{is niet deelbaar door} & (x-1) & \text{omdat} \quad p(\ 1) \neq 0 \\
p(x) & \text{is niet deelbaar door} & (x+1) & \text{omdat} \quad p(-1) \neq 0 \\
p(x) & \text{is deelbaar door} & (x-2) & \text{omdat} \quad p(\ 2) = 0 \\
p(x) & \text{is niet deelbaar door} & (x+2) & \text{omdat} \quad p(-2) \neq 0.
\end{array}$$

We vinden enkel dat $p(x)$ deelbaar is door $x - 2$. Het quotiënt van de deling van $x^3 - 2x^2 + x - 2$ door $x - 2$ kunnen we bepalen met het algoritme van de Euclidische deling.

regel van Horner: hoef je niet te gebruiken maar rekent wel sneller dan Euclidische deling. We leggen het Rekenschema van Horner uit aan de hand van een voorbeeld. Als je deze regel kent kan je deze verder gebruiken, want je kan hiermee sneller rekenen. Als je deze regel niet kent gebruik je best de Euclidische deling, omdat die veel duidelijker is.

CC BY-NC-SA 4.0

4.5 Deling door $x - a$

Voorbeeld4.5.5. Deel $x^3 - 2x^2 + x - 2$ door $x - 2$.

Noem de veelterm $p(x)$.

Het startschema ziet eruit als volgt

	1	−2	1	−2
2				

waarbij de coefficiënten van $p(x)$ in de bovenste rij staan. We laten nu de eerste coëfficiënt (dus 1) zakken, vermenigvuldigen die met de 2 links, en schrijven het resultaat op de tweede rij, onder de tweede coëfficiënt (dus onder -2):

	1	−2	1	−2
2		2		
	1			

We tellen de -2 en 2 bij elkaar op, schrijven het resultaat $-2+2=0$ onderaan en vermenigvuldigen 0 met de linkse 2 en schrijven het resultaat 0 weer op de tweede rij, onder de 1, en tellen dan 0 op bij die 1:

	1	−2	1	−2
2		2	0	
	1	0	1	

We vermenigvuldigen opnieuw de onderste 1 met de linkse 2, schrijven het product 2 onder de -2, tellen op en krijgen rechts onderaan het getal 0:

	1	−2	1	−2
2		2	0	2
	1	0	1	0

Het schema is nu volledig, en men kan bewijzen dat het meest rechtse getal onderaan de rest is van de deling van $p(x)$ door $x - 2$, en dat de overige getallen in de onderste rij steeds de coëfficiënten zijn van het quotiënt van $p(x)$ gedeeld door $x - 2$.

Het quotiënt is dus $x^2 + 1$ en de rest is 0, of

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x - 2)(x^2 + 1)$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.6 Veeltermen ontbinden in factoren

Stel dat een veelterm $p(x)$ deelbaar is door $x-a$. Dan bestaat er een unieke veelterm $q(x)$ zodat $p(x) = q(x)(x-a)$. De veelterm $p(x)$ is dan ontbonden in de factoren $q(x)$ en $x-a$. Als de veelterm $q(x)$ minstens één nulpunt heeft, kan $q(x)$ verder ontbonden worden in factoren. Wanneer $q(x)$ bijvoorbeeld een tweedegraadsveelterm is met negatieve discriminant, dan kan $q(x)$ niet verder ontbonden worden in factoren. We illustreren het ontbinden in factoren met een voorbeeld van een derdegraadsveelterm:

Voorbeeld 4.6.1. Ontbind de veelterm $p(x) = x^3 - 7x - 6$ in factoren van zo laag mogelijke graad.

Uitwerking: We zoeken eerst een nulpunt van de gegeven veelterm. We gaan na of $p(x)$ een geheel nulpunt a heeft. Hiervoor moet a een deler zijn van de constante term. De mogelijkheden zijn dus $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$.

We berekenen $p(1) = 1 - 7 - 6 \neq 0, p(2) = 8 - 14 - 6 \neq 0$, maar $p(3) = 27 - 21 - 6 = 0$.

Er bestaat dus zeker een veelterm $q(x)$ zodat $x^3 - 7x - 6 = (x-3)q(x)$.

Deze veelterm $q(x)$ kan je berekenen met de Euclidische Deling:

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
1x^3 & + & 0x^2 & - & 7x & - & 6 & & x-3 \\
\cline{9-9}
-(1x^3 & - & 3x^2) & & & & & & x^2+3x+2 \\
\cline{1-3}
 & & 3x^2 & - & 7x & - & 6 & & \\
 & & -(3x^2 & - & 9x) & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & 2x & - & 6 & & \\
 & & & & -(2x & - & 6) & & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Hieruit volgt dat $x^3 - 7x - 6 = (x-3)(x^2+3x+2)$. Nu gaan we na of de factor x^2+3x+2 nog verder kan worden ontbonden. De discriminant in positief, en de nulpunten zijn: $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = -2, -1$.

We vinden de ontbinding $x^3 - 7x - 6 = (x-3)(x+1)(x+2)$.

Merk op: in dit geval had je ook voor de overige delers van de constante term 6 de getalwaarde van $p(x)$ kunnen berekenen, en vinden dat $p(-1) = -1 + 7 - 6 = 0$ en ook $p(-2) = -8 + 14 - 6 = 0$. De drie nulpunten van $p(x)$ zijn dus $3, -1$ en -2, en daaruit volgt ook dadelijk de ontbinding $x^3 - 7x - 6 = (x-3)(x+1)(x+2)$. Dat werkt hier omdat *alle* nulpunten geheel zijn, de methode met de discriminant werkt ook voor niet-gehele nulpunten.

Opmerking 4.6.1.

Een veelterm van graad 3 heeft altijd minstens één reëel nulpunt. Als dit nulpunt geen geheel getal is, dan kunnen we dit niet vinden met de technieken hierboven. Als dit nulpunt wel een geheel nulpunt is, dan kunnen we dit vinden onder de gehele delers van de constante term. In dat geval kunnen we de veelterm ontbinden in ofwel 3 factoren van de eerste graad, ofwel in een factor van de eerste graad en een factor van de tweede graad met negatieve discriminant.

Oefening 4.6.1. Ontbind de volgende veeltermen in factoren:

1. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = \ldots\ldots$
2. $2x^3 + x^2 - 8x + 5 = \ldots\ldots$
3. $x^2 - 2 = \ldots\ldots$
4. $x(x+1)(2x+1) + 6(x+1)^2 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0