KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Voorbereiding
Week 2
Oefenzitting 1

(Versie 2026/10/12H.8)

Inhoudsopgave

1 Quiz Week 2 Oefenzitting 1 1.1

1.1 Quiz Week 2 Oefenzitting 1 . . . 1.1

2 Elementair Rekenen 2.1

2.1 Haakjes en ontbinden in factoren . . . 2.1

2.2 Breuken . . . 2.3

2.3 Machten . . . 2.9

2.3.1 Machten met gehele exponent . . . 2.9

2.3.2 Machten met rationale exponent . . . 2.10

2.3.3 Machten reële exponent . . . 2.12

2.3.A Herhalingsoefeningen breuken, haakjes, machten . . . 2.13

3 Verzamelingen 3.1

3.1 Verzamelingen . . . 3.1

3.2 Bewerkingen met verzamelingen . . . 3.4

4 Ongelijkheden en absolute waarde 4.1

4.1 Absolute waarde . . . 4.1

4.2 Ongelijkheden in 1 onbekende . . . 4.3

4.3 Absolute waarde en ongelijkheden . . . 4.5

5 Complexe getallen 5.1

5.1 Complexe getallen . . . 5.1

5.1.1 Het complexe vlak . . . 5.1

5.1.2 Rekenen met complexe getallen $z = x + iy$ . . . 5.2

5.1.3 Complex toegevoegde . . . 5.3

6 Sommatieteken en faculteit 6.1

6.1 Het sommatieteken $\sum$ . . . 6.1

6.2 De faculteit $n!$ . . . 6.5

6.3 Binomiaalgetallen . . . 6.7

1.1 Quiz Week 2 Oefenzitting 1

Hoe los je de online voorbereidende oefeningen op?

- Bij de meeste vragen moet je je antwoord zelf ingeven. Je klikt op het blauwe vraagteken om je antwoord te laten controleren. Als je antwoord fout is, wordt het blauwe vraagteken een rood kruisje. Als het antwoord juist is, verdwijnt het invulvakje en wordt een correct standaardantwoord in het blauw getoond.
- Soms is het antwoord te ingewikkeld om het volledig zelf te typen, en voorzien we geen invulveld, maar enkel een knop 'Toon Antwoord' waarmee je je oplossing kan controleren. Het heeft pas zin om hier op te klikken als je de oefening eerst zelf gemaakt hebt.
- Soms geven we meerkeuzevragen.
- Voor het ingeven van antwoorden gelden volgende afspraken:
  (a) Voor kommagetallen moet je een punt gebruiken, dus 1.5 in plaats van 1,5.
  (b) In formules schrijf je de vermenigvuldiging nooit als punt of een ×. Dus $2(a+b)$ geef je in als `2(a+b)` maar niet `2.(a+b)` of `2x(a+b)`. En $2x$ is `2x`, maar niet `2.x`.
  (c) Breuken, machten, π en logaritme:

Symbool	Code
$\frac{1}{2}$	`1/2`
x^2	`x^2`
π	`pi`
$\ln 2$	`ln 2`

  Machten zoals x^2 geef je dus in als `x^2`. Gebruik *niet* de toetsen ^{2} en ^{3} op je toetsenbord.
- Na het invullen van een vraag word je doorverwezen naar een onderdeel van de bijhorende voorkennisles.
- Testen op te lossen zonder rekentoestel!

Quiz Week 2 Oefenzitting 1

Oefening 1.1.1 (Elementair rekenen)**.**

1. Vul aan: $(p+1)^2 + \frac{(p+1)^3}{2} + \frac{(p+1)^2}{6} = \frac{(p+1)^2}{2} \cdot [\ldots\ldots]$

2. Ontbind in factoren. $81x^2y^2 - 25 = \ldots\ldots$

Schrijf onderstaande uitdrukkingen zo eenvoudig mogelijk. Je mag veronderstellen dat een uitdrukking die in de noemer staat steeds verschilt van 0.

3. $\dfrac{\frac{a-b}{b}}{1-\frac{a}{b}} = \ldots\ldots$

4. $y^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x^2y}}{xy}\right)^4 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3} = \ldots\ldots$

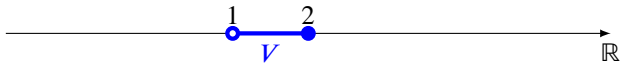
5. $\dfrac{-1}{1-\frac{x+1}{x}} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Quiz Week 2 Oefenzitting 1

Oefening 1.1.2 (Verzamelingen).

1. Schrijf volgende verzameling als een interval:



$V = \ldots\ldots$

Oefening 1.1.3 (Ongelijkheden en absolute waarde).

1. $|3-2x| < 1 \iff x \in$

$]-\infty, 2[$	$]1, 2[$	$]1, +\infty[$	$]2, +\infty[$	geen oplossingen

Oefening 1.1.4 (Complexe getallen). Schrijf als een complex getal van de vorm $x + yi$:

1. $(1+2i)+(3+4i) = \ldots\ldots$

2. $(1+2i)\cdot(3+4i) = \ldots\ldots$

3. $i^3 = \ldots\ldots$

4. $\dfrac{1+2i}{3+4i} = \ldots\ldots$

5. $\overline{(2+3i)\cdot(-2+i)} = \ldots\ldots$

Oefening 1.1.5 (Sommatieteken en faculteit).

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 + \ldots\ldots$

2. $\dfrac{1}{(k-1)!\cdot(n+1)!} + \dfrac{1}{k!\cdot n!} = \dfrac{\ldots\ldots}{k!\cdot(n+1)!}$

3. $\binom{k+1}{k} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Haakjes en ontbinden in factoren

Optellen $(2+3)$ en vermenigvuldigen $(2\cdot 3)$ zijn de twee basisoperaties met getallen. Bij combinaties zoals $2+3\cdot 5$ wordt om historische redenen eerst vermenigvuldigd en dan opgeteld, dus $2+3\cdot 5 = 2+(3\cdot 5) = 2+15 = 17$. Als je de andere volgorde wil *moet* je haakjes zetten: $(2+3)\cdot 5 = 5\cdot 5 = 25$.

Zeker zodra er ook met letters wordt gerekend, wordt het belangrijk om van sommen producten te kunnen maken, of omgekeerd van producten sommen te kunnen maken:

$2\cdot(a+3) = 2\cdot a + 2\cdot 3 = 2a+6$ product van 2 en $a+3$ wordt som van $2a$ en 6
$2\cdot a+6 = 2\cdot a + 2\cdot 3 = 2\cdot(a+3)$ som van $2a$ en 6 wordt product van 2 en $a+3$

Uitwerken van haakjes betekent *producten* herschrijven als *sommen*, zoals $2(a+b) = 2a+2b$.
Ontbinden in factoren betekent een *som* (of getal) herschrijven als een *product*, zoals $2a^2+6a = 2a(a+3)$.

Voor 'haakjes uitwerken' en 'ontbinden' gelden dezelfde regels, maar ze moeten telkens in de andere richting worden gelezen. Van links naar rechts zeggen ze hoe je een product (of een macht, dat is ook een product) schrijft als een som, maar van rechts naar links gelezen zeggen ze hoe je een som schrijft als een product.

Eigenschap 2.1.1. Zij $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(a+b)c &= ac+bc && \text{(distributiviteit van } \cdot \text{ t.o.v. } +)\\
a(c+d) &= ac+ad && \text{(idem, maar met som rechts)}\\
(a+b)(c+d) &= ac+ad+bc+bd && \text{(want gelijk aan } (a+b)c+(a+b)d)\\
-(a+b) &= -a-b && \text{(want } (-1)(a+b) = (-1)a+(-1)b)\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 && \text{(kwadraat van een tweeterm)}\\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 && \text{(kwadraat van tweeterm via } (a+(-b))^2)\\
(a+b)(a-b) &= a^2-b^2 && \text{(verschil van twee kwadraten)}
\end{aligned}$$

Voor hogere machten gelden volgende formules:

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 && \text{(derdemacht van een tweeterm)}\\
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k && \text{(Binomium van Newton)}\\
a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2) && \text{(som van derdemachten)}\\
a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) && \text{(verschil van derdemachten)}\\
a^n-b^n &= (a-b)(a^{n-1}+ba^{n-2}+b^2a^{n-3}+\cdots+b^{n-2}a+b^{n-1}) && \text{(verschil van } n^{\text{de}} \text{ machten)}\\
a^n+b^n &= (a+b)(a^{n-1}-ba^{n-2}+b^2a^{n-3}-\cdots-b^{n-2}a+b^{n-1}) && \text{(som } n^{\text{de}} \text{ machten, } n \textbf{ oneven})
\end{aligned}$$

Opmerking 2.1.1.

Het Binomium van Newton staat hier enkel als referentie, het wordt verder nog uitgelegd.

Voorbeeld 2.1.1. Vereenvoudig door de haakjes uit te werken. $(x,y,p,q \in \mathbb{R})$

1. $1-(x-y-1) = -x+y+2$

Uitwerking: $1-(x-y-1) = 1-x+y+1 = -x+y+2$

2. $1-(p-q)+p = q+1$

Uitwerking: $1-(p-q)+p = 1-p+q+p = q+1$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Haakjes en ontbinden in factoren

Voorbeeld 2.1.2. Werk de haakjes uit: $(x, y \in \mathbb{R})$

1. $(x+y)(x+3y)^2 = x^3+7x^2y+15xy^2+9y^3$

Uitwerking: $(x+y)(x+3y)^2 = (x+y)(x^2+6xy+9y^2) = x^3+6x^2y+9xy^2+yx^2+6xy^2+9y^3 = x^3+7x^2y+15xy^2+9y^3$

Voorbeeld 2.1.3. Vul aan door de voorgestelde factor buiten de haakjes te brengen, en vereenvoudig zo ver mogelijk. $(p, r, s, x \in \mathbb{R})$

1. $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot \left(4p+5\right)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 &= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^2 \cdot (p+1) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot (p+1) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (1 + 4(p+1)) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (1 + 4p + 4) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (4p+5)\,.
\end{aligned}$$

2. $(3p+2)\frac{4r}{3} - 4r(p-1) = \frac{4r}{3} \cdot (5)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
(3p+2)\frac{4r}{3} - 4r(p-1) &= \frac{4r}{3} \cdot (3p+2) - \frac{4r}{3} \cdot 3 \cdot (p-1) \\
&= \frac{4r}{3}(3p + 2 - 3 \cdot (p-1)) \\
&= \frac{4r}{3}(3p + 2 - 3p + 3) \\
&= \frac{4r}{3} \cdot 5.
\end{aligned}$$

3. $\frac{xs}{8} + \frac{xs^2}{4} + 3x^3s^3 = \frac{xs}{8}(1 + 2s + 24x^2s^2)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\frac{xs}{8} + \frac{xs^2}{4} + 3x^3s^3 &= \frac{xs}{8} \cdot 1 + \frac{xs}{8} \cdot 2s + \frac{xs}{8} \cdot 24x^2s^2 \\
&= \frac{xs}{8}(1 + 2s + 24x^2s^2).
\end{aligned}$$

Voorbeeld 2.1.4. Ontbind in factoren. $(x, y, r \in \mathbb{R})$

1. $81x^2y^2 - 25 = (9xy+5)(9xy-5)$

Uitwerking: $81x^2y^2 - 25 = (9xy)^2 - 5^2 = (9xy+5)(9xy-5)$ (verschil van twee kwadraten)

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

Definitie 2.2.1 (Definitie breuken).

Een **breuk** is een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b}$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en $b \neq 0$.
We noemen a de **teller**, b de **noemer** en de streep tussen beide getallen de **breukstreep**.

Voor reële getallen a, b, c, d met $b \neq 0$ en $d \neq 0$ geldt

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

We noemen $-\frac{a}{b}$ de **tegengestelde breuk** van $\frac{a}{b}$.

Als $a \neq 0$ en $b \neq 0$ noemen we $\frac{b}{a}$ de **omgekeerde breuk** van $\frac{a}{b}$.

Een *breuk* is dus per definitie een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b}$ met $a, b \in \mathbb{R}$, met $b \neq 0$. Wanneer a en b concrete getallen zijn, bijvoorbeeld de breuk $\frac{3}{4}$, dan kunnen we de breuk omzetten naar een kommagetal: $\frac{3}{4} = 0.75$. We zullen hier echter voornamelijk werken met breuken met letters, zoals $\frac{a-b}{x}, \frac{x^2y}{y^3}, \ldots$, met $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ en $x \neq 0,\ y \neq 0$.

Bij de notatie van de tegengestelde breuk van $\frac{a}{b}$ mag je kiezen of je het minteken in de teller, de noemer of voor de gehele breuk plaatst.

Eigenschap 2.2.1 (Mintekens).

Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ geldt: $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

Voorbeeld 2.2.1 (Mintekens).

1. $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$
2. Voor $b \in \mathbb{R}$ met $b \neq 1$ geldt: $-\frac{b+1}{1-b} = \frac{-(b+1)}{1-b} = \frac{-b-1}{1-b} = \frac{b+1}{b-1}$

Waarschuwing 2.2.1 (Veelgemaakte fouten).

Gebruik **haakjes** om een minteken voor een teller of een noemer te plaatsen. Bijvoorbeeld ($a \in \mathbb{R}$):

$$-\frac{a+5}{7} = \frac{-(a+5)}{7} = \frac{-a-5}{7} = \frac{a+5}{-7}.$$

Een vaak gemaakte fout is het minteken enkel voor één term te plaatsen $-\frac{a+5}{7} \neq \frac{-a+5}{7}$.

Omgekeerd geldt ook dat als er één term in de teller een minteken heeft, je dat minteken niet zonder meer voor de hele breuk mag plaatsen ($b \in \mathbb{R}$): $\frac{-2+b}{4} \neq -\frac{2+b}{4}$. Wel geldt dat

$$\frac{-2+b}{4} = \frac{-(2-b)}{4} = -\frac{2-b}{4}$$

Deze opmerkingen gelden evenzeer voor mintekens in de noemer.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

Oefening 2.2.1. Voor $x \in \mathbb{R}$ met $x \neq 1$ geldt: $-\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{x-1}$

Eigenschap 2.2.2. Voor $a, b, k \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ geldt

$$k \cdot \frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{b} \qquad \text{(getal maal breuk)}$$

$$\frac{k \cdot a}{b} = k \cdot \frac{a}{b} \qquad \text{(factor uit teller halen)}$$

Voorbeeld 2.2.2 (Getal maal breuk)**.** $(a, b \in \mathbb{R})$

1. $7 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{3}$
2. $3 \cdot \dfrac{a+5}{7} = \dfrac{3(a+5)}{7} = \dfrac{3a+15}{7}$
3. $\dfrac{-10+5b}{4} = \dfrac{5(-2+b)}{4} = 5 \cdot \dfrac{-2+b}{4}$

Je kan breuken soms **vereenvoudigen** door de teller en de noemer beide te delen door eenzelfde factor, op voorwaarde dat deze factor verschillend is van nul. Meestal wordt in een oefening verwacht dat je een breuk zo eenvoudig mogelijk noteert. Je mag teller en noemer van een breuk ook vermenigvuldigen met eenzelfde factor verschillend van nul. Dit is nuttig om twee breuken op dezelfde noemer zetten.

Eigenschap 2.2.3. Voor $a, b, k \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ en $k \neq 0$ geldt

$$\frac{k \cdot a}{k \cdot b} = \frac{\cancel{k} \cdot a}{\cancel{k} \cdot b} = \frac{a}{b} \qquad \text{(gemeenschappelijke factor } k \text{ wegdelen)}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b} \qquad \text{(met factor } k \text{ vermenigvuldigen)}$$

Voorbeeld 2.2.3 (Vereenvoudigen)**.**

1. $\dfrac{10}{15} = \dfrac{5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \dfrac{2}{3}$
2. $\dfrac{2x}{4} = \dfrac{2 \cdot x}{2 \cdot 2} = \dfrac{x}{2}$
3. Voor $x, y \in \mathbb{R}$ met $y \neq 0$ geldt: $\dfrac{x^2 y}{y^3} = \dfrac{y \cdot x^2}{y \cdot y^2} = \dfrac{x^2}{y^2}$
4. Voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$, $d \neq 0$ geldt: $\dfrac{ab+ac}{ad} = \dfrac{a(b+c)}{ad} = \dfrac{b+c}{d}$
5. Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq b$ geldt: $\dfrac{a^2-b^2}{3a-3b} = \dfrac{(a-b)\cdot(a+b)}{(a-b)\cdot 3} = \dfrac{a+b}{3}$

Waarschuwing 2.2.2 (Veelgemaakte fouten)**.**

Voor willekeurige $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq -1$ kunnen we $\dfrac{a+3}{a+1}$ niet vereenvoudigen, wegens geen gemeen-

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

schappelijke factor in teller en noemer.

$$\frac{a+3}{a+1} \neq \frac{0+3}{0+1}$$
$$\frac{a+3}{a+1} \neq \frac{1+3}{1+1}$$

De eerste gelijkheid geldt wel voor $a = 0$ en de tweede voor $a = 1$, maar de gelijkheden gelden niet voor willekeurige $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq -1$.

Voor willekeurige $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq -\frac{1}{2}$ kunnen we $\frac{2a}{2a+1}$ niet vereenvoudigen:

$$\frac{2a}{2a+1} \neq \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}a+1} = \frac{a}{a+1}.$$

Indien we toch de factor 2 willen weg delen in teller en noemer gebruiken we haakjes:

$$\frac{2a}{2a+1} = \frac{2a}{2\left(a+\frac{1}{2}\right)} = \frac{a}{a+\frac{1}{2}}.$$

Oefening 2.2.2. Vereenvoudig $(p, q \in \mathbb{R}, p \neq q)$.

1. $\frac{p^2-q^2}{p-q} = \ldots\ldots$

Breuken met gelijke noemer kan je **optellen** door de tellers op te tellen. Breuken optellen is dus een som van breuken schrijven als één breuk. Omgekeerd, als de teller van een breuk een som is, kan je de breuk splitsen, wat wil zeggen dat je deze schrijft als een som van 2 breuken.

Definitie 2.2.2 (Som van breuken met gelijke noemer en splitsen van breuken)**.**

Voor $a, b, c \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ geldt

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \text{(breuken optellen, gelijke noemers)}$$
$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \qquad \text{(som in teller splitsen)}$$

Voorbeeld 2.2.4 (Som van breuken met gelijke noemer, splitsen van breuken)**.**

1. $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$

2. Voor $x, y \in \mathbb{R}$ met $y \neq 0$ geldt: $\frac{x-y}{y^2} + \frac{3x+y}{y^2} = \frac{x-y+3x+y}{y^2} = \frac{4x}{y^2}$

3. Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq b$ geldt: $\frac{3a+b^2}{a} = \frac{3a}{a} + \frac{b^2}{a} = 3 + \frac{b^2}{a}$

Waarschuwing 2.2.3 (Veelgemaakte fouten)**.**

Als de noemer van een breuk een som is kan je niet meteen de breuk splitsen. Voor een willekeurige $b \in \mathbb{R}$ met $b \neq -3$ kunnen we niet als volgt splitsen:

$$\frac{2}{b+3} \neq \frac{2}{b} + \frac{2}{3}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

Breuken met verschillende noemer kan je optellen of aftrekken door deze eerst op gelijke noemer te brengen. Je kan als gemeenschappelijke noemer het product van beide noemers nemen.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \quad = \quad \frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd} \quad = \quad \frac{ad+bc}{bd}.$$

Voorbeeld 2.2.5 (Som van breuken met verschillende noemer). $(x, y, a, b \in \mathbb{R}_0)$

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{2\cdot 1}{2\cdot 3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$

2. $\frac{1}{3x}+\frac{2}{y}=\frac{y}{3x\cdot y}+\frac{3x\cdot 2}{3x\cdot y}=\frac{6x+y}{3xy}$

3. $\frac{a+b}{2a}+\frac{a-b}{3b}=\frac{(a+b)3b}{2a\cdot 3b}+\frac{2a(a-b)}{2a\cdot 3b}=\frac{3ab+3b^2}{6ab}+\frac{2a^2-2ab}{6ab}=\frac{2a^2+ab+3b^2}{6ab}$

Oefening 2.2.3.

1. Schrijf $a-\frac{a}{b}$ als één breuk. $(a, b \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0)$

Als gemeenschappelijke noemer het product van beide gegeven noemers nemen is altijd een correcte werkwijze, maar vaak niet de meest efficiënte. Ontbind eerst de noemers zo ver mogelijk in factoren. Bij gehele getallen bedoelen we met ontbinden in factoren het geheel getal schrijven als een product van priemfactoren. Als nieuwe noemer kies je dan het kleinste gemene veelvoud van de noemers. Dit kleinste gemene veelvoud vind je door van elke factor die voorkomt in één van de noemers de hoogste macht te nemen die voorkomt en deze te vermenigvuldigen met elkaar.

Voorbeeld 2.2.6 (Som van breuken met verschillende noemer).

Met behulp van het kleinste gemene veelvoud kan de optelling sneller:

1.

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5}{2^2\cdot 3}+\frac{7}{2\cdot 3^2}=\frac{5\cdot 3}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7\cdot 2}{2^2\cdot 3^2}=\frac{15}{36}+\frac{14}{36}=\frac{29}{36} \quad \text{i.p.v.} \quad \frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 18}{12\cdot 18}+\frac{7\cdot 12}{18\cdot 12}=\frac{174}{216}$$

2. Voor $a, b, k, l, m \in \mathbb{R}$ met $k \neq 0$, $l \neq 0$ en $m \neq 0$:

$$\frac{a}{k\cdot l}+\frac{b}{m\cdot l}=\frac{a\cdot m}{k\cdot l\cdot m}+\frac{b\cdot k}{k\cdot l\cdot m}=\frac{a\cdot m+b\cdot k}{k\cdot l\cdot m} \quad \text{i.p.v.} \quad \frac{a}{k\cdot l}+\frac{b}{m\cdot l}=\frac{a\cdot m\cdot l+b\cdot k\cdot l}{k\cdot l\cdot m\cdot l}=\ldots$$

3. Voor $a, b, k, l \in \mathbb{R}$ met $k \neq 0$ en $l \neq 0$:

$$\frac{a}{k^2\cdot l^2}+\frac{b}{k\cdot l^3}=\frac{a\cdot l}{k^2\cdot l^3}+\frac{b\cdot k}{k^2\cdot l^3}=\frac{a\cdot l+b\cdot k}{k^2\cdot l^3}$$

Breuken **vermenigvuldigen of delen** is eenvoudiger dan optellen of aftrekken. Hiervoor hoef je ze niet eerst op gelijke noemer te brengen.

Definitie 2.2.3.

Voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$, $c \neq 0$ en $d \neq 0$ geldt

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \qquad \text{(vermenigvuldiging)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \overset{\text{def}}{=} \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c} \qquad \text{(deling)}$$

Voorbeeld 2.2.7 (Breuken vermenigvuldigen en delen). $(x, y \in \mathbb{R}_0)$

1. $\dfrac{2x}{3}\cdot\dfrac{2}{x} = \dfrac{4x}{3x} = \dfrac{4}{3}$
2. $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{3}{y}} = \dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{y}{3} = \dfrac{xy}{6}$

Opmerking 2.2.1 (Breuken van breuken).

In de definitie van deling van breuken gebruiken we breuken van breuken. Voor breuken van breuken is de *grootte* van de verschillende breukstrepen en de precieze *plaats* van de symbolen erg belangrijk. Beide breukstrepen mogen niet even groot zijn want dan is de uitdrukking niet ondubbelzinnig. We schrijven voor de leesbaarheid de grootste breukstreep altijd in het midden van de relevante formule. Dus

$$x = \frac{\frac{1+a}{2}+3}{4+\frac{\frac{1}{5}+a}{6}} \quad \text{maar nooit} \quad x = \frac{\frac{1+a}{2}+3}{4+\frac{\frac{1}{5}+a}{6}}.$$

Oefening 2.2.4. Schrijf als één breuk en vereenvoudig zo ver mogelijk $(p, q \in \mathbb{R}_0)$.

1. $\dfrac{\frac{p+qp}{pq^2}}{\frac{p^2}{q}} = \ldots\ldots$

Eigenschap 2.2.4 (Eenvoudige maar belangrijke gevolgen).

Voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, met $b \neq 0$, $c \neq 0$ geldt

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c} = \frac{a}{c} \qquad \text{(gelijke noemer } \frac{1}{b} \text{ wegdelen)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c} = \frac{a}{b\cdot c} \qquad \text{(breuk gedeeld door getal is maal in noemer)}$$

$$\frac{a}{\frac{c}{d}} = a\cdot\frac{d}{c} = \frac{a\cdot d}{c} \qquad \text{(getal gedeeld door breuk is maal omgekeerde)}$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

Voorbeeld 2.2.8. Vereenvoudig door met slechts één breukstreep te schrijven.($x, y \in \mathbb{R}_0$)

1. $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{y}{2}} = \dfrac{x}{y}$

Uitwerking: $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{y}{2}} = \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{2}{y} = \dfrac{x}{y}$

2. $\dfrac{x+y}{\frac{x}{y}} = \dfrac{(x+y)y}{x}$

Uitwerking: $\dfrac{x+y}{\frac{x}{y}} = (x+y) \cdot \dfrac{y}{x} = \dfrac{(x+y)y}{x}$

3. $\dfrac{\frac{x+y}{x}}{y} = \dfrac{x+y}{xy}$

Uitwerking: $\dfrac{\frac{x+y}{x}}{y} = \dfrac{x+y}{x} \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{x+y}{xy}$

Tot slot nog enkele trucjes die in sommige contexten nuttig kunnen zijn.

Eigenschap 2.2.5 (trucjes). ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ en $d \neq 0$)

$$
\begin{aligned}
a + c &= d \cdot \left(\frac{a}{d} + \frac{c}{d}\right) && \text{(niet bestaande factor buiten haakjes brengen)} \\
a &= \frac{a}{1} && \text{(van 'geen breuk' toch 'breuk' maken)} \\
b &= \frac{1}{1/b} && \text{(van 'geen breuk' toch 'breuk' maken (variant))} \\
a \cdot b &= \frac{a}{1/b} && \text{(van een product een breuk maken)} \\
\frac{a}{b} &= a \cdot \frac{1}{b} && \text{(van een breuk een product maken)}
\end{aligned}
$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Machten

2.3.1 Machten met gehele exponent

Net zoals *vermenigvuldigen* 'herhaald optellen' is: $3 \times 2 \overset{\text{def}}{=} 2+2+2$ en $n \times a = \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n \text{ termen}}$,

is *machtsverheffen* 'herhaald vermenigvuldigen': $2^3 \overset{\text{def}}{=} 2 \cdot 2 \cdot 2$ en $a^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factoren}}$.

Definitie 2.3.1 (Machtsverheffing met reëel grondtal en gehele exponent)**.**
De n**-de macht** van een reëel getal a, met $n \in \mathbb{N}$, genoteerd a^n, is

$$\begin{aligned} a^0 &\overset{\text{def}}{=} 1 && \text{als } a \neq 0 \\ a^n &\overset{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factoren}} && \text{als } n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

We noemen a het **grondtal** en n de **exponent**.
Als a niet nul is, dan definiëren we ook machten met *negatieve* gehele exponenten:

$$a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}.$$

De uitdrukkingen 0^0 en 0^{-n} zijn *onbepaald* en hebben dus *geen betekenis*.

Oefening 2.3.1. Onmiddellijke gevolgen van de definities:

1. $a^1 = a$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.
2. $a^0 = 1$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0$.
3. $0^n = \ldots\ldots$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$, 0^{-n} is niet gedefinieerd voor $n \in \mathbb{N}$.
4. $a^{-1} = \frac{1}{a}$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0$.

Omdat $a^2 = a \cdot a$ en $a^3 = a \cdot a \cdot a$ volgt ook direct dat

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^3 &= (a \cdot a)(a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{2+3} = a^5 \\ (a^2)^3 &= (a \cdot a)^3 = (a \cdot a)(a \cdot a)(a \cdot a) = a^{2 \cdot 3} = a^6 \\ a^3 \cdot b^3 &= (a \cdot a \cdot a)(b \cdot b \cdot b) = (a \cdot b)(a \cdot b)(a \cdot b) = (a \cdot b)^3 \end{aligned}$$

maar een uitdrukking als $a^2 \cdot b^3$ kan je niet schrijven als één macht, wel bijvoorbeeld als $(a \cdot b)^2 \cdot b$:

$$a^2 \cdot b^3 = a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot b = (a \cdot b)^2 \cdot b$$

In het algemeen gelden volgende rekenregels:

Eigenschap 2.3.1 (Rekenregels machten)**.**

2.3 Machten

Voor alle $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ en $m, n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\begin{aligned} xa^r + ya^r &= (x+y)a^r && \text{(som van } \textit{gelijke} \text{ machten)} \\ a^m a^n &= a^{m+n} && \text{(product van machten met zelfde grondtal)} \\ (ab)^n &= a^n b^n && \text{(macht van product)} \\ (a^m)^n &= a^{mn} && \text{(macht van een macht)} \end{aligned}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \text{als } a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \text{als } b \neq 0$$

Dezelfde regels gelden voor *gehele* $m, n \in \mathbb{Z}$ zolang het grondtal niet nul is bij negatieve exponenten.

Voorbeeld 2.3.1. Bereken volgende machten.

1. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 2^6 = 64$

2. $\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{4} \cdot 9 = \frac{9}{4}$

2.3.2 Machten met rationale exponent

Als we ons beperken tot positieve grondtallen, kunnen we de machtsverheffing eenvoudig verder veralgemenen: we definiëren eerst $a^{\frac{1}{n}}$, dan $a^{\frac{m}{n}} = a^q$, met $q \in \mathbb{Q}$, en tenslotte vermelden we ook a^r, met $r \in \mathbb{R}$.

Definitie 2.3.2 (n-de machtswortel)**.**

Zij $a \in \mathbb{R}^+$ en $n \in \mathbb{N}_0$.

De macht $a^{\frac{1}{n}}$ met grondtal a en exponent $\frac{1}{n}$ wordt gedefinieerd als het uniek positief reëel getal b ($b \in \mathbb{R}^+$) waarvan de n-de macht gelijk is aan a. In symbolen:

$$b = a^{\frac{1}{n}} \iff b^n = a \,.$$

We noemen $a^{\frac{1}{n}}$ de n-**de machtswortel** uit a en noteren ook

$$\sqrt[n]{a} \overset{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{n}} \,.$$

Voor $n = 2$ noteren we $a^{\frac{1}{2}}$ als $\sqrt{a}$ in plaats van $\sqrt[2]{a}$.

We definiëren voor $a \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}$ ook

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \,.$$

Per definitie is $a^{\frac{m}{n}}$ dus de m-de macht van de n-de machtswortel uit a.

De definitie van $a^{\frac{1}{n}}$ is enkel zinvol als een dergelijk positief reëel getal b *bestaat* en *uniek* is. Precies om

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Machten

dat te garanderen moet de definitie voor **even** n beperkt worden tot *positieve* a en b. Inderdaad, voor negatieve a *bestaat* er immers niet altijd een geschikte b: neem bijvoorbeeld $a=-2$, dan bestaat er geen $b\in\mathbb{R}$ zodat $b^2=-2$. Als het getal b niet beperkt wordt tot de *positieve* getallen, dan is dergelijke b niet *uniek*: neem bijvoorbeeld $a=4$, dan voldoen zowel $b=2$ als $b=-2$ aan $b^2=4$.
Voor **oneven** machtswortels stelt dit probleem zich niet: $\sqrt[3]{8}=8^{\frac{1}{3}}=2$ en $\sqrt[3]{-8}=(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$. Dus als n oneven is definieert de formule $b=a^{\frac{1}{n}} \iff b^n=a$ ook n-de machtswortels van *negatieve* getallen.

Definitie 2.3.3 (Uitbreiding definitie n-de machtswortel)**.**

Zij $a\in\mathbb{R}$ en $n\in\mathbb{N}_0$ en n **oneven**.

De macht $a^{\frac{1}{n}}$ met grondtal a en exponent $\dfrac{1}{n}$ wordt gedefinieerd als het uniek reëel getal b waarvan de n-de macht gelijk is aan a. In symbolen:

$$b=a^{\frac{1}{n}} \iff b^n=a\,.$$

Ook voor machten met rationale exponenten blijven bovenstaande rekenregels gelden. Zo gelden bijvoorbeeld volgende rekenregels voor vierkantswortels, met $x\in\mathbb{R}^+, y\in\mathbb{R}_0^+$.

$$\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}, \qquad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\frac{x}{y}}, \qquad a\sqrt{x}+b\sqrt{x}=(a+b)\sqrt{x}$$

Opmerking 2.3.1.

Onmiddellijke gevolgen van de definities en rekenregels:

- $a^{-\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}=(\sqrt[n]{a})^{-1}$ voor alle $a\in\mathbb{R}_0^+$ en alle $n\in\mathbb{N}_0$
- $\sqrt[n]{a^m}=(a^m)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ voor alle $a\in\mathbb{R}_0^+$, alle $m\in\mathbb{Z}$ en alle $n\in\mathbb{N}_0$
- $\sqrt[n]{a^n}=a^{\frac{n}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a^1=a$ voor alle $a\in\mathbb{R}^+$ en alle $n\in\mathbb{N}_0$

Waarschuwing 2.3.1 (Veelgemaakte fouten)**.**

- $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$
  want bijvoorbeeld $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ en $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$
- $a^{-2}\neq a^{\frac{1}{2}}$
  want bijvoorbeeld $5^{-2}=\dfrac{1}{5^2}=\dfrac{1}{25}$ en $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$
- $\sqrt{(-3)^2}\neq -3$
  want $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$. Voor $a\in\mathbb{R}^+$ geldt wel dat $\sqrt{a^2}=a$.

Voorbeeld 2.3.2. Vereenvoudig volgende machten met rationale exponent (met $x\in\mathbb{R}_0^+$).

1. $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt{64}=8^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{8^2}=8^{\frac{1}{3}}\cdot 8=8^{\frac{1}{3}+1}=8^{\frac{4}{3}}=(\sqrt[3]{8})^4=2^4=16$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Machten

2. $\dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{x} = x^{\frac{3}{4}-1} = x^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$

3. $\left(x^3 \cdot \sqrt[4]{x}\right)^2 = x^6 \cdot \left(\sqrt[4]{x}\right)^2 = x^6 \cdot \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 = x^6 \cdot x^{\frac{2}{4}} = x^{6+\frac{1}{2}} = x^{\frac{13}{2}} = \sqrt{x^{13}}$

Oefening 2.3.2. Vereenvoudig (met $x, y \in \mathbb{R}_0^+$):

1. $\dfrac{4}{\sqrt{8}} = \ldots\ldots$

2. $y^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x^2 y}}{xy}\right)^4 = \ldots\ldots$

3. $\sqrt{48x^9y^4} = \ldots\ldots$

2.3.3 Machten reële exponent

Men kan ook a^r definiëren met $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $r \in \mathbb{R}$ (dus uitdrukkingen zoals $2^{\sqrt{3}}$, $\pi^{\sqrt{5}}$ en $\sqrt{7}^{\sqrt{\pi}}$). We geven de definitie hier niet in detail. We zullen later reële exponenten nodig hebben bij het bestuderen van zogenaamde exponentiële functies zoals $x \mapsto 2^x$.

Ook voor machten met reële exponenten blijven de gebruikelijke rekenregels gelden.

CC BY-NC-SA 4.0

2.3.A Herhalingsoefeningen breuken, haakjes, machten

Oefening 2.3.3. Vul aan. Je mag veronderstellen dat een uitdrukking die in de noemer staat steeds verschilt van 0.

1. $\frac{4x^2}{5} - 3x = 4x \cdot [\dots\dots]$

2. $(p+1)^2 + \frac{(p+1)^3}{2} + \frac{(p+1)^2}{6} = \frac{(p+1)^2}{2} \cdot [\dots\dots]$

3. $\frac{(m+n)}{2} \cdot \frac{m^2}{(m+n)^2} - \frac{m}{2} = \frac{\dots\dots}{2(m+n)}$

4. $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} = \dots\dots \cdot \sqrt{2}$

5. $\frac{4}{q} - \frac{8+q}{2q^2} = \frac{\dots\dots}{2q^2}$

6. $\frac{-8}{2x} + \frac{4}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{\dots\dots}{2x(x-1)^2}$

7. $\left(a^{-1} \cdot b^{-3} \cdot c^2\right)^3 \cdot \left(a^{-2} \cdot b^{-4} \cdot c^3\right)^{-2} = a^{\dots\dots} \cdot b^{\dots\dots} \cdot c^{\dots\dots}$

8. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}\right)^{-1} = \frac{\dots\dots}{x+y^2}$

9. $(a+b)^3 - \left(a^3 + b^3\right) = (a+b) \cdot \dots\dots$

10. $\frac{a+b}{a^2+b^2} - \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{\dots\dots}{a^4-b^4}$

11. $(t-1) \cdot (1+t+t^2) = \dots\dots$

12. $\frac{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2}}{2p-2} = \dots\dots \cdot \frac{1}{p}$

13. $\frac{1}{2 + \frac{1}{2+1}} = \dots\dots$

14. $n^{-1} + n^{-2} + n^{-3} = n^{-3} \cdot (\dots\dots) = \frac{\dots\dots}{n^3}$

15. $x + 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{\dots\dots}{x-1}$

16. $xy^2z^3 + \frac{x^2yz}{2} + \frac{xyz^2w}{3} = xyz \cdot [\dots\dots]$

17. $\frac{3}{q} + \frac{1}{2q} - \frac{2}{4q} = \frac{\dots\dots}{4q} = \frac{\dots\dots}{q}$

18. $\left(\frac{n^4}{m^3} \cdot \frac{m^{-5}}{n^3}\right)^2 = \frac{n^{\dots\dots}}{m^{\dots\dots}}$

19. $\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c} = \frac{\dots\dots}{c(b+c)}$

20. $\frac{x^2z}{2} + zyx + \frac{zy^2}{2} = \frac{x+y}{2} \cdot [\dots\dots]$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3.A Herhalingsoefeningen breuken, haakjes, machten

21. $\left(\frac{-4}{a}\right)^2 + \frac{3}{2a} = \frac{3}{a^2} \cdot [\ldots\ldots]$

22. $a^x \cdot a^{-\frac{2x}{3}} = a^{\ldots\ldots x}$

23. $(k+l+m)^2 = ((k+l)+m)^2 = k^2 + 2kl + l^2 + \ldots\ldots$

24. $\left(-(-x+y)\cdot(-1)^{-3}\right)^2 =$ $\boxed{+(y-x)^2}$ $\boxed{-(y-x)^2}$

25. $\frac{2}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot 3a - \frac{1}{a+1} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\ldots\ldots}{a(a+1)}$

26. $\dfrac{-1}{1 - \dfrac{x+1}{x}} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Verzamelingen

Om de verzameling van alle oplossingen van bijvoorbeeld een ongelijkheid te noteren, bekijken we eerst het begrip verzameling van naderbij.

Definitie 3.1.1.

– Een **verzameling** is een grondbegrip in de wiskunde. Volgens een intuïtieve definitie kan men een verzameling beschouwen als een geheel van objecten zodanig dat

- men van *elk* object ondubbelzinnig kan zeggen of het al dan niet tot dat geheel behoort, en
- men elk object ondubbelzinnig kan identificeren. Dit betekent dat men moet kunnen nagaan wanneer twee objecten aan elkaar gelijk zijn en dus in feite hetzelfde object zijn. Als men dat niet zou kunnen, zou immers zelfs het tellen van de elementen al een probleem zijn.

Dit betekent dat een verzameling *enkel* en *volledig* bepaald is door de objecten die ertoe behoren.

Meestal noteren we een verzameling met een hoofdletter, bijvoorbeeld A, B of X. Sommige verzamelingen hebben vaste namen en notaties, zoals de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ of de reële getallen $\mathbb{R}$.

– De objecten die tot een verzameling behoren, noemt men de **elementen** van die verzameling. Ze worden meestal aangeduid met kleine letters $a, b, x, y \ldots$. Als een object a tot een verzameling A behoort noteert men $a \in A$, en men zegt "a is een element van A". Als een object b niet tot A behoort, noteert men $b \notin A$. De verzameling A bestaande uit de elementen a, b en c schrijft men met accolades: $A = \{a, b, c\}$.

– Een **lege verzameling** is een verzameling *zonder elementen*. We noteren ze als $\emptyset \overset{\text{def}}{=} \{\}$.

Voorbeeld 3.1.1 (Voorbeeld)**.**

Alle natuurlijke getallen vormen een verzameling. De getallen 42 en 1302 zijn elementen van die verzameling. De even getallen, de priemgetallen en de delers van 24 vormen telkens een deelverzameling.

Voorbeeld 3.1.2 (Notatie voor concrete verzamelingen)**.**

Een verzameling kan in de praktijk op verschillende manieren genoteerd worden. We geven enkele mogelijkheden:

(a) een **opsomming**: de elementen worden opgesomd tussen accolades.

Voorbeelden:

- $A = \{1, 2, 3\}$.
- $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- $C = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$, waarbij de puntjes 'enzovoorts' betekenen.

(b) een **omschrijving**: de elementen moeten voldoen aan een voorwaarde

Voorbeeld: de vorige verzameling C van de even natuurlijke getallen, kan ook als volgt worden geschreven:

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is deelbaar door } 2\}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

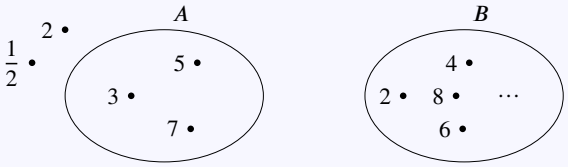
3.1 Verzamelingen

Je leest dit als
"C is de verzameling van de natuurlijke getallen x *waarvoor geldt dat* x deelbaar is door 2".

(c) een **Venndiagram**:

Een *Venndiagram* is een gesloten kromme (de 'verzameling') waarbinnen de elementen van A door stippen worden voorgesteld. Dingen die geen elementen van A zijn krijgen een stip *buiten* de kromme. We tekenen geen stippen *op* de kromme. Niet alle elementen van A moeten worden weergegeven door een stip, maar in dat geval zetten we drie puntjes in de verzameling. De naam van de verzameling wordt meestal buiten de kromme geplaatst.

Voorbeelden: $A = \{3, 5, 7\}$ en $B = \{2, 4, 6, 8, ...\}$



Opmerking 3.1.1.

Sommige veel voorkomende verzamelingen krijgen een speciale notatie:

(a) De getallenverzamelingen hebben een standaardnotatie:

- $\mathbb{N}$ is de verzameling van natuurlijke getallen.
- $\mathbb{Z}$ is de verzameling van gehele getallen.
- $\mathbb{Q}$ is de verzameling van rationale getallen (breuken).
- $\mathbb{R}$ is de verzameling van reële getallen.
- $\mathbb{C}$ is de verzameling van complexe getallen.

(b) De verzameling van de natuurlijke getallen zonder 0:

$$\mathbb{N}_0 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

Op dezelfde manier worden $\mathbb{Z}_0, \mathbb{Q}_0$ en $\mathbb{R}_0$ gedefinieerd.

(c) De verzameling van de (strikt) positieve reële getallen:

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | \ x \geqslant 0\} \quad \text{en} \quad \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} | \ x > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^+ | \ x \neq 0\}.$$

Op dezelfde manier worden $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}^+$ gedefinieerd.

Pas op: Engelstalige handboeken en websites hebben dikwijls een *omgekeerde afspraak*: $\mathbb{N}$ zijn dan de natuurlijke getallen *zonder nul*, en $\mathbb{N}_0$ zijn de natuurlijke getallen *inclusief nul*.

Andere belangrijke voorbeelden van verzamelingen zijn de intervallen:

Definitie 3.1.2 (Intervallen)**.** Voor reële getallen a en b, met $a < b$, definiëren we

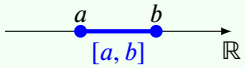
het	**gesloten interval**	$[a, b]$: de getallen tussen a en b met a en b inbegrepen.
het	**open interval**	$]a, b[$: de getallen tussen a en b, met a en b *niet* inbegrepen.
het	**half-open interval**	$[a, b[$: de getallen tussen a en b, met a inbegrepen en b *niet*.
het	**half-open interval**	$]a, b]$: de getallen tussen a en b, met a *niet* inbegrepen en b wel.

CC BY-NC-SA 4.0

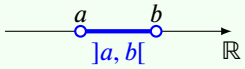
3.1 Verzamelingen

In formules wordt dat:

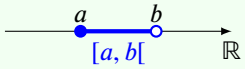
$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{het gesloten interval } [a,b]$$



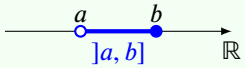
$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad \text{het open interval }]a,b[$$



$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad \text{het half-open interval } [a,b[$$

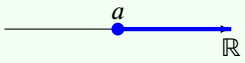


$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad \text{het half-open interval }]a,b]$$

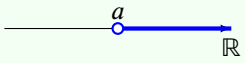


We breiden de notatie ook uit voor halfrechten of 'oneindige intervallen':

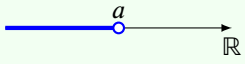
$$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$



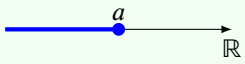
$$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$



$$]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$



$$]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$



$$]-\infty,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$



Merk op dat $+\infty$ en $-\infty$ zelf nooit tot het interval behoren, want $+\infty$ en $-\infty$ zijn geen reële getallen.

CC BY-NC-SA 4.0

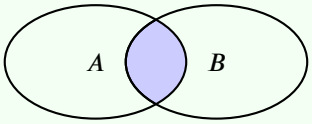
3.2 Bewerkingen met verzamelingen

We kunnen in zekere zin 'rekenen' met verzamelingen. Dit betekent allerlei bewerkingen uitvoeren met verzamelingen.

Met twee verzamelingen A en B kan je op een aantal manieren nieuwe verzamelingen bouwen:

Definitie 3.2.1.

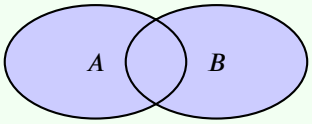
- $A \cap B$, de **doorsnede** van A en B, is de verzameling van elementen die behoren tot A **en** B:



$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$

We noemen twee verzamelingen A en B **disjunct** als $A \cap B = \emptyset$.

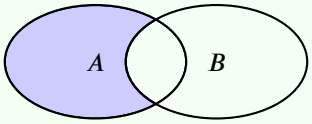
- $A \cup B$, de **unie** of **vereniging** van A en B, is de verzameling van de elementen die behoren tot A **of** B:



$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}$

Als $C = A \cup B$ waarbij $A \cap B = \emptyset$, dan noemt men C de **disjuncte unie** van A en B.

- $A \setminus B$, het **verschil** van A en B, is de verzameling van elementen die behoren tot A maar niet tot B:



$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\}$

Merk op dat in het algemeen $A \setminus B \neq B \setminus A$ en

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\} = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

Oefening 3.2.1. Bepaal volgende verzamelingen.

(a) $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$

(b) $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$

(c) $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$

(d) $\{2,3,4\} \setminus \{1,2,3\} = \{4\}$

(e) $\{1,2,3,4\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3,4\}$

(f) $\{1,2,3,4\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$

(g) $\{1,2,3,4\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$

(h) $\{2,3,4\} \setminus \{1,2,3,4\} = \emptyset$

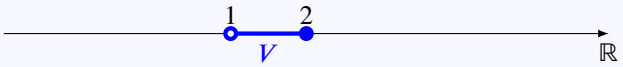
Met $\cap$ en $\cup$ kunnen we ook de unie en doorsnede van intervallen aanduiden:

$$\begin{aligned} [a,b] \cup [c,d] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [a,b] \text{ of } x \in [c,d]\}, \\ [a,b] \cap [c,d] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [a,b] \text{ en } x \in [c,d]\}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 3.2.1 (basisvoorbeelden intervallen)**.**

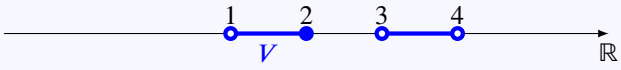
Schrijf volgende verzamelingen telkens als een (unie of doorsnede van) interval(len):

1.

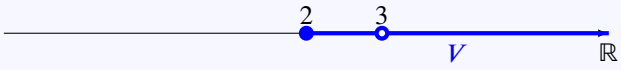


$V =]1,2]$

3.2 Bewerkingen met verzamelingen

2. 

$V =]1,2] \cup]3,4[$

3. 

$V = [2,3[\cup]3,+\infty[$

Voorbeeld 3.2.2 (Unie en doorsnede van intervallen)**.**

(a) $[2,4[\cap]3,5[=]3,4[$

(b) $[2,4[\cup]3,5[= [2,5[$

(c) $[2,4[\setminus]3,5[= [2,3]$

(d) $]3,5[\setminus [2,4[= [4,5[$

(e) $[2,4[\cap [5,6] = \emptyset$

(f) $[2,4[\cup [5,6]$ is geen interval. Zo zit bijvoorbeeld 4.5 niet in deze verzameling.

4.1 Absolute waarde

Definitie 4.1.1 (Absolute waarde)**.**

Voor een reëel getal $a \in \mathbb{R}$ definiëren we de *absolute waarde* van a, genoteerd $|a|$, als

$$|a| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} a & \text{als} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{als} \quad a < 0. \end{cases}$$

Als a positief is, dan is $|a|$ gewoon a, maar als a negatief is, dan is $|a|$ het overeenkomende *positieve* getal $-a$. Dus, $|a|$ is altijd positief.

Voorbeeld 4.1.1 (Eenvoudige voorbeelden van absolute waarden)**.**

(a) $|5| = 5$ en $|-5| = 5$

(b) $|2 + (-1)| \neq |2| + |-1|$ (want $1 \neq 3$)

(c) $|(-3)^2| = |3^2| = 9 \quad (= |-3^2| = |-9|)$

(d) $|a^2 + 1| = a^2 + 1$, met $a \in \mathbb{R}$

(e) $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$

(f) $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$

(g) $|2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$

(h) $|\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$

Oefening 4.1.1. Bereken (zonder rekenmachine) volgende absolute waarden.

1. $|2 - 9| = \ldots\ldots$

2. $|-2 - (-6)| = \ldots\ldots$

3. $\left|\frac{11}{10} - \frac{51}{10}\right| = \ldots\ldots$

4. $|\pi - 3\pi| = \ldots\ldots$

Volgende eigenschappen volgen eenvoudig uit de definitie:

Eigenschap 4.1.1. Als $x, y, z \in \mathbb{R}$, dan is

(a) $|x| \geq 0$

(b) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

(c) $|-x| = |x|$

(d) $|x|^2 = x^2 = |x^2|$ $\qquad (= |-x^2| = |(-x)^2|)$

(e) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ (absolute waarde van product is product van absolute waarden)

(f) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ met $y \neq 0$ (absolute waarde van quotiënt is quotiënt van absolute waarden)

Waarschuwing 4.1.1 (Veelgemaakte fouten)**.**

(a) $|-a| = |a|$, maar zeer zeker niet ~~$|-a| = a$~~
$|-a| = a$ is fout als $a < 0$: als $a = -7$, dan is $|-a| = |-(-7)| \neq -7 = a$

(b) De absolute waarde van een som is niet steeds de som van de absolute waardes:

~~$|x + y| = |x| + |y|$~~

$$|2 + 3| = |2| + |3| = 2 + 3 = 5$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Absolute waarde

maar

$$|2+(-3)| = |-1| = 1 \quad \text{terwijl} \quad |2|+|-3| = 2+3 = 5$$

(c) De wortel van het kwadraat van een reëel getal is niet steeds gelijk aan dat reëel getal.

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{maar} \quad \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$$

Algemeen geldt

- voor $a \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt{a^2} = a$
- voor $a \in \mathbb{R}^-$: $\sqrt{a^2} = -a$

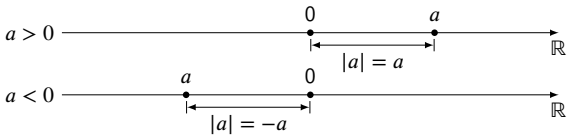
Dit kunnen we samenvatten als $\sqrt{a^2} = |a|$ voor elke reële a.

Oefening 4.1.2. Schrijf met een absolute waarde

1. $\sqrt{(x-4)^2} = \ldots\ldots$

2. $\sqrt{(-2x)^2} = \ldots\ldots$

Bij de voorstelling van a op de reële rechte $\mathbb{R}$ is $|a|$ gelijk aan de afstand van het punt a tot de oorsprong:

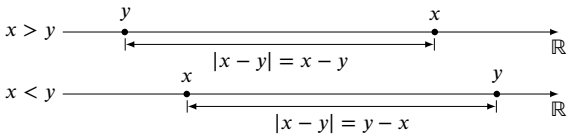


Deze eenvoudige opmerking leidt onmiddellijk tot volgend belangrijk inzicht:

Eigenschap 4.1.2. Zij $x, y \in \mathbb{R}$. Dan geldt (op de reële rechte $\mathbb{R}$)

$|x-y|$ is de afstand tussen x en y.

In het bijzonder is $|x|$ de afstand van x tot de oorsprong.



Opmerking 4.1.1.

Uit $|x+y| = |x-(-y)|$ volgt dat $|x+y|$ gelijk is aan de afstand tussen x en $-y$.

Oefening 4.1.3.

1. De afstand van x tot 7 is $|x-7|$

2. De afstand van x tot -3 is $|x+3|$

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Ongelijkheden in 1 onbekende

Een belangrijke eigenschap van reële getallen is dat we ze kunnen ordenen: voor twee getallen $x, y \in \mathbb{R}$ geldt altijd $x \leq y$ of $y \leq x$. We kunnen dus niet alleen vergelijkingen bestuderen en oplossen, maar ook zogenaamde on*gelijk*heden. Daarbij zoeken we niet naar de waarden van een onbekende die een *gelijkheid* oplost, maar naar de waarden van een onbekende die een *ongelijkheid* oplost.

Er zijn 4 mogelijke ongelijkheidstekens: $<, \leq, >$ en $\geq$.

Definitie 4.2.1.

- Een **ongelijkheid** is een uitdrukking die precies één ongelijkheidsteken ($<, \leq, >$ of $\geq$) bevat.
- Een **ongelijkheid in één onbekende** is een ongelijkheid waarin één onbekende voorkomt.
- Een **oplossing** van een ongelijkheid in een onbekende is een waarde van de onbekende waarvoor de ongelijkheid waar is. De **oplossingsverzameling** van een ongelijkheid in een onbekende is de verzameling van *alle* oplossingen.
- We noemen twee ongelijkheden in een onbekende **equivalent** als ze dezelfde oplossingsverzameling hebben.

Voorbeeld 4.2.1 (Voorbeelden van ongelijkheden in onbekende x)**.**

- $x^2 > 2x - 1$
- $\sin(x) \geq 0.5$

Opmerking 4.2.1.

- Ongelijkheden kunnen aan elkaar worden gekoppeld:

$$a < b < c \iff a < b \text{ en } b < c.$$

  Merk op dat uit beide uitdrukkingen telkens ook volgt dat $a < c$.
- Uitdrukkingen van de vorm $a < b > c$ worden *nooit* gebruikt: je schrijft bv. $a < b$ en $c < b$, of korter $a, c < b$

Bij het oplossen van een ongelijkheid mag men enkel bewerkingen uitvoeren die de ongelijkheid vervangt door een equivalente ongelijkheid. Ongelijkheden oplossen is in het algemeen *moeilijker* dan het oplossen van vergelijkingen, onder meer omwille van de extra complicatie dat twee leden van een ongelijkheid vermenigvuldigen met een *negatief* getal de ongelijkheid *omdraait*. Een ongelijkheid vervangen door een (eenvoudigere) equivalente ongelijkheid kan met volgende eigenschappen van ongelijkheden.

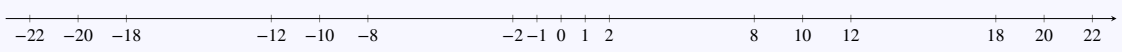
Eigenschap 4.2.1. Voor elke $a, b, r \in \mathbb{R}$ geldt

	$a < b$	$\iff$	$a + r < b + r$		(plus getal)
Geval $0 < r$:	$a < b$	$\iff$	$r \cdot a < r \cdot b$		(maal positief getal)
Geval $r < 0$:	$a < b$	$\iff$	$r \cdot a > r \cdot b$	(of $r \cdot b < r \cdot a$)	(maal negatief getal)

Voorbeeld 4.2.2. We hebben $10 < 20$, en dus ook $10 + 2 < 20 + 2$, $10 - 2 < 20 - 2$ en $2 \cdot 10 < 2 \cdot 20$, maar $(-2) \cdot 10 > (-2) \cdot 20$. Ook is $1 < 2$, maar $-1 > -2$. Deze ongelijkheden zie je ook op de getallenrechte:

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Ongelijkheden in 1 onbekende



Opmerking 4.2.2.

- De eerste eigenschap zegt dat je bij beide leden van een ongelijkheid eenzelfde getal mag optellen
$$a < b \Rightarrow\ a + r < b + r$$
of aftrekken
$$a + r < b + r \Rightarrow\ a < b.$$
Als we bij de ongelijkheid $x < y$ van beide leden y aftrekken krijgen we $x - y < 0$, wat neerkomt op de term y naar het andere lid brengen.
$$x < y \iff\ x - y < 0$$

- De tweede eigenschap zegt dat je beide leden van een ongelijkheid mag vermenigvuldigen
$$a < b \Rightarrow\ r \cdot a < r \cdot b$$
of delen
$$r \cdot a < r \cdot b \Rightarrow\ a < b$$
met eenzelfde strikt positief getal r. De ongelijkheid blijft hierbij behouden.
Als we bij de ongelijkheid $x < y$, met $y > 0$, beide leden delen door y krijgen we $\frac{x}{y} < 1$, wat neerkomt op de factor y naar het andere lid brengen.
$$x < y \iff\ \frac{x}{y} < 1 \text{ indien } y > 0$$

- De derde eigenschap zegt dat je beide leden van een ongelijkheid mag vermenigvuldigen
$$a < b \Rightarrow\ r \cdot a > r \cdot b$$
of delen
$$r \cdot a > r \cdot b \Rightarrow\ a < b$$
met eenzelfde strikt negatief getal r. De ongelijkheid draait hierbij om.

Met deze eigenschappen van ongelijkheden kunnen we de oplossingsverzameling zoeken van ongelijkheden, namelijk de verzameling van alle getallen die voldoen aan de ongelijkheid. We noteren deze oplossingsverzameling met V.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Absolute waarde en ongelijkheden

Eigenschap 4.3.1 (Basiseigenschap absolute waarde)**.** Als $x, a \in \mathbb{R}$ en $r \in \mathbb{R}_0^+$, dan is

$$|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$$

Opmerking 4.3.1.

- Met deze eigenschappen kan je dus één ongelijkheid *met* een absolute waarde omzetten in een *dubbele* ongelijkheid *zonder* absolute waarde.
- Deze eigenschappen kunnen ook met $\leq$ geformuleerd worden, bijvoorbeeld

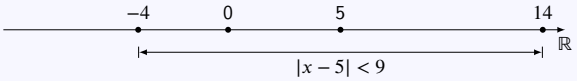
$$|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r \Leftrightarrow x \in [-r, r]$$

Oefening 4.3.1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\left|\frac{2x}{3}\right| < 1$. Oplossingsverzameling: ... ...

Voorbeeld 4.3.1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|x - 5| < 9$.

$$\begin{array}{rcll} |x-5| & < & 9 & \text{(de afstand tussen } x \text{ en } 5 \text{ is kleiner dan } 9) \\ & \Updownarrow & & (|x-a| < r \iff -r < x-a < r) \\ -9 < & x-5 & < 9 & (x-5 \text{ ligt tussen } -9 \text{ en } 9) \\ & \Updownarrow & & (+5 \text{ optellen}) \\ -4 < & x & < 14 & (x \text{ ligt tussen } -4 \text{ en } 14) \end{array}$$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-4, 14[$.



Oefening 4.3.2.

1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|2x - 5| < 9$. Oplossingsverzameling: ... ...
2. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|3 - 2x| < 1$. Oplossingsverzameling: ... ...
3. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|x^2 - 3| < 9$. Oplossingsverzameling: ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Complexe getallen

Veeltermvergelijkingen hebben niet altijd reële oplossingen. Zo hebben vierkantsvergelijkingen met een negatieve discriminant geen reële wortels. Een erg eenvoudig voorbeeld is de vergelijking $x^2 + 1 = 0$ of, anders geschreven, $x^2 = -1$. Deze vergelijking heeft geen reële wortels, omdat het kwadraat van een reëel getal nooit negatief kan zijn, en dus nooit gelijk aan -1.

De zogenaamde *complexe getallen* vormen een uitbreiding van de reële getallen. Aan de reële getallen wordt een nieuw 'getal' toegevoegd dat traditioneel i genoemd wordt, en i is *per definitie* een oplossing van de vergelijking $x^2 + 1 = 0$. Er geldt dus per definitie dat $i^2 = -1$.

Definitie 5.1.1.

We noemen de uitdrukking $x + iy$, met $x, y \in \mathbb{R}$ en $i^2 = -1$ een **complex getal**. Het symbool i noemen we de **imaginaire eenheid**. De verzameling van alle complexe getallen noemen we $\mathbb{C}$.

We noteren een willekeurig complex getal dikwijls met z. Stel $z = x + iy$.

- We noemen x het **reële deel** van z en noteren $\mathrm{Re}(z) \overset{\text{def}}{=} x$.
- We noemen y het **imaginaire deel** van z en noteren $\mathrm{Im}(z) \overset{\text{def}}{=} y$.
- Als $y = 0$ noemen we $z = x$ een **(zuiver) reëel getal** ($\mathbb{R}$ is dus een deelverzameling van $\mathbb{C}$).
- Als $x = 0$ noemen we $z = iy$ een **(zuiver) imaginair getal**.

Voorbeeld 5.1.1. Volgende uitdrukkingen zijn allemaal complexe getallen:

(a) $2 + 3i$ (c) $42i$ (e) $1 + i\sqrt{2}$

(b) 42 (d) $1 + \pi$ (f) $\dfrac{1 - i\sqrt{5}}{2}$

De getallen 42 en $1 + \pi$ zijn zuiver reële getallen, en $42i$ is een zuiver imaginair getal.

Oefening 5.1.1.

1. $\mathrm{Re}(3 - 4i) = \ldots\ldots$

2. $\mathrm{Im}(3 - 4i) = \ldots\ldots$

Opmerking 5.1.1.

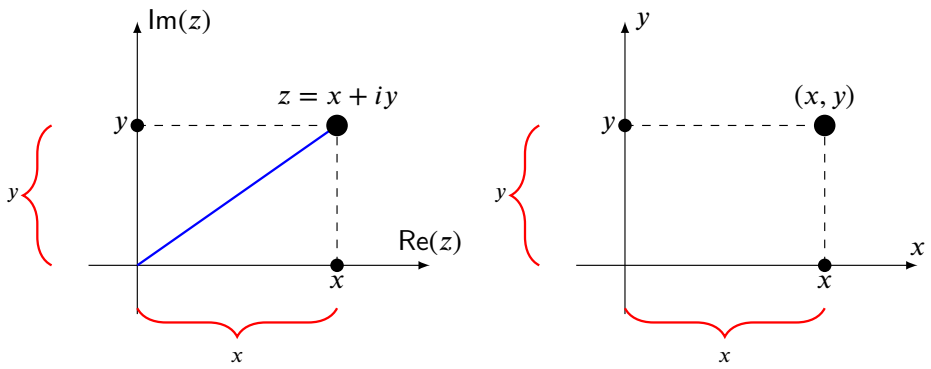
- We noemen $z = x + iy$ de **Cartesiaanse voorstelling** van een complex getal z. We zien verderop nog de goniometrische en exponentiële voorstelling van een complex getal z.
- Twee complexe getallen $x_1 + iy_1$ en $x_2 + iy_2$ zijn enkel aan elkaar gelijk als $x_1 = x_2$ en $y_1 = y_2$.
- Ook geldt dat $x + iy = x + yi$.

5.1.1 Het complexe vlak

We kunnen met elk complex getal $z = x + iy$ een uniek koppel (x, y) associëren. Op die manier kan een complex getal z ook voorgesteld worden als een punt in het vlak:

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Complexe getallen



Als we het vlak op deze manier bekijken als de verzameling van de complexe getallen, spreken we van het **complexe vlak**. In het complexe vlak noemen we de x-as ook de *reële* as en de y-as de *imaginaire* as. Het getal i komt daarbij overeen met het koppel $(0, 1)$, dus een punt op de imaginaire as.

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/Ho_oadFkm1o

Oefening 5.1.2. Schets in het complexe vlak de gebieden omschreven door volgende vergelijkingen:

1. $\text{Im}(z) \leq 0$
2. $0 \leq \text{Re}(z) \leq 4$

5.1.2 Rekenen met complexe getallen $z = x + iy$

Voor complexe getallen kan, met de gebruikelijke rekenregels, de optelling en vermenigvuldiging gedefinieerd worden, waarbij steeds i^2 vervangen wordt door -1.

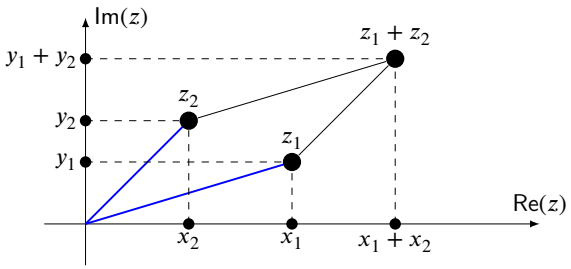
Definitie 5.1.2 (Som en product)**.**

Als $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, en $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ geldt:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \overset{\text{def}}{=} (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \overset{\text{def}}{=} x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + y_1y_2 \underbrace{i^2}_{i^2=-1} = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Meetkundig is de optelling van complexe getallen hetzelfde als de optelling van vectoren in het vlak: het komt neer op de parallellogramregel:



Opmerking 5.1.2.

5.1 Complexe getallen

- Een complex getal kan per definitie op een unieke manier geschreven worden als $x + iy$, met $x, y \in \mathbb{R}$. Dus $1, i, 1+i, 1+3i$ zijn allemaal complexe getallen die we niet eenvoudiger kunnen schrijven. Maar $2i+3+i, i(1+i)$ en $(1+i)(1-i)$ zijn complexe getallen die we wel eenvoudiger kunnen schrijven als $2i+3+i = 3+3i$, $\quad i(1+i) = i+i^2 = -1+i$, $\quad (1+i)(1-i) = 1-i^2 = 1+1 = 2$.
- Je kan van twee complexe getallen niet zeggen welk het kleinste is, je kan dus niet schrijven dat $z_1 < z_2$.

Oefening 5.1.3. som en product:

1. $(1+2i)+(3+4i) = \ldots\ldots$

2. $(1+2i)\cdot(3+4i) = \ldots\ldots$

3. $(1+2i)\cdot(1-2i) = \ldots\ldots$

4. $(1+2i)\cdot\dfrac{1-2i}{2} = \ldots\ldots$

5. $(1+2i)\cdot i = \ldots\ldots$

6. $i^3 = \ldots\ldots$

7. $i^4 = \ldots\ldots$

Oefening 5.1.4. Maak nu ook oefening 3.43(g) uit de cursus: je weet wat het reële deel is van een complex getal en je kan 2 complexe getallen optellen.

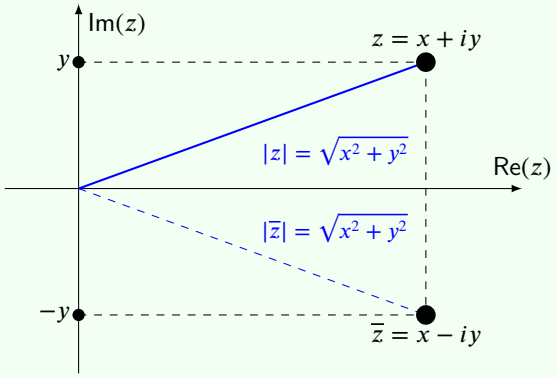
5.1.3 Complex toegevoegde

Definitie 5.1.3 (Complex toegevoegde)**.**

De **complex toegevoegde** van een complex getal $z = x + iy$, genoteerd als $\overline{z}$, is

$$\overline{z} = \overline{x+iy} \overset{\text{def}}{=} x - iy.$$

We noemen z en $\overline{z}$ **complex toegevoegd** (aan elkaar), en beide zijn elkaars spiegeling over de x-as.



Voorbeeld 5.1.2. $\overline{3-4i} = 3+4i$

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Complexe getallen

Oefening 5.1.5. Bereken voor een complex getal $z = x + iy \in \mathbb{C}$ volgende uitdrukkingen:

1. $z + \overline{z} = \ldots\ldots$
2. $z - \overline{z} = \ldots\ldots$
3. $z \cdot \overline{z} = \ldots\ldots$

Dat $z\overline{z} = x^2 + y^2$ een reëel getal is kunnen we gebruiken om het quotiënt van twee complexe getallen te berekenen. We nemen als voorbeeld

$$\frac{3+2i}{1-5i}.$$

De deling van deze twee complexe getallen is opnieuw een complex getal. De deling uitvoeren wil zeggen $\frac{3+2i}{1-5i}$ schrijven in de vorm $x+iy$. Als we teller en noemer vermenigvuldigen met het complex toegevoegde van de noemer verdwijnt de i in de noemer en krijgen we een complex getal van de vorm $x + iy$:

$$\frac{3+2i}{1-5i} = \frac{(3+2i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)} = \frac{3+15i+2i+10i^2}{1+5i-5i-25i^2} = \frac{-7+17i}{26} = -\frac{7}{26} + \frac{17}{26}i$$

Oefening 5.1.6. Schrijf volgende uitdrukkingen als een complex getal van de vorm $x + iy$:

1. $\dfrac{1}{1+2i} = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{1+2i}{3+4i} = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{3+4i}{1+2i} = \ldots\ldots$

Oefening 5.1.7 (Zie ook oefening 1.7 uit de cursus)**.** Stel $z_1 = 2 + 3i$ en $z_2 = -2 + i$.

1. $\overline{z_1} = \ldots\ldots$
2. $\overline{z_2} = \ldots\ldots$
3. $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \ldots\ldots$
4. $z_1 + z_2 = \ldots\ldots$
5. $\overline{z_1 + z_2} = \ldots\ldots$
6. $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \ldots\ldots$
7. $z_1 \cdot z_2 = \ldots\ldots$
8. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \ldots\ldots$
9. $\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \ldots\ldots$
10. $\dfrac{z_1}{z_2} = \ldots\ldots$
11. $\dfrac{\overline{z_1}}{z_2} = \ldots\ldots$

Wat we opmerken in vorige oefening kunnen we veralgemenen tot volgende eigenschap:

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Complexe getallen

Eigenschap 5.1.1 (Eigenschappen van complex toevoegen)**.**

Voor complexe getallen z_1 en z_2 geldt dat

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{en} \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad \text{en} \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Het sommatieteken $\sum$

Een algemene definitie van de sommatie, enigszins abstract geformuleerd, gaat als volgt:

Definitie 6.1.1 (Het sommatieteken)**.**

Voor $n \in \mathbb{N}$ en $a_1, a_2, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ reële getallen definiëren we :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \overset{\text{notatie}}{=} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Deze notatie wordt veralgemeend voor $m, n \in \mathbb{Z}$ met $m \leqslant n$ en $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{n-1}, a_n$ reële getallen:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \overset{\text{notatie}}{=} a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

We lezen $\sum_{k=m}^{n} a_k$ als de som van (de) a_k voor k gaande van m tot en met n.

Men noemt a_k de **algemene term** en k de **sommatie-index**.
Men noemt m de **ondergrens** en n de **bovengrens** van de sommatie.

Men noteert $\sum_{k=m}^{n} a_k$ soms ook als $\sum_{k=m}^{n} a_k$.

Eigenschap 6.1.1 (Eigenschappen sommatie)**.**

(a) $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$ (sommatie over één getal)

(b) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i$ (veranderen van indexnaam)

(c) $\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (veranderen van grenzen)

Voorbeeld 6.1.1.

$$\sum_{i=1}^{10} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + 100$$

$$\sum_{i=0}^{9} (i+1)^2 = (0+1)^2 + (1+1)^2 + (2+1)^2 + \cdots + (9+1)^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + 100 = \sum_{i=1}^{10} i^2$$

$$\sum_{i=-2}^{3} i^3 = (-2)^3 + (-1)^3 + 0 + 1^3 + 2^3 + 3^3 = 27$$

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Het sommatieteken $\sum$

Opmerking 6.1.1.

- Het is steeds van belang niet alleen de algemene term te bekijken, maar ook de begin- en eindgrenzen. Als je nog niet zo vertrouwd bent met het sommatieteken, is het aangewezen om de eerste twee of drie termen en de laatste term expliciet op te schrijven.
- De sommatie-index mag geen andere betekenis hebben in de context.

  Als $k \in \mathbb{R}$, dan is
  $$\sum_{i=1}^{4} k^i = \sum_{j=1}^{4} k^j = k + k^2 + k^3 + k^4$$
  maar
  $$\sum_{k=1}^{4} k^k = 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 \neq \sum_{i=1}^{4} k^i.$$
  Je mag voor $k + k^2 + k^3 + k^4$ *niet* de letter k kiezen als sommatie-index.

Voorbeeld 6.1.2.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{99} i &= 1 + 2 + \cdots + 99 = \sum_{k=1}^{99} k && \text{(hernoem de index)}\\
\sum_{i=1}^{99} 2i &= 2 + 4 + \cdots + 198 \\
&= 2(1 + 2 + \cdots + 99) \\
&= 2 \cdot \sum_{i=1}^{99} i && \text{(factor buitenbrengen)}\\
\sum_{i=1}^{99} 1 &= 1 + 1 + \cdots + 1 = 99 && \text{(constante)}\\
\sum_{j=1}^{4} (a + x_j) &= (a + x_1) + (a + x_2) + (a + x_3) + (a + x_4) \\
&= 4a + \sum_{i=1}^{4} x_i && \text{(herschrijf de sommand)}\\
\sum_{i=1}^{3} i^2 &= 1 + 2^2 + 3^2 = \sum_{i=0}^{2} (i+1)^2 && \text{(herindexeer)}
\end{aligned}$$

Oefening 6.1.1. Bereken volgende sommen:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k^3 = \ldots\ldots$
2. $\displaystyle\sum_{k=-3}^{3} k^3 = \ldots\ldots$

Oefening 6.1.2. Schrijf volgende sommatie voluit.

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Het sommatieteken $\sum$

1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{4} 2ju_{2j}^2 = \dots\dots$

Om een gegeven som te schrijven met behulp van het sommatieteken $\sum$ moeten we op zoek gaan naar de gemeenschappelijke vorm van de termen. Dat moet leiden tot een formule voor een algemene term, zeg a_k, die bijna altijd afhangt van een zelfgekozen sommatie-index (hier dus k). Vervolgens zoeken we de onder- en bovengrenzen, dit zijn respectievelijk de eerste en de laatste waarde die k moet aannemen opdat a_k precies alle termen van de som doorloopt.

Voorbeeld 6.1.3. Schrijf met een sommatieteken:

1. $\displaystyle\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49} = \sum_{i=4}^{7}\frac{1}{i^2}$

2. $\displaystyle a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4 = \sum_{i=1}^{4} a_ib_i$

3. $\displaystyle\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}x^3+x^4+\frac{\sqrt{5}}{2}x^5+\frac{\sqrt{6}}{2}x^6+\frac{\sqrt{7}}{2}x^7+\sqrt{2}x^8+\frac{3}{2}x^9+\frac{\sqrt{10}}{2}x^{10}+\frac{\sqrt{11}}{2}x^{11}+\sqrt{3}x^{12}.$

Uitwerking: De algemene term is hier $a_k = \dfrac{\sqrt{k}}{2}x^k$.

De ondergrens is dan 1 en de bovengrens 12.

Bovenstaande som kunnen we dus korter opschrijven als

$$\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{k}}{2}x^k.$$

Als de termen van de gegeven som afwisselend positief en negatief zijn, kan je in de algemene term vermenigvuldigen met de factor $(-1)^k$ of $(-1)^{k+1}$. Voor oneven k is $(-1)^k = -1$, dus deze factor in de algemene term vermenigvuldigt alle termen met oneven sommatie-index met -1. Voor even k is $(-1)^{k+1} = -1$, dus deze factor in de algemene term vermenigvuldigt alle termen met even sommatie-index met -1.

Voorbeeld 6.1.4.

1. $1-2+3-4+5-6+7-8+\cdots+129-130.$

Uitwerking: We nemen als ondergrens $k = 1$ en als bovengrens $k = 130$. De termen met een even sommatie-index k zijn negatief (de term voor $k = 2$ is -2, de term voor $k = 4$ is -4, ...). Vermits $(-1)^{k+1}$ gelijk is aan 1 voor oneven k en gelijk aan -1 voor even k, is de algemene term hier $a_k = (-1)^{k+1}k$.

Bovenstaande som kunnen we dus korter opschrijven als

$$\sum_{k=1}^{130}(-1)^{k+1}k.$$

2. $-1+2-3+4-5+6-7+8+\cdots-129+130.$

Uitwerking: We nemen als ondergrens $k = 1$ en als bovengrens $k = 130$. De termen met een oneven sommatie-index k zijn negatief (de term voor $k = 1$ is -1, de term voor $k = 3$ is -3, ...). Vermits $(-1)^k$ gelijk is aan -1 voor oneven k en gelijk aan 1 voor even k, is de algemene term hier $a_k = (-1)^k k$.

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Het sommatieteken $\sum$

Bovenstaande som kunnen we dus korter opschrijven als

$$\sum_{k=1}^{130}(-1)^k k.$$

We bekijken verder de rekenregel van het afzonderen van de eerste of de laatste term. We beginnen met een voorbeeld:

Voorbeeld 6.1.5.

Beschouw de som

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2 + 4 + 8 = 14. \tag{1}$$

Zonderen we hierin de eerste term af, dan bekomen we

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2 + \sum_{k=2}^{3} 2^k,$$

de laatste term afzonderen geeft

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = \sum_{k=1}^{2} 2^k + 8.$$

Oefening 6.1.3 (Vul aan).

1. $\displaystyle\sum_{i=3}^{5} \left(2i^2+3\right) = \sum_{i=3}^{4} \left(2i^2+3\right) + \ldots\ldots$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 + \ldots\ldots$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k^2 = \sum_{k=1}^{2} k^2 + \ldots\ldots$
4. $\displaystyle\sum_{m=2}^{5} 4m = \ldots\ldots + \sum_{m=3}^{5} 4m$

CC BY-NC-SA 4.0

6.2 De faculteit $n!$

Definitie 6.2.1 (Faculteit). De **faculteit** van een natuurlijk getal $n!$ (lees: n-faculteit) is

$$n! \overset{\text{def}}{=} n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \quad \text{als } n \in \mathbb{N}_0$$

$$0! \overset{\text{def}}{=} 1.$$

We kunnen natuurlijk de volgorde van de factoren omkeren, en ook schrijven:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-2)\cdot (n-1)\cdot n$$

Voorbeeld 6.2.1.

1. $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$
2. $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5\cdot 4! = 120$
3. $\dfrac{100!}{98!} = 9900$

Uitwerking: $\dfrac{100!}{98!} = \dfrac{100\cdot 99\cdot \cancel{98}\cdot \cancel{97}\cdot \ldots \cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{98}\cdot \cancel{97}\cdot \ldots \cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}$

4. $50\cdot 49\cdot 48\cdot 47 = \dfrac{50!}{46!}$

De voorbeelden illustreren volgende rekenregels voor de faculteitsoperatie:

Eigenschap 6.2.1.

$$n! = n(n-1)! \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

$$(n+1)! = (n+1)n! \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{n!}{p!} = \frac{n(n-1)\ldots(p+1)\cancel{p}\cdot\cancel{(p-1)}\ldots\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{p}\cdot\cancel{(p-1)}\ldots\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}} = n(n-1)\ldots(p+1) \qquad p < n$$

Merk op dat de eerste twee regels precies hetzelfde zeggen namelijk dat de faculteit van een natuurlijk getal gelijk is aan het product van dat getal met de faculteit van het vorige natuurlijke getal.

Opmerking 6.2.1. Je kan geen factor buiten haakjes brengen:

$6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ en $6! = (2\cdot 3)!$,

maar $6! \neq 2\cdot 3! = 2\cdot (3\cdot 2\cdot 1)$

Oefening 6.2.1. Bereken:

1. $\dfrac{10!}{7!} = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{1984!}{1983!} = \ldots\ldots$

Oefening 6.2.2. Vereenvoudig. $(k, n \in \mathbb{N}$ en $k + n \geqslant 2)$

CC BY-NC-SA 4.0

6.2 De faculteit $n!$

1. $\dfrac{(k+1)!}{k!} = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{(k+3)!}{k!} = \ldots\ldots$

Oefening 6.2.3. Vul aan.

1. $(k+1)! + k! = (\ldots\ldots)k!$
2. $\dfrac{1}{(k-1)! \cdot (n+1)!} + \dfrac{1}{k! \cdot n!} = \dfrac{\ldots\ldots}{k! \cdot (n+1)!}$

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Binomiaalgetallen

We definiëren een handige notatie voor getallen die in allerlei contexten opduiken:

Definitie 6.3.1 (Binomiaalgetallen)**.**

Het **binomiaalgetal** n **over** p, genoteerd $\binom{n}{p}$, van twee natuurlijke getallen n en p met $p \leq n$ is

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Opmerking 6.3.1.

(a) Men leest $\binom{n}{p}$ als 'n over p' of als 'n kies p'.
Maar, let hiermee op want ook de breuk $\frac{n}{p}$ wordt soms gelezen als n over p.

(b) Deze getallen komen voor in het Binomium van Newton, en dat verklaart de naam *binomi-aal*getallen.

(c) Deze getallen komen ook voor bij de studie van telproblemen: $\binom{n}{p}$ is precies gelijk aan het aantal *deelverzamelingen* van p elementen uit een verzameling van n elementen. Dat aantal wordt ook genoteerd als C_n^p. Er geldt dus dat (let op de omwisseling van de sub- en superscripts!):

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Voorbeeld 6.3.1 (Basisvoorbeeld)**.**

(a) $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1)(2 \cdot 1)} = 10 \quad (= C_5^3)$

(b) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \binom{5}{3} = 10$ (zie hierboven)

(c) $\binom{2}{2} = \frac{2!}{2!0!} = 1 \quad (= C_2^2)$ (want $0! = 1$)

(d) $\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!4!} = 1 \quad (= C_4^0)$

(e) $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4 \cdot 3!}{3!} = 4 \quad (= C_4^1)$ (want $4! = 4 \cdot 3!$).

Volgende rekenregels kunnen worden afgeleid uit de definitie:

Eigenschap 6.3.1 (Rekenregels binomiaalgetallen)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Binomiaalgetallen

Voor natuurlijke getallen n en p met $p \leq n$ geldt:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} &= \binom{n}{n-p} \\
\binom{n}{0} &= \binom{n}{n} = 1 \\
\binom{n}{1} &= \binom{n}{n-1} = n \qquad n \geq 1 \\
\binom{n+1}{p} &= \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \qquad p \geq 1
\end{aligned}$$

Oefening 6.3.1. Bereken volgende uitdrukkingen.

1. $\binom{5}{1} = \ldots\ldots$
2. $\binom{20}{19} = \ldots\ldots$
3. $\binom{42}{20} - \binom{42}{22} = \ldots\ldots$
4. $\binom{k+1}{k} = \ldots\ldots$

Oefening 6.3.2. Juist of fout?

1. $\binom{2k}{k} = \frac{2}{k!}$ | Juist | Fout |

CC BY-NC-SA 4.0