Het sommatieteken $\sum$

Uitweiding 1 (Indien het sommatieteken nieuw is voor jou, kan je eerst deze inleidende voorbeelden bekijken.)**.**

Met het *sommatieteken* $\sum$ kunnen sommen met veel termen kort worden opgeschreven.

Voorbeeld 1 (Inleidende voorbeelden)**.**

- Beschouw de som $2+4+8+16+32+64$.

  Dit is een som van machten van 2. Elke term is van de vorm 2^i waarbij i loopt van 1 tot en met 6. We schrijven die som verkort als

  $$2+4+8+16+32+64 = \underbrace{2^1}_{i=1} + \underbrace{2^2}_{i=2} + \underbrace{2^3}_{i=3} + \ldots + \underbrace{2^6}_{i=6} = \sum_{i=1}^{6} 2^i\,.$$

  We kunnen met deze notatie ook veel langere sommen opschrijven:

  $$2+4+8+16+\ldots+4096 = 2^1+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{11}+2^{12} = \sum_{i=1}^{12} 2^i\,.$$

- Beschouw de som $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$.

  Dit is de som van de termen $\frac{1}{i}$, waarbij i loopt van 1 tot en met 5. We kunnen die som verkort schrijven als

  $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i}\,.$$

- Beschouw de som $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}$.

  We kunnen de som verkort schrijven als

  $$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36} = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i^2}\,.$$

De letter die gebruikt wordt bij het sommatieteken hoeft niet i te zijn, dat mag een willekeurige letter zijn. Andere vaak gebruikte letters zijn j en k. De sommatie hoeft ook niet bij 1 te starten:

CC BY-NC-SA 4.0

Voorbeeld 2 (Extra voorbeelden sommatieteken)**.**

- Beschouw de som $9+16+25+36+49+64+81$.

  We kunnen die som verkort schrijven als $\sum_{k=3}^{9} k^2 = 9+16+25+36+49+64+81 = 280.$

- Beschouw de som $2+3+4+\cdots+8$.

  We kunnen die som verkort schrijven als $\sum_{k=2}^{8} k = 2+3+4+5+6+7+8.$

  Merk op dat deze schrijfwijze niet uniek is: men kan dezelfde som bijvoorbeeld ook noteren als

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{7}(k+1) &= (1+1)+(2+1)+\ldots+(7+1)\\ &= 2+3+4+5+6+7+8 = 35\end{aligned}$$

  of zelfs

$$\begin{aligned}\sum_{j=3}^{9}(j-1) &= (3-1)+(4-1)+\ldots+(9-1)\\ &= 2+3+4+5+6+7+8 = 35.\end{aligned}$$

- Als we 100 getallen hebben die we aanduiden met $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, dan noteren we de som van de laatste 50 als

$$\sum_{i=51}^{100} a_i \overset{\text{notatie}}{=} a_{51}+a_{52}+a_{53}+\cdots+a_{99}+a_{100}\,.$$

  We lezen dit als 'de som van de termen a_i waarbij (de index) i loopt van 51 tot 100'.

Een algemene definitie van de sommatie, enigszins abstract geformuleerd, gaat als volgt:

Definitie 1 (Het sommatieteken)**.**

Voor $n \in \mathbb{N}$ en $a_1, a_2, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ reële getallen definiëren we :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \overset{\text{notatie}}{=} a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$$

Deze notatie wordt veralgemeend voor $m, n \in \mathbb{Z}$ met $m \leqslant n$ en $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{n-1}, a_n$ reële getallen:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \overset{\text{notatie}}{=} a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{n-1}+a_n$$

We lezen $\sum_{k=m}^{n} a_k$ als de som van (de) a_k voor k gaande van m tot en met n.

Men noemt a_k de **algemene term** en k de **sommatie-index**.
Men noemt m de **ondergrens** en n de **bovengrens** van de sommatie.

CC BY-NC-SA 4.0

Het sommatieteken $\sum$

Men noteert $\sum_{k=m}^{n} a_k$ soms ook als $\sum_{k=m}^{n} a_k$.

Eigenschap 1 (Eigenschappen sommatie)**.**

(a) $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$ (sommatie over één getal)

(b) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i$ (veranderen van indexnaam)

(c) $\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (veranderen van grenzen)

Voorbeeld 3.

$$\sum_{i=1}^{10} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + 100$$

$$\sum_{i=0}^{9} (i+1)^2 = (0+1)^2 + (1+1)^2 + (2+1)^2 + \cdots + (9+1)^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + 100 = \sum_{i=1}^{10} i^2$$

$$\sum_{i=-2}^{3} i^3 = (-2)^3 + (-1)^3 + 0 + 1^3 + 2^3 + 3^3 = 27$$

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1$$

Opmerking 1.

- Het is steeds van belang niet alleen de algemene term te bekijken, maar ook de begin- en eindgrenzen. Als je nog niet zo vertrouwd bent met het sommatieteken, is het aangewezen om de eerste twee of drie termen en de laatste term expliciet op te schrijven.
- De sommatie-index mag geen andere betekenis hebben in de context.

  Als $k \in \mathbb{R}$, dan is

  $$\sum_{i=1}^{4} k^i = \sum_{j=1}^{4} k^j = k + k^2 + k^3 + k^4$$

  maar

  $$\sum_{k=1}^{4} k^k = 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 \neq \sum_{i=1}^{4} k^i.$$

  Je mag voor $k + k^2 + k^3 + k^4$ *niet* de letter k kiezen als sommatie-index.

CC BY-NC-SA 4.0

Voorbeeld 4.

$$\sum_{i=1}^{99} i = 1+2+\cdots+99 = \sum_{k=1}^{99} k \qquad \text{(hernoem de index)}$$

$$\sum_{i=1}^{99} 2i = 2+4+\cdots+198$$

$$= 2(1+2+\cdots+99)$$

$$= 2\cdot\sum_{i=1}^{99} i \qquad \text{(factor buitenbrengen)}$$

$$\sum_{i=1}^{99} 1 = 1+1+\cdots+1 = 99 \qquad \text{(constante)}$$

$$\sum_{j=1}^{4}(a+x_j) = (a+x_1)+(a+x_2)+(a+x_3)+(a+x_4)$$

$$= 4a+\sum_{i=1}^{4} x_i \qquad \text{(herschrijf de sommand)}$$

$$\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1+2^2+3^2 = \sum_{i=0}^{2}(i+1)^2 \qquad \text{(herindexeer)}$$

Oefening 1. Bereken volgende sommen:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k^3 = \ldots\ldots$
2. $\displaystyle\sum_{k=-3}^{3} k^3 = \ldots\ldots$

Oefening 2. Schrijf volgende sommatie voluit.

1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{4} 2ju_{2j}^2 = \ldots\ldots$

Om een gegeven som te schrijven met behulp van het sommatieteken $\sum$ moeten we op zoek gaan naar de gemeenschappelijke vorm van de termen. Dat moet leiden tot een formule voor een algemene term, zeg a_k, die bijna altijd afhangt van een zelfgekozen sommatie-index (hier dus k). Vervolgens zoeken we de onder- en bovengrenzen, dit zijn respectievelijk de eerste en de laatste waarde die k moet aannemen opdat a_k precies alle termen van de som doorloopt.

Voorbeeld 5. Schrijf met een sommatieteken:

1. $\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{49} = \displaystyle\sum_{i=4}^{7}\frac{1}{i^2}$
2. $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4 = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} a_ib_i$
3. $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^3+x^4+\dfrac{\sqrt{5}}{2}x^5+\dfrac{\sqrt{6}}{2}x^6+\dfrac{\sqrt{7}}{2}x^7+\sqrt{2}x^8+\dfrac{3}{2}x^9+\dfrac{\sqrt{10}}{2}x^{10}+\dfrac{\sqrt{11}}{2}x^{11}+\sqrt{3}x^{12}.$

CC BY-NC-SA 4.0

Uitwerking: De algemene term is hier $a_k = \frac{\sqrt{k}}{2}x^k$.

De ondergrens is dan 1 en de bovengrens 12.

Bovenstaande som kunnen we dus korter opschrijven als

$$\sum_{k=1}^{12} \frac{\sqrt{k}}{2}x^k.$$

Als de termen van de gegeven som afwisselend positief en negatief zijn, kan je in de algemene term vermenigvuldigen met de factor $(-1)^k$ of $(-1)^{k+1}$. Voor oneven k is $(-1)^k = -1$, dus deze factor in de algemene term vermenigvuldigt alle termen met oneven sommatie-index met -1. Voor even k is $(-1)^{k+1} = -1$, dus deze factor in de algemene term vermenigvuldigt alle termen met even sommatie-index met -1.

Voorbeeld 6.

1. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \cdots + 129 - 130.$

Uitwerking: We nemen als ondergrens $k = 1$ en als bovengrens $k = 130$. De termen met een even sommatie-index k zijn negatief (de term voor $k = 2$ is -2, de term voor $k = 4$ is -4, ...). Vermits $(-1)^{k+1}$ gelijk is aan 1 voor oneven k en gelijk aan -1 voor even k, is de algemene term hier $a_k = (-1)^{k+1}k$.

Bovenstaande som kunnen we dus korter opschrijven als

$$\sum_{k=1}^{130}(-1)^{k+1}k.$$

2. $-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 + \cdots - 129 + 130.$

Uitwerking: We nemen als ondergrens $k = 1$ en als bovengrens $k = 130$. De termen met een oneven sommatie-index k zijn negatief (de term voor $k = 1$ is -1, de term voor $k = 3$ is -3, ...). Vermits $(-1)^k$ gelijk is aan -1 voor oneven k en gelijk aan 1 voor even k, is de algemene term hier $a_k = (-1)^k k$.

Bovenstaande som kunnen we dus korter opschrijven als

$$\sum_{k=1}^{130}(-1)^k k.$$

We bekijken verder de rekenregel van het afzonderen van de eerste of de laatste term. We beginnen met een voorbeeld:

Voorbeeld 7.

Beschouw de som

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2 + 4 + 8 = 14. \tag{1}$$

Zonderen we hierin de eerste term af, dan bekomen we

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2 + \sum_{k=2}^{3} 2^k,$$

de laatste term afzonderen geeft

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = \sum_{k=1}^{2} 2^k + 8.$$

CC BY-NC-SA 4.0

Oefening 3 (Vul aan).

1. $\displaystyle\sum_{i=3}^{5}\left(2i^2+3\right) = \sum_{i=3}^{4}\left(2i^2+3\right) + \ldots\ldots$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 + \ldots\ldots$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}k^2 = \sum_{k=1}^{2}k^2 + \ldots\ldots$
4. $\displaystyle\sum_{m=2}^{5}4m = \ldots\ldots + \sum_{m=3}^{5}4m$

CC BY-NC-SA 4.0