Logaritmische functies

We herhalen de definitie van logaritme

$$\log_a b = r \Leftrightarrow a^r = b,$$

en de belangrijke eigenschappen

$$\log_a a^x = x \qquad \text{en} \qquad a^{\log_a x} = x.$$

Door in de uitdrukking voor de logaritme $\log_a b$ het grondtal a constant te houden en het getal b te laten variëren, bekomen we een *functie*, namelijk een zogenaamde *logaritmische functie*:

Definitie 1 (Logaritmische functie)**.** De **logaritmische functie met grondtal** a ($a > 0$ en $a \neq 1$), is de reële functie

$$f(x) = \log_a(x)$$

waarbij x enkel *strikt positieve waarden* mag aannemen.

Opmerking 1.

- Bij de invoering van de logaritme $\log_a b$ (voorkennisles 2) hebben we de noodzaak besproken om beperkingen op te leggen aan het grondtal a en het argument b.
- $f(x) = a^x$ en $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ zijn **inverse** functies want

  $$f(f^{-1}(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$$

  en

  $$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(a^x) = \log_a a^x = x.$$

We bestuderen nu de *grafiek* van een logaritmische functie $f(x) = \log_a(x)$. Het zal blijken dat er een belangrijk onderscheid is tussen de gevallen a groter dan 1 en a tussen 0 en 1. In de cursus Wiskunde I wordt enkel het geval $a > 1$ besproken, voor de volledigheid en de analogie met exponentiële functies behandelen we hier beide gevallen (zeker nuttig voor andere vakken).

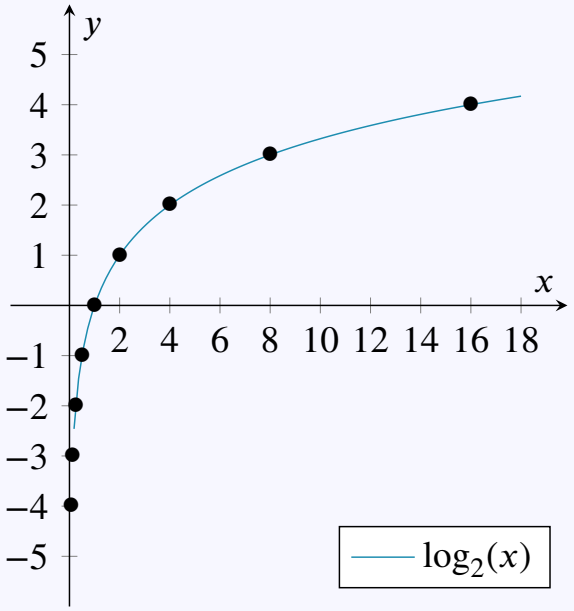
Voorbeeld 1 (Het geval $a > 1$:)**.**

We nemen als voorbeeld $a = 2$. We schetsen de grafiek van de logaritmische functie $f(x) = \log_2(x)$ door een aantal punten van de grafiek te bepalen. Het ligt voor de hand om voor de x-waarden machten van 2 te kiezen, omdat daarvoor de 2-logaritme gemakkelijk te bepalen is.

x	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16
$y = \log_2(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Dit levert voldoende punten op om de grafiek betrouwbaar te schetsen:

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.55)

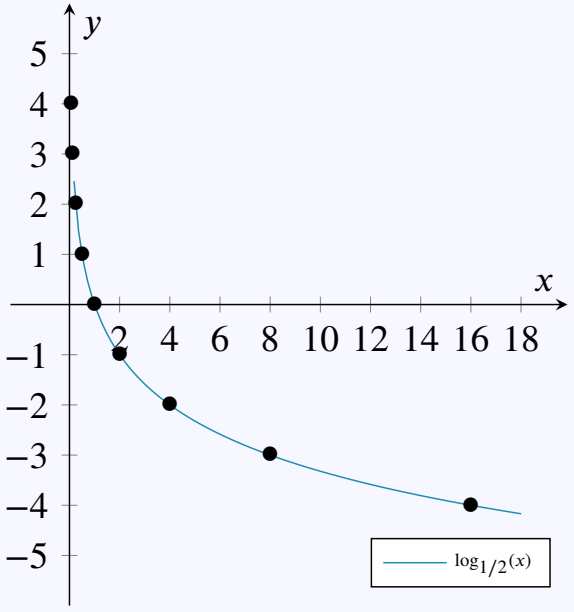


Voorbeeld 2 (Het geval $0 < a < 1$:).

We nemen als voorbeeld $a = \frac{1}{2} = 0.5$. We schetsen de grafiek van de logaritmische functie $f(x) = \log_{1/2}(x)$ met grondtal $\frac{1}{2}$ door een aantal punten van de grafiek te bepalen. We kunnen dezelfde tabel hergebruiken:

x	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16
$y = \log_{1/2}(x)$	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4

Dit levert opnieuw voldoende punten op om de grafiek betrouwbaar te schetsen:



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.55)

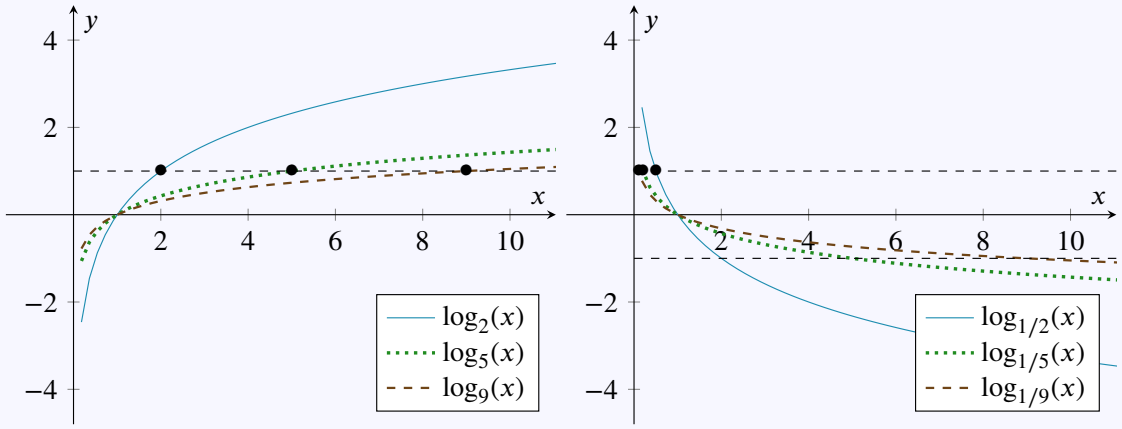
Logaritmische functies

Deze voorbeelden bestudeerden de specifieke grondtallen $a = 2$ en $a = 1/2$, maar ze vertonen een aantal eigenschappen die gelden voor *alle* logaritmische functies:

Eigenschap 1 (Logaritmische functies)**.**

- Als $a > 1$ dan is de functie $f(x) = \log_a(x)$ *strikt stijgend*: $x < y \iff \log_a(x) < \log_a(y)$
- Als $0 < a < 1$ dan is de functie $f(x) = \log_a(x)$ *strikt dalend*: $x < y \iff \log_a(x) > \log_a(y)$
- De functie $f(x) = \log_a(x)$ is enkel gedefinieerd voor $x > 0$.
- De functiewaarden $\log_a(x)$ kunnen alle reële waarden aannemen.
- De grafiek van $f(x) = \log_a(x)$ snijdt de x-as steeds in het punt $(1, 0)$ (want $\log_a 1 = 0$)
- De grafiek van $f(x) = \log_a(x)$ snijdt de y-as niet ($\log_a$ is niet gedefinieerd in 0)
- De grafiek van $f(x) = \log_a(x)$ snijdt de rechte $y = 1$ in het punt $(a, 1)$ (want $\log_a(a) = 1$)
- De functies $f(x) = \log_a(x)$ en $f(x) = a^x$ zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de eerste bissectrice.

Voorbeeld 3.



Definitie 2.

Als het grondtal a de waarde $e = 2.71\ldots$ heeft, dan schrijven we de functie $f(x) = \log_e(x)$ als

$$f(x) = \ln x$$

en geldt dus

$$\ln x = r \Leftrightarrow e^r = x$$

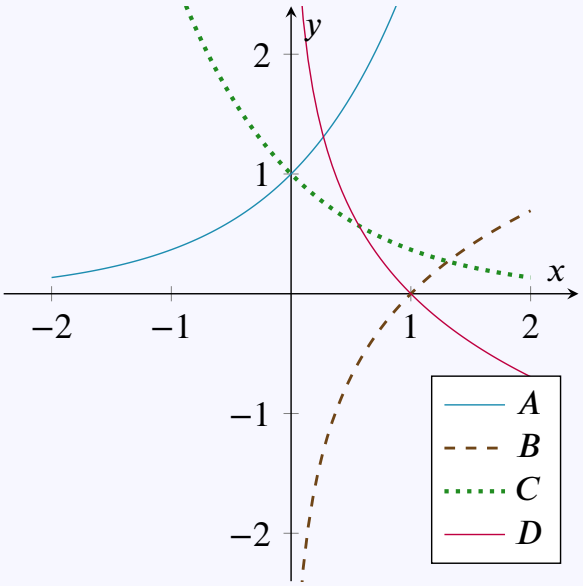
We herhalen de eigenschappen voor $f(x) = \ln x$

$$\ln e^x = x \qquad \text{en} \qquad e^{\ln x} = x.$$

Voorbeeld 4 (Grafiek van $f(x) = \ln x$)**.**

Welk van onderstaande grafieken is van de functie $f(x) = \ln(x)$?

CC BY-NC-SA 4.0



Deze vraag kunnen we beantwoorden louter op basis van de vorm van de grafieken. Omdat $f(x) = \ln(x)$ een logaritmische functie is, is deze enkel gedefinieerd voor strikt positieve waarden van x. Omdat het grondtal $e > 1$, moet de grafiek stijgend zijn. Enkel grafiek B voldoet hieraan.

Opmerking 2 (Eigenschappen logaritmische functies)**.**

Je kan soms extra eigenschappen van logaritmische functies terugvinden op basis van de rekenregels voor logaritmen. Zo kan je de op het eerste zicht tamelijk ingewikkelde functie $f(x) = \log_4(2^x)$ herschrijven als

$$f(x) = \log_4(2^x) = x \cdot \log_4(2) = x \cdot \log_4(4^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}.$$

en vaststellen dat dit gewoon de lineaire functie $f(x) = \frac{1}{2}x$ is.

Voorbeeld 5 (Domein logaritmische functie)**.**

Bepaal het domein van de functie $f(x) = \log_3\left(\frac{3}{4-x}\right)$. Bepaal dus alle mogelijke reële waarden van x waarvoor het functievoorschrift geldig is.

- De noemer van de breuk binnen de logaritme mag niet nul mag zijn: $4 - x \neq 0$ en dus $x \neq 4$.
- Een logaritme kan enkel berekend worden voor een strikt positief getal. Dus moet $\frac{3}{4-x} > 0$. Omdat de teller van deze breuk strikt positief is, moet ook de noemer dat zijn: $4 - x > 0$ of $x < 4$.

Alleen als aan deze twee voorwaarden voldaan is, kan de functiewaarde bepaald worden.

Het domein van deze functie is dus het interval $]-\infty, 4[$.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.55)