KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Wiskundige methoden voor Biomedische wetenschappen - Basiskennis

(Versie 2026/09/18H.5)

Inhoudsopgave

2 Rekenen 2.1

2.1 Haakjes en ontbinden in factoren . . . 2.1

2.1.A Oefeningen haakjes . . . 2.3

2.2 Breuken . . . 2.5

2.2.A Oefeningen breuken . . . 2.11

2.3 Machten . . . 2.12

2.3.1 Machten met gehele exponent . . . 2.12

2.3.2 Machten met rationale exponent . . . 2.13

2.3.3 Machten reële exponent . . . 2.15

2.3.A Oefeningen machten . . . 2.16

2.4 Ongelijkheden . . . 2.17

2.5 Absolute waarde . . . 2.24

2.1 Haakjes en ontbinden in factoren

Optellen $(2+3)$ en vermenigvuldigen $(2\cdot 3)$ zijn de twee basisoperaties met getallen. Bij combinaties zoals $2+3\cdot 5$ wordt om historische redenen eerst vermenigvuldigd en dan opgeteld, dus $2+3\cdot 5 = 2+(3\cdot 5) = 2+15 = 17$. Als je de andere volgorde wil *moet* je haakjes zetten: $(2+3)\cdot 5 = 5\cdot 5 = 25$.

Zeker zodra er ook met letters wordt gerekend, wordt het belangrijk om van sommen producten te kunnen maken, of omgekeerd van producten sommen te kunnen maken:

$2\cdot(a+3) = 2\cdot a + 2\cdot 3 = 2a+6$ product van 2 en $a+3$ wordt som van $2a$ en 6
$2\cdot a+6 = 2\cdot a + 2\cdot 3 = 2\cdot(a+3)$ som van $2a$ en 6 wordt product van 2 en $a+3$

Uitwerken van haakjes betekent *producten* herschrijven als *sommen*, zoals $2(a+b) = 2a+2b$.
Ontbinden in factoren betekent een *som* (of getal) herschrijven als een *product*, zoals $2a^2+6a = 2a(a+3)$.

Voor 'haakjes uitwerken' en 'ontbinden' gelden dezelfde regels, maar ze moeten telkens in de andere richting worden gelezen. Van links naar rechts zeggen ze hoe je een product (of een macht, dat is ook een product) schrijft als een som, maar van rechts naar links gelezen zeggen ze hoe je een som schrijft als een product.

Eigenschap 2.1.1. Zij $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(a+b)c &= ac+bc && \text{(distributiviteit van } \cdot \text{ t.o.v. } +)\\
a(c+d) &= ac+ad && \text{(idem, maar met som rechts)}\\
(a+b)(c+d) &= ac+ad+bc+bd && \text{(want gelijk aan } (a+b)c+(a+b)d)\\
-(a+b) &= -a-b && \text{(want } (-1)(a+b) = (-1)a+(-1)b)\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 && \text{(kwadraat van een tweeterm)}\\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 && \text{(kwadraat van tweeterm via } (a+(-b))^2)\\
(a+b)(a-b) &= a^2-b^2 && \text{(verschil van twee kwadraten)}
\end{aligned}$$

Voor hogere machten gelden volgende formules:

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 && \text{(derdemacht van een tweeterm)}\\
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k && \text{(Binomium van Newton)}\\
a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2) && \text{(som van derdemachten)}\\
a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) && \text{(verschil van derdemachten)}\\
a^n-b^n &= (a-b)(a^{n-1}+ba^{n-2}+b^2a^{n-3}+\cdots+b^{n-2}a+b^{n-1}) && \text{(verschil van } n^{\text{de}} \text{ machten)}\\
a^n+b^n &= (a+b)(a^{n-1}-ba^{n-2}+b^2a^{n-3}-\cdots-b^{n-2}a+b^{n-1}) && \text{(som } n^{\text{de}} \text{ machten, } n \textbf{ oneven})
\end{aligned}$$

Opmerking 2.1.1.

Het Binomium van Newton staat hier enkel als referentie, het wordt verder nog uitgelegd.

Voorbeeld 2.1.1. Vereenvoudig door de haakjes uit te werken. $(x,y,p,q \in \mathbb{R})$

1. $1-(x-y-1) = -x+y+2$

Uitwerking: $1-(x-y-1) = 1-x+y+1 = -x+y+2$

2. $1-(p-q)+p = q+1$

Uitwerking: $1-(p-q)+p = 1-p+q+p = q+1$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Haakjes en ontbinden in factoren

Voorbeeld 2.1.2. Werk de haakjes uit: $(x, y \in \mathbb{R})$

1. $(x+y)(x+3y)^2 = x^3+7x^2y+15xy^2+9y^3$

Uitwerking: $(x+y)(x+3y)^2 = (x+y)(x^2+6xy+9y^2) = x^3+6x^2y+9xy^2+yx^2+6xy^2+9y^3 = x^3+7x^2y+15xy^2+9y^3$

Voorbeeld 2.1.3. Vul aan door de voorgestelde factor buiten de haakjes te brengen, en vereenvoudig zo ver mogelijk. $(p, r, s, x \in \mathbb{R})$

1. $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot \left(4p+5\right)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 &= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^2 \cdot (p+1) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot (p+1) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (1 + 4(p+1)) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (1 + 4p + 4) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (4p+5)\,.
\end{aligned}$$

2. $(3p+2)\frac{4r}{3} - 4r(p-1) = \frac{4r}{3} \cdot (5)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
(3p+2)\frac{4r}{3} - 4r(p-1) &= \frac{4r}{3} \cdot (3p+2) - \frac{4r}{3} \cdot 3 \cdot (p-1) \\
&= \frac{4r}{3}(3p + 2 - 3 \cdot (p-1)) \\
&= \frac{4r}{3}(3p + 2 - 3p + 3) \\
&= \frac{4r}{3} \cdot 5.
\end{aligned}$$

3. $\frac{xs}{8} + \frac{xs^2}{4} + 3x^3s^3 = \frac{xs}{8}(1 + 2s + 24x^2s^2)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\frac{xs}{8} + \frac{xs^2}{4} + 3x^3s^3 &= \frac{xs}{8} \cdot 1 + \frac{xs}{8} \cdot 2s + \frac{xs}{8} \cdot 24x^2s^2 \\
&= \frac{xs}{8}(1 + 2s + 24x^2s^2).
\end{aligned}$$

Voorbeeld 2.1.4. Ontbind in factoren. $(x, y, r \in \mathbb{R})$

1. $81x^2y^2 - 25 = (9xy+5)(9xy-5)$

Uitwerking: $81x^2y^2 - 25 = (9xy)^2 - 5^2 = (9xy+5)(9xy-5)$ (verschil van twee kwadraten)

CC BY-NC-SA 4.0

2.1.A Oefeningen haakjes

2.1.A.1 Niveau 1

Oefening 2.1.1. Vereenvoudig. $(x, y, p, q \in \mathbb{R})$

1. $23 \cdot (1000 - 1) = \ldots\ldots$

2. $(923 + 77)/4 = \ldots\ldots$

3. $-\dfrac{2x + 4xy}{-2x} = \ldots\ldots$

4. $p - (p + q) + 2q = \ldots\ldots$

Oefening 2.1.2. Werk de haakjes uit en vereenvoudig. $(x, y, a \in \mathbb{R})$

1. $a(x + 3) - 3a = \ldots\ldots$

2. $ax + 3 + (-ax) = \ldots\ldots$

3. $2ax + 3 - (-ax) = \ldots\ldots$

4. $1 - (x - y + 1) + x = \ldots\ldots$

Oefening 2.1.3. Werk de haakjes uit. $(a \in \mathbb{R})$

1. $2(a + 3)^2 = \ldots\ldots$

2. $2(a - 3)^2 = \ldots\ldots$

3. $2(-a - 3)^2 = \ldots\ldots$

Oefening 2.1.4. Ontbind in factoren. $(x, y, a \in \mathbb{R})$

1. $x(x + 2) + 7(x + 2) = \ldots\ldots$

2. $3y(4y - 3) - 4x(4y - 3) = \ldots\ldots$

3. $(a + 1)(x + 1) - (2a - 4)(x + 1) = \ldots\ldots$

4. $5(x + 1) - (x + 1)^2 = \ldots\ldots$

2.1.A.2 Niveau 2

CC BY-NC-SA 4.0

2.1.A Oefeningen haakjes

Oefening 2.1.5. Ontbind in factoren. $(a, b, c, d, x, y, p, q \in \mathbb{R})$

1. $18x + 24y + 30z = \ldots\ldots$
2. $20ab^3 + 30bc + 25b^2c^3\sqrt{d} = \ldots\ldots$
3. $-9x^2y - 3xy = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{p^2q^3}{8} - \dfrac{p^2q}{2} + pq = \ldots\ldots$
5. $a - b - 3(a - b) = \ldots\ldots$
6. $xy - yz - xt + zt = \ldots\ldots$

Oefening 2.1.6. Ontbind in factoren of vul aan. $(u, s, t \in \mathbb{R})$

1. $24st + 12t - 60ut = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{st^2}{8} + \dfrac{s^2t^2}{12} + s^2t = \ldots\ldots$
3. $st + s + ut + u = \ldots\ldots$
4. $(2t - 2)(5t + 3) - (t - 1)(4t - 1) = \ldots\ldots$
5. $\dfrac{2s + 3}{2} + (2s + 3)^2 = \dfrac{2s + 3}{2} \cdot (\ldots\ldots)$
6. $\left(\dfrac{5s}{8}\right)(u - 1) - 5s(3u + 1) = \left(\dfrac{5s}{8}\right) \cdot (\ldots\ldots)$

Oefening 2.1.7. Ontbind in factoren. $(x, y \in \mathbb{R})$

1. $x^3 - 1 = \ldots\ldots$
2. $25x^2y^4 - 64 = \ldots\ldots$
3. $4x^2 + 24xy + 36y^2 = \ldots\ldots$
4. $x^2 - y^2 + 1 - 2x = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

Definitie 2.2.1 (Definitie breuken).

Een **breuk** is een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b}$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en $b \neq 0$.
We noemen a de **teller**, b de **noemer** en de streep tussen beide getallen de **breukstreep**.

Voor reële getallen a, b, c, d met $b \neq 0$ en $d \neq 0$ geldt

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

We noemen $-\frac{a}{b}$ de **tegengestelde breuk** van $\frac{a}{b}$.

Als $a \neq 0$ en $b \neq 0$ noemen we $\frac{b}{a}$ de **omgekeerde breuk** van $\frac{a}{b}$.

Een *breuk* is dus per definitie een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b}$ met $a, b \in \mathbb{R}$, met $b \neq 0$. Wanneer a en b concrete getallen zijn, bijvoorbeeld de breuk $\frac{3}{4}$, dan kunnen we de breuk omzetten naar een kommagetal: $\frac{3}{4} = 0.75$. We zullen hier echter voornamelijk werken met breuken met letters, zoals $\frac{a-b}{x}, \frac{x^2y}{y^3}, \ldots$, met $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ en $x \neq 0,\ y \neq 0$.

Bij de notatie van de tegengestelde breuk van $\frac{a}{b}$ mag je kiezen of je het minteken in de teller, de noemer of voor de gehele breuk plaatst.

Eigenschap 2.2.1 (Mintekens).

Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ geldt: $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

Voorbeeld 2.2.1 (Mintekens).

1. $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$
2. Voor $b \in \mathbb{R}$ met $b \neq 1$ geldt: $-\frac{b+1}{1-b} = \frac{-(b+1)}{1-b} = \frac{-b-1}{1-b} = \frac{b+1}{b-1}$

Waarschuwing 2.2.1 (Veelgemaakte fouten).

Gebruik **haakjes** om een minteken voor een teller of een noemer te plaatsen. Bijvoorbeeld ($a \in \mathbb{R}$):

$$-\frac{a+5}{7} = \frac{-(a+5)}{7} = \frac{-a-5}{7} = \frac{a+5}{-7}.$$

Een vaak gemaakte fout is het minteken enkel voor één term te plaatsen $-\frac{a+5}{7} \neq \frac{-a+5}{7}$.

Omgekeerd geldt ook dat als er één term in de teller een minteken heeft, je dat minteken niet zonder meer voor de hele breuk mag plaatsen ($b \in \mathbb{R}$): $\frac{-2+b}{4} \neq -\frac{2+b}{4}$. Wel geldt dat

$$\frac{-2+b}{4} = \frac{-(2-b)}{4} = -\frac{2-b}{4}$$

Deze opmerkingen gelden evenzeer voor mintekens in de noemer.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

Oefening 2.2.1. Voor $x \in \mathbb{R}$ met $x \neq 1$ geldt: $-\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{x-1}$

Eigenschap 2.2.2. Voor $a, b, k \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ geldt

$$k \cdot \frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{b} \qquad \text{(getal maal breuk)}$$

$$\frac{k \cdot a}{b} = k \cdot \frac{a}{b} \qquad \text{(factor uit teller halen)}$$

Voorbeeld 2.2.2 (Getal maal breuk)**.** $(a, b \in \mathbb{R})$

1. $7 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{3}$
2. $3 \cdot \dfrac{a+5}{7} = \dfrac{3(a+5)}{7} = \dfrac{3a+15}{7}$
3. $\dfrac{-10+5b}{4} = \dfrac{5(-2+b)}{4} = 5 \cdot \dfrac{-2+b}{4}$

Je kan breuken soms **vereenvoudigen** door de teller en de noemer beide te delen door eenzelfde factor, op voorwaarde dat deze factor verschillend is van nul. Meestal wordt in een oefening verwacht dat je een breuk zo eenvoudig mogelijk noteert. Je mag teller en noemer van een breuk ook vermenigvuldigen met eenzelfde factor verschillend van nul. Dit is nuttig om twee breuken op dezelfde noemer zetten.

Eigenschap 2.2.3. Voor $a, b, k \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ en $k \neq 0$ geldt

$$\frac{k \cdot a}{k \cdot b} = \frac{\cancel{k} \cdot a}{\cancel{k} \cdot b} = \frac{a}{b} \qquad \text{(gemeenschappelijke factor } k \text{ wegdelen)}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b} \qquad \text{(met factor } k \text{ vermenigvuldigen)}$$

Voorbeeld 2.2.3 (Vereenvoudigen)**.**

1. $\dfrac{10}{15} = \dfrac{5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \dfrac{2}{3}$
2. $\dfrac{2x}{4} = \dfrac{2 \cdot x}{2 \cdot 2} = \dfrac{x}{2}$
3. Voor $x, y \in \mathbb{R}$ met $y \neq 0$ geldt: $\dfrac{x^2 y}{y^3} = \dfrac{y \cdot x^2}{y \cdot y^2} = \dfrac{x^2}{y^2}$
4. Voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$, $d \neq 0$ geldt: $\dfrac{ab+ac}{ad} = \dfrac{a(b+c)}{ad} = \dfrac{b+c}{d}$
5. Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq b$ geldt: $\dfrac{a^2-b^2}{3a-3b} = \dfrac{(a-b)\cdot(a+b)}{(a-b)\cdot 3} = \dfrac{a+b}{3}$

Waarschuwing 2.2.2 (Veelgemaakte fouten)**.**

Voor willekeurige $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq -1$ kunnen we $\dfrac{a+3}{a+1}$ niet vereenvoudigen, wegens geen gemeen-

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

schappelijke factor in teller en noemer.

$$\frac{a+3}{a+1} \neq \frac{0+3}{0+1}$$
$$\frac{a+3}{a+1} \neq \frac{1+3}{1+1}$$

De eerste gelijkheid geldt wel voor $a = 0$ en de tweede voor $a = 1$, maar de gelijkheden gelden niet voor willekeurige $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq -1$.

Voor willekeurige $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq -\frac{1}{2}$ kunnen we $\frac{2a}{2a+1}$ niet vereenvoudigen:

$$\frac{2a}{2a+1} \neq \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}a+1} = \frac{a}{a+1}.$$

Indien we toch de factor 2 willen weg delen in teller en noemer gebruiken we haakjes:

$$\frac{2a}{2a+1} = \frac{2a}{2\left(a+\frac{1}{2}\right)} = \frac{a}{a+\frac{1}{2}}.$$

Oefening 2.2.2. Vereenvoudig $(p, q \in \mathbb{R}, p \neq q)$.

1. $\frac{p^2-q^2}{p-q} = \ldots\ldots$

Breuken met gelijke noemer kan je **optellen** door de tellers op te tellen. Breuken optellen is dus een som van breuken schrijven als één breuk. Omgekeerd, als de teller van een breuk een som is, kan je de breuk splitsen, wat wil zeggen dat je deze schrijft als een som van 2 breuken.

Definitie 2.2.2 (Som van breuken met gelijke noemer en splitsen van breuken)**.**

Voor $a, b, c \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ geldt

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \text{(breuken optellen, gelijke noemers)}$$
$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \qquad \text{(som in teller splitsen)}$$

Voorbeeld 2.2.4 (Som van breuken met gelijke noemer, splitsen van breuken)**.**

1. $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$

2. Voor $x, y \in \mathbb{R}$ met $y \neq 0$ geldt: $\frac{x-y}{y^2} + \frac{3x+y}{y^2} = \frac{x-y+3x+y}{y^2} = \frac{4x}{y^2}$

3. Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq b$ geldt: $\frac{3a+b^2}{a} = \frac{3a}{a} + \frac{b^2}{a} = 3 + \frac{b^2}{a}$

Waarschuwing 2.2.3 (Veelgemaakte fouten)**.**

Als de noemer van een breuk een som is kan je niet meteen de breuk splitsen. Voor een willekeurige $b \in \mathbb{R}$ met $b \neq -3$ kunnen we niet als volgt splitsen:

$$\frac{2}{b+3} \neq \frac{2}{b} + \frac{2}{3}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

Breuken met verschillende noemer kan je optellen of aftrekken door deze eerst op gelijke noemer te brengen. Je kan als gemeenschappelijke noemer het product van beide noemers nemen.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \quad = \quad \frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd} \quad = \quad \frac{ad+bc}{bd}.$$

Voorbeeld 2.2.5 (Som van breuken met verschillende noemer). $(x, y, a, b \in \mathbb{R}_0)$

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{2\cdot 1}{2\cdot 3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$

2. $\frac{1}{3x}+\frac{2}{y}=\frac{y}{3x\cdot y}+\frac{3x\cdot 2}{3x\cdot y}=\frac{6x+y}{3xy}$

3. $\frac{a+b}{2a}+\frac{a-b}{3b}=\frac{(a+b)3b}{2a\cdot 3b}+\frac{2a(a-b)}{2a\cdot 3b}=\frac{3ab+3b^2}{6ab}+\frac{2a^2-2ab}{6ab}=\frac{2a^2+ab+3b^2}{6ab}$

Oefening 2.2.3.

1. Schrijf $a-\frac{a}{b}$ als één breuk. $(a, b \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0)$

Als gemeenschappelijke noemer het product van beide gegeven noemers nemen is altijd een correcte werkwijze, maar vaak niet de meest efficiënte. Ontbind eerst de noemers zo ver mogelijk in factoren. Bij gehele getallen bedoelen we met ontbinden in factoren het geheel getal schrijven als een product van priemfactoren. Als nieuwe noemer kies je dan het kleinste gemene veelvoud van de noemers. Dit kleinste gemene veelvoud vind je door van elke factor die voorkomt in één van de noemers de hoogste macht te nemen die voorkomt en deze te vermenigvuldigen met elkaar.

Voorbeeld 2.2.6 (Som van breuken met verschillende noemer).

Met behulp van het kleinste gemene veelvoud kan de optelling sneller:

1.

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5}{2^2\cdot 3}+\frac{7}{2\cdot 3^2}=\frac{5\cdot 3}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7\cdot 2}{2^2\cdot 3^2}=\frac{15}{36}+\frac{14}{36}=\frac{29}{36} \quad \text{i.p.v.} \quad \frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 18}{12\cdot 18}+\frac{7\cdot 12}{18\cdot 12}=\frac{174}{216}$$

2. Voor $a, b, k, l, m \in \mathbb{R}$ met $k \neq 0$, $l \neq 0$ en $m \neq 0$:

$$\frac{a}{k\cdot l}+\frac{b}{m\cdot l}=\frac{a\cdot m}{k\cdot l\cdot m}+\frac{b\cdot k}{k\cdot l\cdot m}=\frac{a\cdot m+b\cdot k}{k\cdot l\cdot m} \quad \text{i.p.v.} \quad \frac{a}{k\cdot l}+\frac{b}{m\cdot l}=\frac{a\cdot m\cdot l+b\cdot k\cdot l}{k\cdot l\cdot m\cdot l}=\ldots$$

3. Voor $a, b, k, l \in \mathbb{R}$ met $k \neq 0$ en $l \neq 0$:

$$\frac{a}{k^2\cdot l^2}+\frac{b}{k\cdot l^3}=\frac{a\cdot l}{k^2\cdot l^3}+\frac{b\cdot k}{k^2\cdot l^3}=\frac{a\cdot l+b\cdot k}{k^2\cdot l^3}$$

Breuken **vermenigvuldigen of delen** is eenvoudiger dan optellen of aftrekken. Hiervoor hoef je ze niet eerst op gelijke noemer te brengen.

Definitie 2.2.3.

Voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$, $c \neq 0$ en $d \neq 0$ geldt

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \qquad \text{(vermenigvuldiging)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \overset{\text{def}}{=} \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c} \qquad \text{(deling)}$$

Voorbeeld 2.2.7 (Breuken vermenigvuldigen en delen). $(x, y \in \mathbb{R}_0)$

1. $\dfrac{2x}{3}\cdot\dfrac{2}{x} = \dfrac{4x}{3x} = \dfrac{4}{3}$
2. $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{3}{y}} = \dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{y}{3} = \dfrac{xy}{6}$

Opmerking 2.2.1 (Breuken van breuken).

In de definitie van deling van breuken gebruiken we breuken van breuken. Voor breuken van breuken is de *grootte* van de verschillende breukstrepen en de precieze *plaats* van de symbolen erg belangrijk. Beide breukstrepen mogen niet even groot zijn want dan is de uitdrukking niet ondubbelzinnig. We schrijven voor de leesbaarheid de grootste breukstreep altijd in het midden van de relevante formule. Dus

$$x = \frac{\frac{1+a}{2}+3}{4+\frac{\frac{1}{5}+a}{6}} \quad \text{maar nooit} \quad x = \cancel{\frac{\frac{1+a}{2}+3}{4+\frac{\frac{1}{5}+a}{6}}}\,.$$

Oefening 2.2.4. Schrijf als één breuk en vereenvoudig zo ver mogelijk $(p, q \in \mathbb{R}_0)$.

1. $\dfrac{\frac{p+qp}{pq^2}}{\frac{p^2}{q}} = \ldots\ldots$

Eigenschap 2.2.4 (Eenvoudige maar belangrijke gevolgen).

Voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, met $b \neq 0$, $c \neq 0$ geldt

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c} = \frac{a}{c} \qquad \text{(gelijke noemer } \frac{1}{b} \text{ wegdelen)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c} = \frac{a}{b\cdot c} \qquad \text{(breuk gedeeld door getal is maal in noemer)}$$

$$\frac{a}{\frac{c}{d}} = a\cdot\frac{d}{c} = \frac{a\cdot d}{c} \qquad \text{(getal gedeeld door breuk is maal omgekeerde)}$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

Voorbeeld 2.2.8. Vereenvoudig door met slechts één breukstreep te schrijven.($x, y \in \mathbb{R}_0$)

1. $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{y}{2}} = \dfrac{x}{y}$

   Uitwerking: $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{y}{2}} = \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{2}{y} = \dfrac{x}{y}$

2. $\dfrac{x+y}{\frac{x}{y}} = \dfrac{(x+y)y}{x}$

   Uitwerking: $\dfrac{x+y}{\frac{x}{y}} = (x+y) \cdot \dfrac{y}{x} = \dfrac{(x+y)y}{x}$

3. $\dfrac{\frac{x+y}{x}}{y} = \dfrac{x+y}{xy}$

   Uitwerking: $\dfrac{\frac{x+y}{x}}{y} = \dfrac{x+y}{x} \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{x+y}{xy}$

Tot slot nog enkele trucjes die in sommige contexten nuttig kunnen zijn.

Eigenschap 2.2.5 (trucjes). ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ en $d \neq 0$)

$$
\begin{aligned}
a + c &= d \cdot \left(\frac{a}{d} + \frac{c}{d}\right) && \text{(niet bestaande factor buiten haakjes brengen)} \\
a &= \frac{a}{1} && \text{(van 'geen breuk' toch 'breuk' maken)} \\
b &= \frac{1}{1/b} && \text{(van 'geen breuk' toch 'breuk' maken (variant))} \\
a \cdot b &= \frac{a}{1/b} && \text{(van een product een breuk maken)} \\
\frac{a}{b} &= a \cdot \frac{1}{b} && \text{(van een breuk een product maken)}
\end{aligned}
$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2.A Oefeningen breuken

2.2.A.1 Niveau 1

Oefening 2.2.5. Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

1. $20 \cdot (\frac{5}{4} - \frac{4}{5}) = \ldots\ldots$
2. $-\frac{6}{27} + \frac{27}{1} + \frac{16+14}{9} - \frac{3}{14+13} - 3 \cdot 9 = \ldots\ldots$
3. $-\frac{(1-a)-2}{a+1} = \ldots\ldots$ $(a \neq -1)$

2.2.A.2 Niveau 2

Oefening 2.2.6. Schrijf als een zo eenvoudig mogelijke breuk. Stel $a, b, c \in \mathbb{R}_0$.

1. $\frac{a-b}{c} - \frac{a-2b}{2c} = \ldots\ldots$
2. $\frac{\frac{a-b}{b}}{1-\frac{a}{b}} = \ldots\ldots$
3. $\frac{1-\frac{a+b}{b}}{\frac{a^2}{b}} = \ldots\ldots$
4. $a + \frac{a}{1+a} = \ldots\ldots$
5. $1 + \frac{a}{1+a} = \ldots\ldots$
6. $1 + \frac{1}{1+a} = \ldots\ldots$
7. $a + \frac{1}{1+a} = \ldots\ldots$
8. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}} = \ldots\ldots$
9. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Machten

2.3.1 Machten met gehele exponent

Net zoals *vermenigvuldigen* 'herhaald optellen' is: $3\times 2 \overset{\text{def}}{=} 2+2+2$ en $n\times a = \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n \text{ termen}}$,

is *machtsverheffen* 'herhaald vermenigvuldigen': $2^3 \overset{\text{def}}{=} 2\cdot 2\cdot 2$ en $a^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{a\cdot a\cdot \ldots\cdot a}_{n \text{ factoren}}$.

Definitie 2.3.1 (Machtsverheffing met reëel grondtal en gehele exponent)**.**
De n**-de macht** van een reëel getal a, met $n\in\mathbb{N}$, genoteerd a^n, is

$$\begin{aligned} a^0 &\overset{\text{def}}{=} 1 && \text{als } a\neq 0\\ a^n &\overset{\text{def}}{=} \underbrace{a\cdot a\cdot \ldots\cdot a}_{n \text{ factoren}} && \text{als } n\in\mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

We noemen a het **grondtal** en n de **exponent**.
Als a niet nul is, dan definiëren we ook machten met *negatieve* gehele exponenten:

$$a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}.$$

De uitdrukkingen 0^0 en 0^{-n} zijn *onbepaald* en hebben dus *geen betekenis*.

Oefening 2.3.1. Onmiddellijke gevolgen van de definities:

1. $a^1 = a$ voor alle $a\in\mathbb{R}$.
2. $a^0 = 1$ voor alle $a\in\mathbb{R}_0$.
3. $0^n = \ldots\ldots$ voor alle $n\in\mathbb{N}_0$, 0^{-n} is niet gedefinieerd voor $n\in\mathbb{N}$.
4. $a^{-1} = \frac{1}{a}$ voor alle $a\in\mathbb{R}_0$.

Omdat $a^2 = a\cdot a$ en $a^3 = a\cdot a\cdot a$ volgt ook direct dat

$$\begin{aligned} a^2\cdot a^3 &= (a\cdot a)(a\cdot a\cdot a) = a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a = a^{2+3} = a^5\\ (a^2)^3 &= (a\cdot a)^3 = (a\cdot a)(a\cdot a)(a\cdot a) = a^{2\cdot 3} = a^6\\ a^3\cdot b^3 &= (a\cdot a\cdot a)(b\cdot b\cdot b) = (a\cdot b)(a\cdot b)(a\cdot b) = (a\cdot b)^3 \end{aligned}$$

maar een uitdrukking als $a^2\cdot b^3$ kan je niet schrijven als één macht, wel bijvoorbeeld als $(a\cdot b)^2\cdot b$:

$$a^2\cdot b^3 = a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b = a\cdot b\cdot a\cdot b\cdot b = (a\cdot b)^2\cdot b$$

In het algemeen gelden volgende rekenregels:

Eigenschap 2.3.1 (Rekenregels machten)**.**

2.3 Machten

Voor alle $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ en $m, n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\begin{aligned} xa^r + ya^r &= (x+y)a^r && \text{(som van } \textit{gelijke} \text{ machten)} \\ a^m a^n &= a^{m+n} && \text{(product van machten met zelfde grondtal)} \\ (ab)^n &= a^n b^n && \text{(macht van product)} \\ (a^m)^n &= a^{mn} && \text{(macht van een macht)} \end{aligned}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \text{als } a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \text{als } b \neq 0$$

Dezelfde regels gelden voor *gehele* $m, n \in \mathbb{Z}$ zolang het grondtal niet nul is bij negatieve exponenten.

Voorbeeld 2.3.1. Bereken volgende machten.

1. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 2^6 = 64$

2. $\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{4} \cdot 9 = \frac{9}{4}$

2.3.2 Machten met rationale exponent

Als we ons beperken tot positieve grondtallen, kunnen we de machtsverheffing eenvoudig verder veralgemenen: we definiëren eerst $a^{\frac{1}{n}}$, dan $a^{\frac{m}{n}} = a^q$, met $q \in \mathbb{Q}$, en tenslotte vermelden we ook a^r, met $r \in \mathbb{R}$.

Definitie 2.3.2 (n-de machtswortel)**.**

Zij $a \in \mathbb{R}^+$ en $n \in \mathbb{N}_0$.

De macht $a^{\frac{1}{n}}$ met grondtal a en exponent $\frac{1}{n}$ wordt gedefinieerd als het uniek positief reëel getal b ($b \in \mathbb{R}^+$) waarvan de n-de macht gelijk is aan a. In symbolen:

$$b = a^{\frac{1}{n}} \iff b^n = a \,.$$

We noemen $a^{\frac{1}{n}}$ de n-**de machtswortel** uit a en noteren ook

$$\sqrt[n]{a} \overset{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{n}} \,.$$

Voor $n = 2$ noteren we $a^{\frac{1}{2}}$ als $\sqrt{a}$ in plaats van $\sqrt[2]{a}$.

We definiëren voor $a \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}$ ook

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \,.$$

Per definitie is $a^{\frac{m}{n}}$ dus de m-de macht van de n-de machtswortel uit a.

De definitie van $a^{\frac{1}{n}}$ is enkel zinvol als een dergelijk positief reëel getal b *bestaat* en *uniek* is. Precies om

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Machten

dat te garanderen moet de definitie voor **even** n beperkt worden tot *positieve* a en b. Inderdaad, voor negatieve a *bestaat* er immers niet altijd een geschikte b: neem bijvoorbeeld $a=-2$, dan bestaat er geen $b\in\mathbb{R}$ zodat $b^2=-2$. Als het getal b niet beperkt wordt tot de *positieve* getallen, dan is dergelijke b niet *uniek*: neem bijvoorbeeld $a=4$, dan voldoen zowel $b=2$ als $b=-2$ aan $b^2=4$.
Voor **oneven** machtswortels stelt dit probleem zich niet: $\sqrt[3]{8}=8^{\frac{1}{3}}=2$ en $\sqrt[3]{-8}=(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$. Dus als n oneven is definieert de formule $b=a^{\frac{1}{n}} \iff b^n=a$ ook n-de machtswortels van *negatieve* getallen.

Definitie 2.3.3 (Uitbreiding definitie n-de machtswortel)**.**

Zij $a\in\mathbb{R}$ en $n\in\mathbb{N}_0$ en n **oneven**.

De macht $a^{\frac{1}{n}}$ met grondtal a en exponent $\dfrac{1}{n}$ wordt gedefinieerd als het uniek reëel getal b waarvan de n-de macht gelijk is aan a. In symbolen:

$$b=a^{\frac{1}{n}} \iff b^n=a\,.$$

Ook voor machten met rationale exponenten blijven bovenstaande rekenregels gelden. Zo gelden bijvoorbeeld volgende rekenregels voor vierkantswortels, met $x\in\mathbb{R}^+, y\in\mathbb{R}_0^+$.

$$\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}, \qquad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\frac{x}{y}}, \qquad a\sqrt{x}+b\sqrt{x}=(a+b)\sqrt{x}$$

Opmerking 2.3.1.

Onmiddellijke gevolgen van de definities en rekenregels:

- $a^{-\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}=(\sqrt[n]{a})^{-1}$ voor alle $a\in\mathbb{R}_0^+$ en alle $n\in\mathbb{N}_0$
- $\sqrt[n]{a^m}=(a^m)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ voor alle $a\in\mathbb{R}_0^+$, alle $m\in\mathbb{Z}$ en alle $n\in\mathbb{N}_0$
- $\sqrt[n]{a^n}=a^{\frac{n}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a^1=a$ voor alle $a\in\mathbb{R}^+$ en alle $n\in\mathbb{N}_0$

Waarschuwing 2.3.1 (Veelgemaakte fouten)**.**

- $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$
  want bijvoorbeeld $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ en $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$
- $a^{-2}\neq a^{\frac{1}{2}}$
  want bijvoorbeeld $5^{-2}=\dfrac{1}{5^2}=\dfrac{1}{25}$ en $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$
- $\sqrt{(-3)^2}\neq -3$
  want $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$. Voor $a\in\mathbb{R}^+$ geldt wel dat $\sqrt{a^2}=a$.

Voorbeeld 2.3.2. Vereenvoudig volgende machten met rationale exponent (met $x\in\mathbb{R}_0^+$).

1. $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt{64}=8^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{8^2}=8^{\frac{1}{3}}\cdot 8=8^{\frac{1}{3}+1}=8^{\frac{4}{3}}=(\sqrt[3]{8})^4=2^4=16$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Machten

2. $\dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{x} = x^{\frac{3}{4}-1} = x^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$

3. $\left(x^3 \cdot \sqrt[4]{x}\right)^2 = x^6 \cdot \left(\sqrt[4]{x}\right)^2 = x^6 \cdot \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 = x^6 \cdot x^{\frac{2}{4}} = x^{6+\frac{1}{2}} = x^{\frac{13}{2}} = \sqrt{x^{13}}$

Oefening 2.3.2. Vereenvoudig (met $x, y \in \mathbb{R}_0^+$):

1. $\dfrac{4}{\sqrt{8}} = \ldots\ldots$

2. $y^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x^2 y}}{xy}\right)^4 = \ldots\ldots$

3. $\sqrt{48x^9y^4} = \ldots\ldots$

2.3.3 Machten reële exponent

Men kan ook a^r definiëren met $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $r \in \mathbb{R}$ (dus uitdrukkingen zoals $2^{\sqrt{3}}$, $\pi^{\sqrt{5}}$ en $\sqrt{7}^{\sqrt{\pi}}$). We geven de definitie hier niet in detail. We zullen later reële exponenten nodig hebben bij het bestuderen van zogenaamde exponentiële functies zoals $x \mapsto 2^x$.

Ook voor machten met reële exponenten blijven de gebruikelijke rekenregels gelden.

CC BY-NC-SA 4.0

2.3.A Oefeningen machten

2.3.A.1 Niveau 1

Oefening 2.3.3. Bereken:

1. $5^2 = \ldots\ldots$
2. $-5^2 = \ldots\ldots$
3. $(-5)^2 = \ldots\ldots$
4. $(2+3)^2 = \ldots\ldots$
5. $2^2 + 3^2 = \ldots\ldots$
6. $(2+3)^2 - (2^2+3^2) = \ldots\ldots$
7. $\sqrt{5^2} = \ldots\ldots$
8. $\sqrt{(-5)^2} = \ldots\ldots$

Oefening 2.3.4. Bereken

1. $2^2 \cdot 2^3 = 2^{\cdots\cdots}$
2. $(2^2)^3 = 2^{\cdots\cdots}$
3. $2^{(2^3)} = 2^{\cdots\cdots}$
4. $\dfrac{2^{1302}}{2^{1299}} = 2^{\cdots\cdots}$
5. $1302^5 \cdot 2^5 = \ldots\ldots^5$

2.3.A.2 Niveau 2

Oefening 2.3.5. Schrijf zo eenvoudig mogelijk. Stel $x, y, a, b \in \mathbb{R}_0^+$.

1. $\dfrac{\sqrt{a}}{a^5} = \ldots\ldots$
2. $\left(x^6 y^8\right)^{-1/2} = \ldots\ldots$
3. $a^4 b \left(\dfrac{\sqrt{a^2 b^4}}{ab}\right)^3 = \ldots\ldots$

2.4 Ongelijkheden

Ongelijkheden

Een belangrijke eigenschap van reële getallen is dat we ze kunnen ordenen: voor twee getallen $x, y \in \mathbb{R}$ geldt altijd $x \leq y$ of $y \leq x$. We kunnen dus niet alleen vergelijkingen bestuderen en oplossen, maar ook zogenaamde on*gelijk*heden. Daarbij zoeken we niet naar de waarden van een onbekende die een *gelijkheid* oplost, maar naar de waarden van een onbekende die een *ongelijkheid* oplost.

Voorbeeld 2.4.1 (Voorbeelden van ongelijkheden)**.**

- $x^2 > 2x - 1$
- $\sin(x) \geq 0.5$

Opmerking 2.4.1.

- Ongelijkheden kunnen aan elkaar worden gekoppeld:

  $$a < b < c \iff a < b \text{ en } b < c.$$

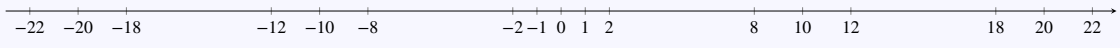
  Merk op dat uit beide uitdrukkingen telkens ook volgt dat $a < c$.
- Uitdrukkingen van de vorm $a < b > c$ worden *nooit* gebruikt: je schrijft bv. $a < b$ en $c < b$, of korter $a, c < b$

Ongelijkheden oplossen is in het algemeen *moeilijker* dan het oplossen van vergelijkingen, onder meer omwille van de extra complicatie dat twee leden van een ongelijkheid vermenigvuldigen met een *negatief* getal de ongelijkheid *omdraait*:

Eigenschap 2.4.1. Voor elke $a, b, r \in \mathbb{R}$ geldt

	$a < b$	$\iff$	$a + r < b + r$		(plus getal)
Geval $0 < r$:	$a < b$	$\iff$	$r \cdot a < r \cdot b$		(maal positief getal)
Geval $r < 0$:	$a < b$	$\iff$	$r \cdot a > r \cdot b$	(of $r \cdot b < r \cdot a$)	(maal negatief getal)

Voorbeeld 2.4.2. We hebben $10 < 20$, en dus ook $10 + 2 < 20 + 2$, $10 - 2 < 20 - 2$ en $2 \cdot 10 < 2 \cdot 20$, maar $(-2) \cdot 10 > (-2) \cdot 20$. Ook is $1 < 2$, maar $-1 > -2$. Deze ongelijkheden zie je ook op de getallenrechte:



Opmerking 2.4.2.

- De eerste eigenschap zegt dat je bij beide leden van een ongelijkheid eenzelfde getal mag optellen

  $$a < b \Rightarrow a + r < b + r$$

  of aftrekken

  $$a + r < b + r \Rightarrow a < b.$$

  Als we bij de ongelijkheid $x < y$ van beide leden y aftrekken krijgen we $x - y < 0$, wat neerkomt op de term y naar het andere lid brengen.

  $$x < y \iff x - y < 0$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Ongelijkheden

- De tweede eigenschap zegt dat je beide leden van een ongelijkheid mag vermenigvuldigen

$$a < b \Rightarrow\ r \cdot a < r \cdot b$$

of delen

$$r \cdot a < r \cdot b \Rightarrow\ a < b$$

met eenzelfde strikt positief getal r. De ongelijkheid blijft hierbij behouden.
Als we bij de ongelijkheid $x < y$, met $y > 0$, beide leden delen door y krijgen we $\frac{x}{y} < 1$, wat neerkomt op de factor y naar het andere lid brengen.

$$x < y \iff \frac{x}{y} < 1 \text{ indien } y > 0$$

- De derde eigenschap zegt dat je beide leden van een ongelijkheid mag vermenigvuldigen

$$a < b \Rightarrow\ r \cdot a > r \cdot b$$

of delen

$$r \cdot a > r \cdot b \Rightarrow\ a < b$$

met eenzelfde strikt negatief getal r. De ongelijkheid draait hierbij om.

Met deze notatie en eigenschappen van de ongelijkheden kunnen we de oplossingsverzameling zoeken van ongelijkheden, namelijk de verzameling alle getallen die voldoen aan de ongelijkheid.

Ongelijkheden met veeltermen

We geven eerst een voorbeeld van het oplossen van een ongelijkheid met een eerstegraadsveelterm.

Voorbeeld 2.4.3 (Ongelijkheid eerstegraadsveelterm)**.**

1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $2x + 3 < 5$.

$$\begin{array}{rcll} 2x+3 & < & 5 & \\ & \Updownarrow & & (\ -3 \text{ optellen}) \\ 2x & < & 2 & \\ & \Updownarrow & & (\ \text{delen door } 2) \\ x & < & 1 & (x \text{ is kleiner dan } 1) \end{array}$$

Dus is de oplossingsverzameling $V =]-\infty, 1\,[$.
Deze ongelijkheid kan ook opgelost worden door eerst bij beide leden -5 op te tellen

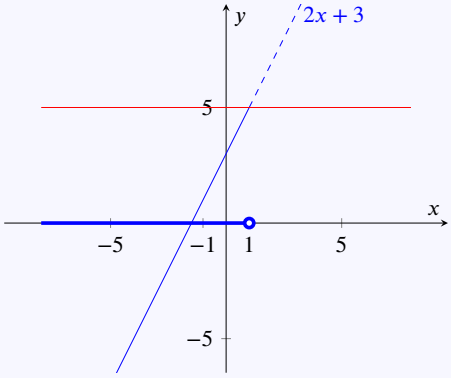
$$2x - 2 < 0$$

en dan het tekenverloop van de eerstegraadsfunctie $x \mapsto 2x - 2$ te gebruiken:

x		1	
$2x-2$	$-$	0	$+$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Ongelijkheden



2. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $-2x + 3 < 5$.

$$\begin{array}{rcll} -2x+3 & < & 5 & \\ & \Updownarrow & & (\ -3 \text{ optellen}) \\ -2x & < & 2 & \\ & \Updownarrow & & (\ \text{delen door } -2\text{, ongelijkheid omkeren}) \\ x & > & -1 & (x \text{ is groter dan } -1) \end{array}$$

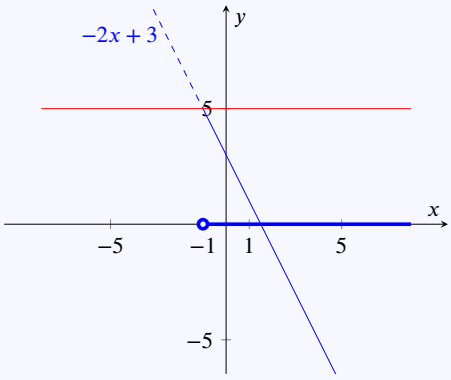
Dus is de oplossingsverzameling $V =]-1, +\infty[$.

Deze ongelijkheid kan ook opgelost worden door eerst bij beide leden -5 op te tellen

$$-2x - 2 < 0$$

en dan het tekenverloop van de eerstegraadsfunctie $x \mapsto -2x - 2$ te gebruiken:

x		-1	
$-2x-2$	$+$	0	$-$



Het oplossen van ongelijkheden met hogere graadsveeltermen kan door alle termen naar één lid te brengen en van de verkregen veelterm het tekenverloop op te stellen.

Ongelijkheden met veeltermbreuken

Net als bij rationale vergelijkingen stellen we eerst de bestaansvoorwaarde op.

Voorbeeld 2.4.4 (Oplossen van ongelijkheden)**.** Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\dfrac{x+4}{x-3} < 2$.

2.4 Ongelijkheden

We mogen *niet* zomaar linker- en rechterlid vermenigvuldigen met $x-3$, want we kennen het teken niet van $x-3$. We maken dus een *gevalsonderscheid*:

- Bestaansvoorwaarde: $x \neq 3$
- $x-3>0$: We vermenigvuldigen links en rechts met $x-3$. De ongelijkheid blijft behouden omdat $x-3$ positief is.

$$\begin{array}{rcll} x+4 & < & 2x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ -x \text{ optellen}) \\ 4 & < & x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ +6 \text{ optellen}) \\ 10 & < & x & (x \text{ is groter dan } 10) \end{array}$$

- $x-3<0$: We vermenigvuldigen links en rechts met $x-3$. De ongelijkheid keert om omdat $x-3$ negatief is.

$$\begin{array}{rcll} x+4 & > & 2x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ -x \text{ optellen}) \\ 4 & > & x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ +6 \text{ optellen}) \\ 10 & > & x & (x \text{ is kleiner dan } 10) \end{array}$$

Dus

- in het geval dat $x-3>0$ (of $x>3$), dan wordt de ongelijkheid $x>10$.
- in het geval dat $x-3<0$ (of $x<3$), dan wordt de ongelijkheid $x<10$. Dat is natuurlijk automatisch het geval: Als $x<3$ dan is ook $x<10$. Dus, als $x<3$ dan is automatisch $\dfrac{x+4}{x-3}<2$

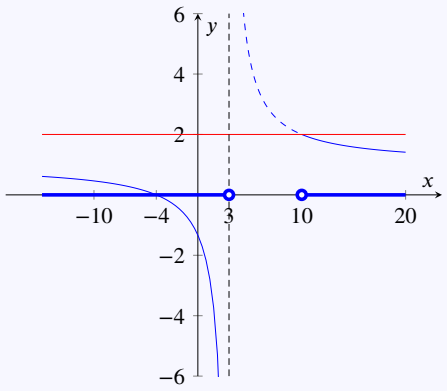
Samengevat: $\dfrac{x+4}{x-3}<2$ als $x<3$ of $x>10$.

Dus is de oplossingsverzameling is $V=]-\infty,3[\cup]10,+\infty[$.

Herinner je de notatie '$\cup$' om aan te duiden dat V de unie is van de twee halfrechten.

We kunnen dus ook zeggen: $\dfrac{x+4}{x-3}<2 \Leftrightarrow x\in]-\infty,3[\cup]10,+\infty[$.

Dit kunnen we ook zien op de grafiek van $\dfrac{x+4}{x-3}$:



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/18H.5)

2.4 Ongelijkheden

Deze ongelijkheid kan ook opgelost worden door eerst bij beide leden -2 op te tellen

$$\frac{x+4}{x-3} - 2 < 0$$

dan het linkerid op gelijke noemer te brengen

$$\frac{x+4-2(x-3)}{x-3} < 0$$

en dan het tekenverloop van de rationale functie $\frac{-x+10}{x-3}$ te onderzoeken.

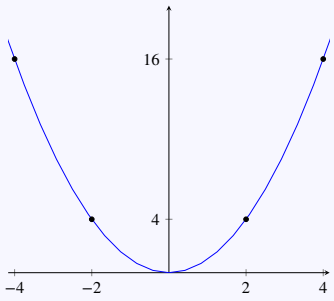
Bron: Schaum's outline series, Beginning Calculus, Second Edition, p.4

Functies toepassen op ongelijkheden

Zij $x, y \in \mathbb{R}$ en f een reële functie. We kunnen ons het volgende afvragen:

als $x < y$, kunnen we dan iets zinnigs zeggen over $f(x)$ en $f(y)$?

Voorbeeld 2.4.5. We onderzoeken bij wijze van voorbeeld het verband voor de functie $f(x) = x^2$.



Er geldt dan:

$2 < 4$	en	$2^2 < 4^2$
$-4 < -2$	en	$(-4)^2 > (-2)^2$
$-2 < 4$	en	$(-2)^2 < 4^2$
$-4 < 2$	en	$(-4)^2 > 2^2$
$-2 < 2$	en	$(-2)^2 = 2^2$

Als x en y beide positief zijn, wordt de orde behouden. Als x en y beide negatief zijn, draait de orde om. Als x en y een verschillend teken hebben, kunnen we niets zeggen over de relatie tussen x^2 en y^2: zowel $x^2 < y^2$, $x^2 > y^2$ als $x^2 = y^2$ zijn mogelijk. In dit geval mogen we dus niet kwadrateren.

We kunnen de verschillende gevallen samenvatten als:

Als $x, y \geq 0$ dan geldt: $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$.

Als $x, y \leq 0$ dan geldt: $x < y \Leftrightarrow x^2 > y^2$.

Als $x < 0 < y$ zijn zowel $x^2 \leq y^2$ als $x^2 \geq y^2$ mogelijk.

Dit voorbeeld toont aan dat je erg moet opletten bij het al dan niet behouden blijven van ongelijkheden.

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Ongelijkheden

Definitie 2.4.1. Zij f een reële functie op een interval $I \subset \mathbb{R}$. Dan geldt:

$$\begin{array}{rcl} f \text{ is strikt stijgend op } I & \iff & \text{voor alle } x, y \in I : (x < y \implies f(x) < f(y)) \\ f \text{ is strikt dalend op } I & \iff & \text{voor alle } x, y \in I : (x < y \implies f(x) > f(y)) \end{array}$$

Dus, als je *weet* dat een bepaalde functie stijgt (omdat je de grafiek kent), dan weet je ook dat $f(x) < f(y)$ van zodra $x < y$.

Voorbeeld 2.4.6.

1. De functie $f : x \mapsto 2x + 3$ is stijgend, en dus is $f(2) < f(4)$.
2. De functie $f : x \mapsto -2x + 3$ is dalend, en dus is $f(2) > f(4)$.
3. De functie $f : x \mapsto x^2$ is stijgend op het interval $[0, 10]$, en dus is $f(2) < f(4)$.
4. De functie $f : x \mapsto x^2$ is dalend op het interval $[-10, 0]$, en dus is $f(-4) > f(-2)$.
5. De functie $f : x \mapsto \sqrt{x}$ is stijgend op het interval $[0, +\infty[$ en dus is $f(2) < f(4)$.

Oefening 2.4.1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid

1. $2 < \sqrt{x} \iff x \in \ ]4, +\infty[$
2. $-2 < \sqrt{x} \iff x \in \ [0, +\infty[$
3. $2 < -\sqrt{x} \iff x \in$ geen oplossingen
4. $-2 < -\sqrt{x} \iff x \in \ [0, 4[$

Voorbeeld 2.4.7. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x-1} > 3$.

De uitdrukking onder het wortelteken moet positief zijn, anders heeft de opgave geen betekenis. Dit is de bestaansvoorwaarde:

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1\,.$$

We mogen kwadrateren omdat beide leden van de ongelijkheid positief zijn en de orde blijft bewaard. We krijgen dan $x - 1 > 9$.

Omdat $x - 1 > 9$ overeenstemt met $x > 10$, is aan de bestaansvoorwaarde $(x \geq 1)$ zeker voldaan.

De oplossingsverzameling is dus $V =]10, +\infty[$.

In volgende voorbeelden geven we enkel de methode, niet de gehele uitwerking.

Voorbeeld 2.4.8. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x+2} \leq x$.

Bestaansvoorwaarde: $x \geq -2$

- geval $x \geq 0$: kwadrateren mag en orde blijft bewaard
- geval $x < 0$: kwadrateren mag niet en hoeft ook niet, geen oplossing

Voorbeeld 2.4.9. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x+2} \geq x$.

Bestaansvoorwaarde: $x \geq -2$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Ongelijkheden

- geval $x \geq 0$: kwadrateren mag en orde blijft bewaard
- geval $x < 0$: kwadrateren mag niet en hoeft ook niet, ongelijkheid steeds voldaan

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Absolute waarde

Definitie 2.5.1 (Absolute waarde)**.**

Voor een reëel getal $a \in \mathbb{R}$ definiëren we de *absolute waarde* van a, genoteerd $|a|$, als

$$|a| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} a & \text{als} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{als} \quad a < 0. \end{cases}$$

Als a positief is, dan is $|a|$ gewoon a, maar als a negatief is, dan is $|a|$ het overeenkomende *positieve* getal $-a$. Dus, $|a|$ is altijd positief.

Voorbeeld 2.5.1 (Eenvoudige voorbeelden van absolute waarden)**.**

(a) $|5| = 5$ en $|-5| = 5$

(b) $|2 + (-1)| \neq |2| + |-1|$ (want $1 \neq 3$)

(c) $|(-3)^2| = |3^2| = 9 \quad (= |-3^2| = |-9|)$

(d) $|a^2 + 1| = a^2 + 1$, met $a \in \mathbb{R}$

(e) $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$

(f) $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$

(g) $|2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$

(h) $|\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$

Oefening 2.5.1. Bereken (zonder rekenmachine) volgende absolute waarden.

1. $|2 - 9| = \ldots\ldots$

2. $|-2 - (-6)| = \ldots\ldots$

3. $\left|\frac{11}{10} - \frac{51}{10}\right| = \ldots\ldots$

4. $|\pi - 3\pi| = \ldots\ldots$

Volgende eigenschappen volgen eenvoudig uit de definitie:

Eigenschap 2.5.1. Als $x, y, z \in \mathbb{R}$, dan is

(a) $|x| \geq 0$

(b) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

(c) $|-x| = |x|$

(d) $|x|^2 = x^2 = |x^2|$ $\qquad (= |-x^2| = |(-x)^2|)$

(e) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ (absolute waarde van product is product van absolute waarden)

(f) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ met $y \neq 0$ (absolute waarde van quotiënt is quotiënt van absolute waarden)

Waarschuwing 2.5.1 (Veelgemaakte fouten)**.**

(a) $|-a| = |a|$, maar ZEER ZEKER NIET ~~$|-a| = a$~~
$|-a| = a$ is FOUT als $a < 0$: als $a = -7$, dan is $|-a| = |-(-7)| \neq -7 = a$

(b) De absolute waarde van een som is niet steeds de som van de absolute waardes:

~~$|x + y| = |x| + |y|$~~

$$|2 + 3| = |2| + |3| = 2 + 3 = 5$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Absolute waarde

maar

$$|2+(-3)| = |-1| = 1 \quad \text{terwijl} \quad |2|+|-3| = 2+3 = 5$$

(c) De wortel van het kwadraat van een reëel getal is niet steeds gelijk aan dat reëel getal.

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{maar} \quad \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$$

Algemeen geldt

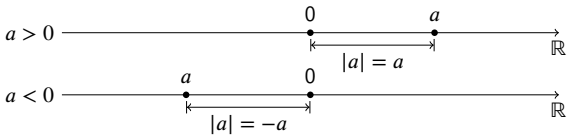
- voor $a \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt{a^2} = a$
- voor $a \in \mathbb{R}^-$: $\sqrt{a^2} = -a$

Dit kunnen we samenvatten als $\sqrt{a^2} = |a|$ voor elke reële a.

Oefening 2.5.2. Schrijf met een absolute waarde

1. $\sqrt{(x-4)^2} = \ldots\ldots$
2. $\sqrt{(-2x)^2} = \ldots\ldots$

Bij de voorstelling van a op de reële rechte $\mathbb{R}$ is $|a|$ gelijk aan de afstand van het punt a tot de oorsprong:

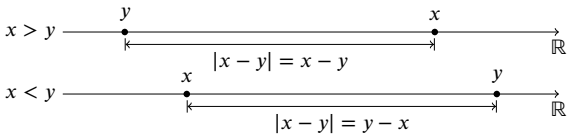


Deze eenvoudige opmerking leidt onmiddellijk tot volgend belangrijk inzicht:

Eigenschap 2.5.2. Zij $x, y \in \mathbb{R}$. Dan geldt (op de reële rechte $\mathbb{R}$)

$|x-y|$ is de afstand tussen x en y.

In het bijzonder is $|x|$ de afstand van x tot de oorsprong.



Opmerking 2.5.1.

Uit $|x+y| = |x-(-y)|$ volgt dat $|x+y|$ gelijk is aan de afstand tussen x en $-y$.

Oefening 2.5.3.

1. De afstand van x tot 7 is $|x-7|$
2. De afstand van x tot -3 is $|x+3|$

CC BY-NC-SA 4.0