KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Xoverzicht: Intro's Zomercursus

(Versie 2026/10/26.2)

Inhoudsopgave

1.1 Intro algebraïsch rekenen

Franse literatuur is enkel genietbaar als je de basisregels van de Franse taal voldoende beheerst.
Autorijden is enkel veilig en aangenaam als je niet meer moet nadenken over rijtechnieken.
Wiskunde is enkel aangenaam en nuttig als je de basistechnieken voldoende beheerst.

In de volgende pagina's worden daarom een aantal *basisrekentechnieken* herhaald.

De nadruk ligt daarbij op het *symbolisch rekenen*. Rekenen werkt inderdaad niet alleen met getallen, bijvoorbeeld $(3+2)^2 = 25$, maar ook met letters: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Dat inzicht dateert uit de renaissance, en heeft een enorme vooruitgang mogelijk gemaakt in het wetenschappelijk denken.

We behandelen het uitwerken van haakjes, het buiten haakjes brengen van factoren en het ontbinden in factoren. Verder wordt het rekenen met breuken herhaald, en de rekenregels voor machten met reële exponenten.

Een aantal van de oefeningen zijn eerder eenvoudig. Bovendien is het meestal duidelijk dat de rekenregels uit de vorige paragraaf moeten worden toegepast. In de praktijk moet je natuurlijk ook leren om zelf te weten wanneer je welke regel op nuttige wijze kan en mag toepassen. Je zou daar zelfs niet te lang over mogen nadenken. Je bent pas vaardig in wiskunde als je deze technieken bijna automatisch, zonder veel nadenken, kan toepassen. Net zoals je pas kan autorijden als je quasi automatisch, zonder nadenken kan schakelen. En net zoals je pas Franse teksten kan lezen als je niet steeds moet nadenken over de betekenis van woorden en zinsconstructies.

Wie deze rekenregels al voldoende vlot kan gebruiken mag dit deel uiteraard overslaan.

De leerstof over elementaire rekentechnieken is als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) Rekenen met **haakjes** (met ontbinden in factoren)

(3) Rekenen met **breuken**

(4) Rekenen met **machten**

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Intro veeltermen

Een interessante eerste stap in de verkenning van de Wondere Wereld van de Wiskunde is een kennismaking met zogenaamde *veeltermen*. Veeltermen zijn ideaal om te leren *rekenen met letters*. Om historische redenen spreken we meestal over 'veeltermen in x', dat zijn combinaties van machten van de letter x. Voorbeelden zijn

$$2x+3$$
$$x^2+6x+9$$
$$1492x^{42}+1302x^2+1830$$

Veeltermen worden gebruikt bij

- *functies*: $x \mapsto 2x+6$ is een *eerstegraadsfunctie*, $x \mapsto x^2-4$ is een *kwadratische functie*
- *oplossen van vergelijkingen*: $2x+6=0$ enkel als $x=-3$, en $x^2-4=0$ enkel als $x=\pm 2$
- *meetkunde*: $y=2x+6$ is de vergelijking van een *rechte* en $y=x^2-4$ is de vergelijking van een *parabool*
- *rekenen*: $(x-2)(x+2)=x^2-4$. We zeggen dat de veelterm x^2-4 een *veelvoud* is van de veelterm $x-2$, en dat de veelterm $x-2$ dus een deler is van x^2-4. De veelterm $x+2$ is het quotiënt van x^2-4 en $x-2$. We schrijven voor veeltermen dat $x+2=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, net zoals we voor getallen schrijven dat $6=\dfrac{12}{2}$.

Bij elk van bovenstaande topics vormen de veeltermen een eenvoudig en typisch onderdeel van een veel ruimer studiegebied. We zullen verder inderdaad veel algemenere functies, vergelijkingen en meetkundige objecten bestuderen. De veeltermen – in het bijzonder de veeltermen van de eerste en de tweede graad – vormen telkens een interessante eerste kennismaking.

In wat volgt hebben we de leerstof over veeltermen als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding

(2) Eigenschappen van veeltermen van de eerste graad

(3) Eigenschappen van veeltermen van de tweede graad

(4) Een algemene definitie van veeltermen

(5) Eigenschappen van de deling van veeltermen

(6) Het algoritme voor de Euclidische deling van veeltermen

(7) Een belangrijk speciaal geval van deling door lineaire factoren

(8) Het algoritme van Horner voor veeltermen

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Intro ongelijkheden en absolute waarde

Iedereen kent allicht de begrippen 'absolute waarde' ($|-2| = 2$) en ongelijkheden ($2 \leq 3$). Maar beide begrippen zijn subtieler en gevaarlijker dan op het eerste zicht blijkt. Bij het bepalen van oplossingsverzamelingen van ongelijkheden worden regelmatig foutieve rekenregels gebruikt. Dat leidt tot negatieve afstanden, ontploffende chemische reacties, failliete bedrijven, en soms zelfs tot herexamens. Besteed er dus voldoende aandacht aan.

In wat volgt hebben we de leerstof over ongelijkheden als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding

(2) Aandachtspunten over gelijkheden, met o.a. kwadrateringsvoorwaarden

(3) Eigenschappen van ongelijkheden

(4) Het tekenverloop van rationale functies

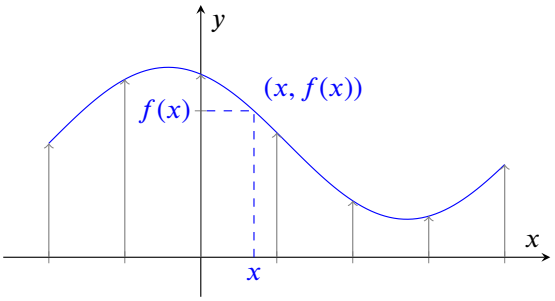
(5) Eigenschappen van absolute waarde

(6) Een overzicht van zogenaamde driehoeksongelijkheden

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Intro functies en hun grafieken

Het begrip *functie* is erg belangrijk in de wiskunde. Met een functie beschrijven we op een wiskundige manier het *verband* tussen verschillende dingen. Bij een vierkant is er een duidelijk *verband* tussen de lengte van een zijde en de oppervlakte. Als de zijde lengte ℓ heeft, dan ligt de oppervlakte onherroepelijk vast: die is dan ℓ^2. Als één knikker a gram weegt, dan ligt het gewicht van een doos met x knikkers onherroepelijk vast: dat is dan $a \cdot x + b$ gram (waarbij b het gewicht is van de doos, en x niet groter dan de hoeveelheid knikkers die in de doos past).



We bespreken enkele basiseigenschappen van reële functies: *rekenen met functies* en *functies tekenen*. We kunnen ze zelfs samenstellen. Met functies en hun basiseigenschappen kunnen erg veel wetenschappelijke problemen correct worden geformuleerd, bestudeerd, en in gunstige gevallen ook worden opgelost. De basiseigenschappen worden later uitgebreid met meer geavanceerde technieken zoals afgeleiden en integralen.

In wat volgt hebben we de leerstof over functies als volgt opgebouwd:

(1) Een inleiding over en definitie van functies.

(2) Een overzicht van een aantal manieren om functies voor te stellen: tabel, pijlenvoorstelling, grafieken of functievoorschriften (i.e. formules).

(3) Een kort maar belangrijk stukje over grafieken van reële functies.

(4) Twee deeltjes over de som en verschil van functies, en over hun product en quotiënt.

(5) Een belangrijke inleiding tot het samenstellen van functies.

(6) Het effect van sommige functies kan worden 'ongedaan gemaakt' door hun inverse functie.

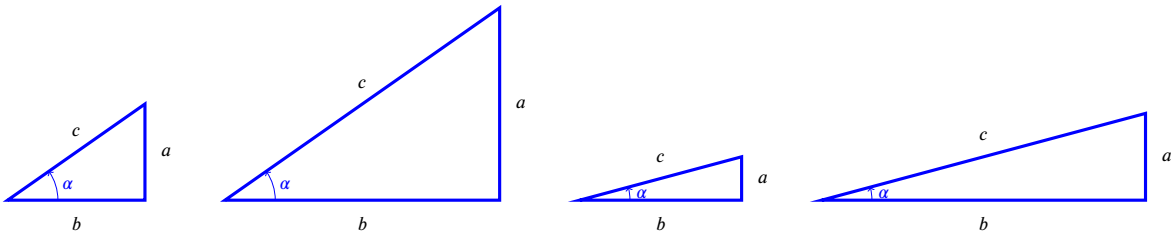
CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Intro goniometrie

Goniometrie is het deel van de wiskunde dat zich bezighoudt met de studie van *hoeken*: *gonio* komt van het Grieks voor hoek, je vindt het ook terug in poly*goon* voor veelhoek. Soms maakt men een klein onderscheid met *driehoeksmeting* (of *tri*gonometrie) als men meer specifiek *drie*hoeken bestudeert.

De belangrijkste begrippen zijn daarbij sinus, cosinus en tangens, maar ook complementaire en supplementaire hoeken, boogsinussen en boogcosinussen.

De *verhouding* tussen de lengte a van de overstaande zijde en de lengte c van de schuine zijde hangt enkel af van de hoek α. Die verhouding is de *sinus* van de hoek α: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.



De goniometrie is de trotse eigenaar van een belangrijk gevolg van de welbekende stelling van Pythagoras:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Een minder aangenaam kenmerk van de goniometrie is dat er nog *erg veel andere formules* zijn.

Je kan machten enerzijds zuiver algebraïsch bestuderen (dat betekent: de formele *rekenregels* bestuderen), maar ook analytisch (dat betekent hier: ze als reële *functies* beschouwen, met grafieken, nulpunten en dergelijke). Hetzelfde geldt voor de sinus, cosinus en tangens: we krijgen nieuwe inzichten door ze ook als *functies* te beschouwen. We kunnen die functies zelfs (deels) inverteren: de inversen zijn de zogenaamde *cyclometrische* functies boogsinus, boogcosinus en boogtangens.

In wat volgt hebben we de leerstof over goniometrie als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) De definitie van de goniometrische cirkel, sinus, cosinus en tangens.

(3) De verbanden met verwante hoeken (tegengesteld, complementair, supplementair).

(4) Een kort overzicht van een aantal goniometrische formules (enkel als referentie).

(5) De sinus, cosinus en tangens als goniometrische functies.

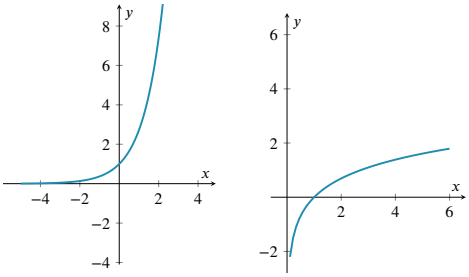
(6) De cyclometrische functies: de inversen van sinus, cosinus en tangens.

CC BY-NC-SA 4.0

1.6 Intro exponentiële en logaritmische functies

In alle wetenschappen worden fenomenen bestudeerd die exponentiële of logaritmische kenmerken hebben. Het meest gekend is de zogenaamde *exponentiële groei*. Deze uitdrukking betekent informeel meestal 'erg sterke groei', en wordt dan dikwijls tegenover de eerder gematigde 'lineaire groei' gesteld.

Het concept *exponentieel* slaat op een zekere veralgemening van het *machtsverheffen*. De machtsfuncties $x^2, x^3, x^4, \ldots$ bekomen we door een getal x telkens een extra keer te vermenigvuldigen met zichzelf. Er is een machtsfunctie voor *elke positieve exponent*, het grondtal varieert. Bij de *exponentiële functie* kiezen we het grondtal vast, en laten de exponent variëren: we bestuderen de functies $2^x, 3^x, 4^x, \ldots$. Er is dus een exponentiële functie voor *elk positief grondtal*.



Het tweede belangrijke concept dat we hier invoeren is de *logaritme*. De logaritme geeft de **grootte-orde** van iets. Voor een macht van 10 betekent dat het aantal cijfers, of nauwkeuriger het aantal nullen. De logaritme van 10 is per definitie gelijk is aan 1 (want er is één nul). De logaritme van 100 is 2, die van 1000 is 3, en die van 10^{42} is 42. Dit soort logaritme wordt de *tiendelige logaritme* of 10-logaritme genoemd en is erg populair bij bijvoorbeeld economen, maar ook bij fysici, chemici en biologen. Informatici daarentegen begrijpen de wereld dikwijls binair, en ze tellen liever in machten van 2: de 2-logaritme van 2 is per definitie 1, die van $4 = 2^2$ is 2, die van $16 = 2^4$ is 4, die van $64 = 2^8$ is 8, en die van 2^{1024} is 1024. Wiskundigen – en alle andere wetenschappers als ze wiskunde aan het gebruiken zijn – vinden het bijzonder aangenaam om de grootte-ordes te berekenen in termen van het getal $e = 2.71\ldots$. Dat lijkt een wat *gekke* keuze, maar wie al afgeleiden heeft gestudeerd weet zeker ook waarom het een bijzonder *slimme* keuze is.

Je kan het begrip logaritme invoeren door te vertrekken van een exponentiële functie a^x, en gebruik te maken van het begrip *inverse functie*: de logaritme $log_a x$ is per definitie de inverse functie van de exponentiële functie a^x. Wij hebben hier gekozen voor een tweede mogelijkheid, die meer elementair is en enkel de rekenregels voor het machtsverheffen gebruikt.

In wat volgt hebben we de leerstof over exponentiële en logaritmische functies als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) De definitie van de logaritme van een getal

(3) Enkele rekenregels voor logaritmen

(4) Enkele voorbeelden van groeimodellen

(5) De definitie en basiseigenschappen van exponentiële functies

(6) De definitie en basiseigenschappen van logaritmische functies

(7) Een korte inleiding tot exponentiële vergelijkingen

CC BY-NC-SA 4.0

1.7 Intro afgeleiden

Het begrip *afgeleide* komt frequent voor in allerlei wetenschappelijke en andere contexten. De techniek van afgeleiden laat toe om erg precies, erg efficiënt en in erg uiteenlopende situaties *veranderingen* te bestuderen.

Vele fenomenen zoals bewegingen, temperatuursverlopen, productievolumes, epidemies en hoogteprofielen van wielerwedstrijden kunnen beschreven worden als functies. *Afgeleiden* zeggen dan iets over de *veranderingen van de functiewaarden*. Hoe *verandert* de temperatuur, het geproduceerde volume, het aantal besmette personen als de tijd, de prijs of de sociale contacten veranderen? In vele contexten is de *waarde* van de functie zelfs minder belangrijk dan de *verandering van de waarde*. Een renner die een berg oprijdt, hecht op cruciale momenten in de wedstrijd meer belang aan de *verandering van de hoogte*, dat is de steilheid van de berg, dan aan de *absolute hoogte* op dat punt. De winst die iemand behaalt bij een belegging in aandelen hangt niet zozeer af van de *waarde* van de aandelen op een bepaald ogenblik, maar van de *verandering van die waarde* tussen de aankoop en de verkoop.

In deze context begrijpen we functies dikwijls als een verband tussen een 'onafhankelijke' variabele (de tijd, de prijs, de lockdown maatregelen) en de 'afhankelijke' variabele (de temperatuur, de hoeveelheid geproduceerde producten of het aantal besmette personen). In wiskundige taal noemen we de onafhankelijke variabele typisch x (maar soms ook t als het over tijd gaat, of s, of andere letters) en de afhankelijke grootheid is dan een functie die we typisch f noemen (maar soms ook T als het over temperatuur gaat, of v en a als het snelheden en versnellingen zijn). Als we de afhankelijke grootheid ook als 'variabele' willen weergeven, gebruiken we dikwijls de letter y en schrijven we $y = f(x)$, of soms ook $y(x)$, om aan te duiden dat de grootheid y afhangt van x.

Afgeleiden geven informatie over de *verhouding* tussen *de verandering van de afhankelijke variabele* ten opzichte van *de verandering van de onafhankelijke variabele*. Als je de onafhankelijke variabele varieert, wat gebeurt er dan met de afhankelijke variabele? Stijgt die, of daalt die, en hoe snel of hoe traag gebeurt dat? Je kan hetzelfde ook begrijpen in termen van *gevoeligheid*: hoe gevoelig is de afhankelijke variabele aan een wijziging in de onafhankelijke variabele?

Een aangename manier om vertrouwd te raken met de betekenis van afgeleiden (en integralen), is het met aandacht bekijken van de geniale videos van 3Blue1Brown:

YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=WUvTyaaNkzM

In wat volgt hebben we de leerstof over afgeleiden als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) Enkele voorbeelden en een wiskundige definitie

(3) Een kleine uitweiding over het begrip differentiaal

(4) Enkele basisregels over het berekenen van afgeleiden

(5) De afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies

(6) De afgeleiden van goniometrische en cyclometrische functies

(7) Regels voor producten en quotiënten van functies

(8) Regels voor samenstellingen van functies

(9) Hogere orde afgeleiden

(10) Afgeleide van inverse van een functie

(11) De regel van l' Hôpital om limieten te berekenen

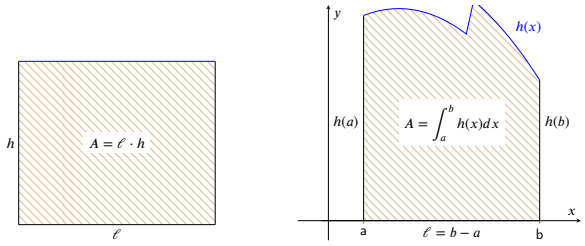
(12) Als toepassing het oplossen van minimum-maximum problemen

CC BY-NC-SA 4.0

1.8 Intro integralen

Het rekenen met *integralen* is absoluut fundamenteel in vele wetenschappen. De uitvinding van de integraalrekening in de zeventiende eeuw heeft mee de basis gelegd van de wetenschappelijke en industriële revolutie die het leven op aarde de voorbije drie eeuwen enorm heeft veranderd. Het is niet overdreven te stellen dat zonder integralen mechanica, relativiteitstheorie, chemie, economie, Google, Facebook en Twitter allemaal ondenkbaar zouden zijn. U heeft het enorme voorrecht er zo dadelijk mee kennis te maken. Voor sommigen is dat herhaling, maar voor anderen is dit een volledig nieuw concept.

In zijn meest eenvoudige vorm is de integraalrekening een directe veralgemening van de formule voor de *oppervlakte van een rechthoek*. Iedereen weet dat een rechthoek met lengte ℓ en hoogte h een oppervlakte heeft gelijk aan $\ell \cdot h$. De integraalrekenig laat toe om de oppervlakte te berekenen van 'rechthoeken met een variërende hoogte':



Integralen laten dus toe de oppervlakte te berekenen van rechthoeken met een tamelijk willekeurige bovenkant. Wat wiskundiger uitgedrukt: integralen berekenen de oppervlakte onder de grafiek van een functie. Dit soort integralen (die een getal opleveren: namelijk de oppervlakte tussen twee grenzen onder een kromme) noemen we *bepaalde integralen*.

Wij hebben er hier echter voor gekozen om het integraalbegrip op een andere manier in te voeren: we zullen *integreren* in eerste instantie bekijken als de omgekeerde bewerking van *afleiden* (of differentiëren, dat is hetzelfde). Dat is wat abstracter en minder motiverend dan oppervlaktes berekenen, maar het levert onmiddellijk krachtige rekenmethodes op.

Het praktische nut van dat omkeren-van-differentiëren blijkt uit de prachtige Hoofdstelling van de integraalrekening die zegt dat de *bepaalde integraal* (die *interessant* is: het is een oppervlakte of meer algemeen een product-met-een-verandererende-grootheid) kan *berekend* worden door een *onbepaalde integraal* (die saai is – een wat abstract omgekeerde van differentiëren – maar wel *berekenbaar* is!).

De twee begrippen samen laten spectaculaire berekeningen toe: de afgelegde weg bij variërende snelheden, de winst bij variërende verkoopprijzen, het aantal corona-slachtoffers bij variërende omstandigheden.

In wat volgt hebben we de leerstof over integralen als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) De definitie van de onbepaalde integraal

(3) Enkele basisintegralen

(4) De krachtige substitutieregel als omkering van de kettingregel van afgeleiden.

(5) De bijna even krachtige partiële integratie als omkering van de productregel van afgeleiden.

(6) Enkele specifieke rekenregels voor goniometrische integralen.

(7) Definitie en toepassingen van bepaalde integralen.

CC BY-NC-SA 4.0