KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Xoverzicht: ongelijkheden

(Versie 2026/10/26.59)

Inhoudsopgave

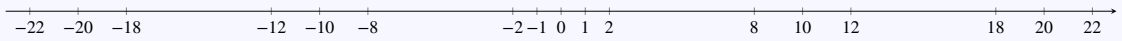
1.1 Ongelijkheden

Een belangrijke eigenschap van reële getallen is dat we ze kunnen *ordenen*: voor twee getallen $x, y \in \mathbb{R}$ geldt altijd $x \leq y$ of $y \leq x$. We kunnen dus niet alleen ver*gelijk*ingen bestuderen en oplossen (bijvoorbeeld $x^2 + 2x + 1 = 0$), maar ook zogenaamde on*gelijk*heden. Daarbij zoeken we niet naar de waarden van een onbekende die een *gelijkheid* oplost, maar naar de waarden van een onbekende die een *ongelijkheid* oplost (bijvoorbeeld $x^2 > 2x - 1$ of $\sin(x) \geq 0.5$). Dat is in het algemeen *moeilijker* dan het oplossen van vergelijkingen, onder meer omwille van de extra complicatie dat twee leden van een ongelijkheid vermenigvuldigen met een *negatief* getal de ongelijkheid *omdraait*:

Eigenschap 1.1.1 (Basiseigenschappen ongelijkheden)**.** Voor elke $x, y, r \in \mathbb{R}$ geldt

	$x < y$	$\iff$	$x + r < y + r$		(plus getal)
als $0 < r$,	$x < y$	$\implies$	$r \cdot x < r \cdot y$		(maal positief getal)
als $r < 0$,	$x < y$	$\implies$	$r \cdot x > r \cdot y$	(of $r \cdot y < r \cdot x$)	(maal negatief getal)

Voorbeeld 1.1.1. We hebben $10 < 20$, en dus ook $10 + 2 < 20 + 2$, $10 - 2 < 20 - 2$ en $2 \cdot 10 < 2 \cdot 20$, maar $(-2) \cdot 10 > (-2) \cdot 20$. Ook is $1 < 2$, maar $-1 > -2$. Deze ongelijkheden zie je ook op de getallenrechte:



Opmerking 1.1.1.

- Ongelijkheden kunnen aan elkaar worden gekoppeld:

  $$a < b < c \iff a < b \text{ en } b < c.$$

  Merk op dat uit beide uitdrukkingen telkens ook volgt dat $a < c$.

- Uitdrukkingen van de vorm $a < b > c$ worden *nooit* gebruikt: je schrijft bv. $a < b$ en $c < b$, of korter $a, c < b$.

- Uit $x < y \iff x + r < y + r$ voor alle x, y, r volgt onmiddellijk dat

  $$a + c < b \iff a < b - c.$$

  Dit is een term naar het andere lid brengen (kies $x = a + c, y = b$ en $r = -c$). Ook volgt dat

  $$a < b \iff a - b < 0.$$

  Inderdaad: kies $x = a, y = b, r = -y$.

- Uit $x < y \implies r \cdot x < r \cdot y$ voor strikt positieve r volgt op gelijkaardige manier:

  $$a < b \cdot c \implies \frac{a}{b} < c \quad \text{als } b > 0$$

  en

  $$a < b \implies \frac{a}{b} < 1 \quad \text{als } b > 0.$$

  Het is dus belangrijk dat de factor die je van lid verandert *positief* is. Als dat niet het geval is, draait de ongelijkheid om.

Met deze notatie en de basiseigenschappen van de ongelijkheden kunnen we de oplossingsverzameling zoeken van ongelijkheden, namelijk de verzameling alle getallen die voldoen aan de ongelijkheid.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Ongelijkheden met veeltermen

Ongelijkheden waarbij enkel machten van de onbekende voorkomen worden opgelost door een tekentabel (of functieverloop) op te stellen van een veeltermfunctie:

Algoritme 1.2.1. Een ongelijkheid met (enkel) veeltermen los je op als volgt:

(a) breng alle termen **naar dezelfde kant** van het ongelijkheidsteken (daar staat dan een *veelterm*).
(b) bepaal de **nulpunten** (want enkel daar kan de veelterm eventueel van teken veranderen!)
(c) stel een **tekentabel** op voor deze veelterm
(d) bepaal in die tekentabel de zones voor de gevraagde ongelijkheid ($>0, \geq 0, <0, \leq 0$).

Al deze zones samen vormen de gevraagde oplossingsverzameling voor de ongelijkheid.

Algoritme 1.2.2. Een **tekentabel** van een veelterm stel je op als volgt:

(a) plaats de nulpunten van klein naar groot in de eerste rij van een tabel, met telkens één vrije plaats tussen de nulpunten, en plaats in de tweede rij onder elk nulpunt het cijfer 0.
(b) neem een willekeurige waarde in elke zone (d.i. tussen elke twee opeenvolgende nulpunten), en bepaal het teken van de veelterm in dat punt (door invullen en uitrekenen).
(c) zet in de tweede rij een $+$ in de zone(s) waar je een positieve waarde uitkomt en een $-$ waar je een negatieve waarde uitkomt (in de tweede rij).

Een voorbeeld van een tekentabel ziet er dus als volgt uit (met $-3, 1$ en 4 de nulpunten):

x		-3		1		4	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Opmerking 1.2.1. Je kan een tekentabel ook opbouwen *in stappen* door een rij te maken voor elke factor apart. Een tekentabel voor $(x-1)(x-4)(x-7)$ wordt dan opgesteld als:

x		1		4		7	
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)(x-4)(x-7)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

waarbij je voor de laatste rij gebruik maakt van de tekenregels voor de vermenigvuldiging.

Merk op dat voor enkelvoudige nulpunten het teken steeds verandert als je een nulpunt passeert. De veelterm $(x-2)^2(x-4)$ heeft echter een nulpunt met multipliciteit 2, en daar verandert het teken *niet*:

x		2		4	
$(x-2)^2(x-4)$	$-$	0	$-$	0	$+$

We illustreren de methode voor de eerste graad, de tweede graad en ten slotte ook voor hogere graad.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.59)

1.2 Ongelijkheden met veeltermen

Voorbeeld 1.2.1 (eerste graad)**.** Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $2x + 3 < 5$.

Een eerstegraadsongelijkheid kan onmiddellijk worden opgelost als volgt:

$$\begin{array}{rcll} 2x+3 & < & 5 & \\ & \Updownarrow & & (\ -3 \text{ optellen }) \\ 2x & < & 2 & \\ & \Updownarrow & & (\text{ delen door } 2\ ) \\ x & < & 1 & (\ x \text{ is kleiner dan } 1\ ) \end{array}$$

Dus is de oplossingsverzameling $V =]-\infty, 1\,[$.

Indien je toch de algemene methode wil volgen, doorloopt het algoritme de volgende stappen:

(a) Tel eerst bij beide leden -5 op, zodat in de expressie $2x - 2 < 0$ alles aan één kant staat.

(b) Bereken het nulpunt van de eerstegraadsfunctie $x \mapsto 2x - 2$. Het nulpunt is $x = 1$.

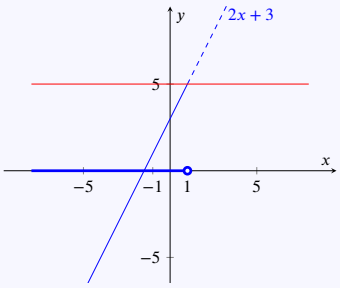
(c) Stel vervolgens de tekentabel op:

x		1	
$2x-2$	$\underbrace{-}_{<0}$	0	$+$

(d) Uit deze tekentabel lees je af voor welke waarden $2x - 2 < 0$, nl. voor x strikt kleiner dan 1.

(e) De oplossingsverzameling is dus $]-\infty, 1\,[$.

Een grafische voorstelling maakt dit ook duidelijk.



Voorbeeld 1.2.2. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan: $x^2 + 4x > -3$

(a) Breng eerst alle termen naar het linkerlid: $x^2 + 4x + 3 > 0$

(b) Bepaal de nulpunten via de discriminant: $D = 4$, en $x_1 = -1$ en $x_2 = -3$ zijn de nulpunten.

(c) Stel een tekentabel op voor deze veelterm

x		-3		-1	
x^2+4x+3	$\underbrace{+}_{>0}$	0	$-$	0	$\underbrace{+}_{>0}$

(d) Lees uit deze tabel af dat $x^2 + 4x + 3 > 0$ als x strikt kleiner is dan -3 of strikt groter is dan -1.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Ongelijkheden met veeltermen

(e) De oplossingsverzameling is dus $]-\infty,-3[\cup]-1,+\infty[$.

Voorbeeld 1.2.3. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan: $4x^2+3x+1<0$

(a) De termen staan reeds op de goede plaats in het linkerlid.

(b) Bepaal de nulpunten via de discriminant: $D = 3^2-4\cdot 4\cdot 1 = -7$, er zijn dus geen nulpunten.

(c) Tekentabel opstellen geeft:

x	
$4x^2+3x+1$	$+$

(d) De veelterm $4x^2+3x+1$ is nergens kleiner dan 0.

(e) Er zijn geen oplossingen voor de ongelijkheid.

Voorbeeld 1.2.4. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan: $8x^4+6x^3-15x^2>16x+3$

Een veeltermongelijkheid met graad hoger dan twee wordt op gelijkaardige manier opgelost als een tweedegraadsongelijkheid. Het bepalen van de nulpunten is moeilijker. Bij een veelterm met gehele coëfficiënten probeer je de delers van de constante term, en daarna eventueel de regel van Horner.

(a) $8x^4+6x^3-15x^2-16x-3>0$

(b) $8x^4+6x^3-15x^2-16x-3=0 \overset{\text{Horner}}{\Leftrightarrow} (x+1)^2(8x^2-10x-3)=0.$

Bepaal vervolgens de nulpunten van elke factor in deze ontbinding.

$$(x+1)^2=0 \text{ als } x=-1$$

en

$$8x^2-10x-3=0 \overset{D=196}{\Leftrightarrow} x_{1,2}=\frac{10\pm 14}{16}=-\frac{1}{4} \text{ of } \frac{3}{2}.$$

(c) Stel een tekentabel op voor deze veelterm:

x		-1		$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$	
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$8x^2-10x-3$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$8x^4+6x^3-15x^2-16x-3$	$\underbrace{+}_{>0}$	0	$\underbrace{+}_{>0}$	0	$-$	0	$\underbrace{+}_{>0}$

(d) $8x^4+6x^3-15x^2-16x-3>0$ als x strikt kleiner is dan $-\frac{1}{4}$ maar verschilt van -1, of strikt groter dan $\frac{3}{2}$.

(e) De oplossingenverzameling is $]-\infty,-1[\cup\left]-1,-\frac{1}{4}\right[\cup\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$.

CC BY-NC-SA 4.0

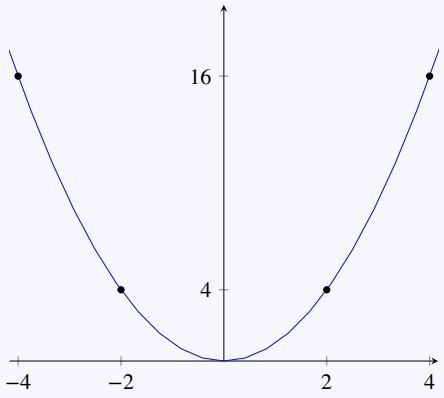
1.3 Monotone functies en ongelijkheden

Zij $x, y \in \mathbb{R}$ en f een reële functie. We kunnen ons het volgende afvragen:

als $x < y$, kunnen we dan iets zinnigs zeggen over $f(x)$ en $f(y)$?

In De Ideale Wereld zouden we kunnen hopen dat $x < y$ impliceert dat ook $f(x) < f(y)$, maar de Wereld is niet Ideaal.

Voorbeeld 1.3.1. We onderzoeken bij wijze van voorbeeld het verband voor de functie $f(x) = x^2$.



Er geldt dan:

$$\begin{array}{rcl} 2 < 4 & \text{en} & 2^2 < 4^2 \\ -4 < -2 & \text{en} & (-4)^2 > (-2)^2 \\ -2 < 4 & \text{en} & (-2)^2 < 4^2 \\ -4 < 2 & \text{en} & (-4)^2 > 2^2 \\ -2 < 2 & \text{en} & (-2)^2 = 2^2 \end{array}$$

Als x en y beide positief zijn, wordt de orde behouden. Als x en y beide negatief zijn, draait de orde om. Als x en y een verschillend teken hebben, kunnen we niets zeggen over de relatie tussen x^2 en y^2: zowel $x^2 < y^2$, $x^2 > y^2$ als $x^2 = y^2$ zijn mogelijk. In dit geval mogen we dus niet kwadrateren.

We kunnen de verschillende gevallen samenvatten als:

Als $x, y \geq 0$ dan geldt: $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$.

Als $x, y \leq 0$ dan geldt: $x < y \Leftrightarrow x^2 > y^2$.

Als $x < 0 < y$ zijn zowel $x^2 \leq y^2$ als $x^2 \geq y^2$ mogelijk.

Dit voorbeeld toont aan dat je erg moet opletten bij het al dan niet behouden blijven van ongelijkheden.

Definitie 1.3.1. Zij f een reële functie op een interval $I \subset \mathbb{R}$. Dan geldt:

$$\begin{array}{rcl} f \text{ is strikt stijgend op } I & \Longleftrightarrow & \text{voor alle } x, y \in I : (x < y \implies f(x) < f(y)) \\ f \text{ is strikt dalend op } I & \Longleftrightarrow & \text{voor alle } x, y \in I : (x < y \implies f(x) > f(y)) \end{array}$$

Dus, als je *weet* dat een bepaalde functie stijgt (omdat je de grafiek kent), dan weet je ook dat $f(x) < f(y)$ van zodra $x < y$.

Voorbeeld 1.3.2.

1. De functie $f : x \mapsto 2x + 3$ is stijgend, en dus is $f(2) < f(4)$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Monotone functies en ongelijkheden

2. De functie $f : x \mapsto -2x + 3$ is dalend, en dus is $f(2) > f(4)$.

3. De functie $f : x \mapsto x^2$ is stijgend op het interval $[0, 10]$, en dus is $f(2) < f(4)$.

4. De functie $f : x \mapsto x^2$ is dalend op het interval $[-10, 0]$, en dus is $f(-4) > f(-2)$.

5. De functie $f : x \mapsto \sqrt{x}$ is stijgend op het interval $[0, +\infty[$ en dus is $f(2) < f(4)$.

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Gelijkheden

Als voorbereiding op het bestuderen van ongelijkheden verdiepen we ons eerst even in het eenvoudigere geval van vergelijkingen. We onderzoeken meer bepaald een specifiek type probleem dat kan optreden bij het oplossen van sommige vergelijkingen en ongelijkheden: het introduceren van 'valse oplossingen'.

Voorbeeld 2.1.1. Beschouw de vergelijking

$$\sqrt{x+2} = x.$$

Het is niet onmiddellijk duidelijk hoe we deze vergelijking met een vierkantswortel kunnen oplossen. Een mogelijkheid is om *de vergelijking te kwadrateren*: als we beide leden van de vergelijking kwadrateren dan verdwijnt de vierkantswortel:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x+2}\right)^2 &= x^2 \\ \Leftrightarrow\ x+2 &= x^2,\end{aligned}$$

en dit is een tweedegraadsvergelijking $x^2 - x - 2 = 0$, waarvan je kan berekenen dat de oplossingen -1 en 2 zijn. Mooi, daarmee hebben we de vergelijking opgelost. Of toch niet ?

Als we $x = 2$ invullen in $\sqrt{x+2} = x$ vinden we $\sqrt{4} = 2$, wat uiteraard klopt. Maar als we $x = -1$ invullen vinden we $\sqrt{1} = -1$. Maar $\sqrt{1}$ is helemaal niet gelijk aan -1, en $x = -1$ is dus *geen* oplossing van $\sqrt{x+2} = x$, ook al was het wel een oplossing van de gekwadrateerde vergelijking.

Hoe kunnen we dit soort problemen voorkomen? Een vergelijking met een vierkantswortel zouden we graag oplossen zoals hierboven, namelijk door de vergelijking te kwadrateren. Dat process introduceert echter mogelijk valse oplossingen, die we met behulp van zogenaamde *bestaansvoorwaarden* en *kwadrateringsvoorwaarden* kunnen uitsluiten. Bij het oplossen van een vergelijking met een vierkantswortel in, moeten we rekening houden met volgende voorwaarden:

- **Bestaansvoorwaarde**: wat onder de vierkantswortel staat moet positief zijn.
- **Kwadrateringsvoorwaarde**: wat gelijk is aan een vierkantswortel moet positief zijn.

Deze voorwaarden zorgen er voor dat je geen valse oplossingen krijgt.

Van waar komt die kwadrateringsvoorwaarde precies? We weten dat als $a = b$, dat dan zeker ook $a^2 = b^2$ (want de kwadraten van twee gelijke getallen zijn natuurlijk ook gelijk aan elkaar). Maar, als $a^2 = b^2$, dan volgt niet noodzakelijk dat $a = b$, want $a^2 = b^2$ geldt ook als $a = -b$. De kwadrateringsvoorwaarde sluit de extra 'valse' oplossing $a = -b$ uit.

Voorbeeld 2.1.2. Herneem vorig voorbeeld:

$$\sqrt{x+2} = x.$$

De **bestaansvoorwaarde** zegt dat wat onder de vierkantswortel staat positief moet zijn, oftewel dat $x + 2 \geq 0$. Dit kunnen we herschrijven als $x \geq -2$. Beide oplossingen van de gekwadrateerde vergelijking (-1 en 2) voldoen aan deze voorwaarde.
De **kwadrateringsvoorwaarde** zegt dat wat gelijk is aan een vierkantswortel positief moet zijn. In dit geval is de vierkanstwortel gelijk aan x, en dus moet $x \geq 0$. Het getal 2 is groter dan nul, en is dan ook een oplossing van de vergelijking $\sqrt{x+2} = x$: het voldoet immers aan beide voorwaarden en is een oplossing van de gekwadrateerde vergelijking. Het getal -1 is echter niet groter dan 0, de kwadrateringsvoorwaarde is niet voldaan, en -1 is inderdaad geen oplossing van $\sqrt{x+2} = x$.

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Gelijkheden

We hebben de situatie nu bekeken voor een specifiek geval. De kwadrateringsvoorwaarde is in het leven geroepen voor het oplossen van vergelijkingen met vierkantswortels, maar bestaansvoorwaarden komen in nog veel andere situaties voor, zoals bijvoorbeeld delen door iets dat nul kan worden.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.59)

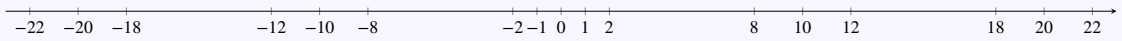
2.2 Ongelijkheden

Een belangrijke eigenschap van reële getallen is dat we ze kunnen *ordenen*: voor twee getallen $x, y \in \mathbb{R}$ geldt altijd $x \leq y$ of $y \leq x$. We kunnen dus niet alleen ver*gelijk*ingen bestuderen en oplossen (bijvoorbeeld $x^2 + 2x + 1 = 0$), maar ook zogenaamde on*gelijk*heden. Daarbij zoeken we niet naar de waarden van een onbekende die een *gelijkheid* oplost, maar naar de waarden van een onbekende die een *ongelijkheid* oplost (bijvoorbeeld $x^2 > 2x - 1$ of $\sin(x) \geq 0.5$). Dat is in het algemeen *moeilijker* dan het oplossen van vergelijkingen, onder meer omwille van de extra complicatie dat twee leden van een ongelijkheid vermenigvuldigen met een *negatief* getal de ongelijkheid *omdraait*:

Eigenschap 2.2.1 (Basiseigenschappen ongelijkheden)**.** Voor elke $x, y, r \in \mathbb{R}$ geldt

	$x < y$	$\iff$	$x + r < y + r$		(plus getal)
als $0 < r$,	$x < y$	$\implies$	$r \cdot x < r \cdot y$		(maal positief getal)
als $r < 0$,	$x < y$	$\implies$	$r \cdot x > r \cdot y$	(of $r \cdot y < r \cdot x$)	(maal negatief getal)

Voorbeeld 2.2.1. We hebben $10 < 20$, en dus ook $10 + 2 < 20 + 2$, $10 - 2 < 20 - 2$ en $2 \cdot 10 < 2 \cdot 20$, maar $(-2) \cdot 10 > (-2) \cdot 20$. Ook is $1 < 2$, maar $-1 > -2$. Deze ongelijkheden zie je ook op de getallenrechte:



Opmerking 2.2.1.

- Ongelijkheden kunnen aan elkaar worden gekoppeld:

  $$a < b < c \iff a < b \text{ en } b < c.$$

  Merk op dat uit beide uitdrukkingen telkens ook volgt dat $a < c$.

- Uitdrukkingen van de vorm $a < b > c$ worden *nooit* gebruikt: je schrijft bv. $a < b$ en $c < b$, of korter $a, c < b$.

- Uit $x < y \iff x + r < y + r$ voor alle x, y, r volgt onmiddellijk dat

  $$a + c < b \iff a < b - c.$$

  Dit is een term naar het andere lid brengen (kies $x = a + c, y = b$ en $r = -c$). Ook volgt dat

  $$a < b \iff a - b < 0.$$

  Inderdaad: kies $x = a, y = b, r = -y$.

- Uit $x < y \implies r \cdot x < r \cdot y$ voor strikt positieve r volgt op gelijkaardige manier:

  $$a < b \cdot c \implies \frac{a}{b} < c \quad \text{als } b > 0$$

  en

  $$a < b \implies \frac{a}{b} < 1 \quad \text{als } b > 0.$$

  Het is dus belangrijk dat de factor die je van lid verandert *positief* is. Als dat niet het geval is, draait de ongelijkheid om.

Met deze notatie en de basiseigenschappen van de ongelijkheden kunnen we de oplossingsverzameling zoeken van ongelijkheden, namelijk de verzameling alle getallen die voldoen aan de ongelijkheid.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Ongelijkheden

Voorbeeld 2.2.2 (Oplossen van ongelijkheden)**.**

1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $2x + 3 < 5$.

$$\begin{array}{rcll} 2x+3 & < & 5 & \\ & \Updownarrow & & (\ -3 \text{ optellen }) \\ 2x & < & 2 & \\ & \Updownarrow & & (\text{ delen door } 2\ ) \\ x & < & 1 & (\ x \text{ is kleiner dan } 1\ ) \end{array}$$

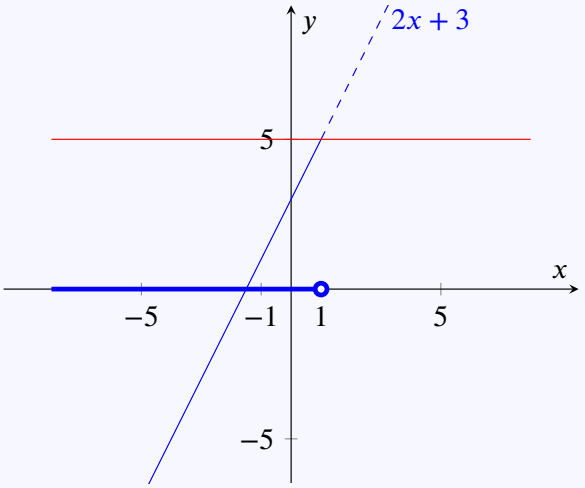
Dus is de oplossingsverzameling $V =]-\infty, 1\,[$.

Deze ongelijkheid kan ook opgelost worden door eerst bij beide leden -5 op te tellen

$$2x - 2 < 0$$

en dan het tekenverloop van de eerstegraadsfunctie $x \mapsto 2x - 2$ te gebruiken:

x		1	
$2x-2$	$-$	0	$+$



2. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $-2x + 3 < 5$.

$$\begin{array}{rcll} -2x+3 & < & 5 & \\ & \Updownarrow & & (\ -3 \text{ optellen }) \\ -2x & < & 2 & \\ & \Updownarrow & & (\text{ delen door } -2\text{, ongelijkheid omkeren }) \\ x & > & -1 & (\ x \text{ is groter dan } -1\ ) \end{array}$$

Dus is de oplossingsverzameling $V =]-1, +\infty[$.

Deze ongelijkheid kan ook opgelost worden door eerst bij beide leden -5 op te tellen

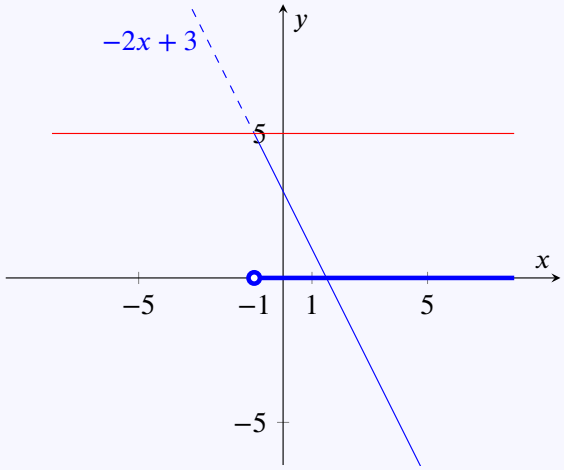
$$-2x - 2 < 0$$

en dan het tekenverloop van de eerstegraadsfunctie $x \mapsto -2x - 2$ te gebruiken:

x		-1	
$-2x-2$	$+$	0	$-$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Ongelijkheden



Voorbeeld 2.2.3 (Oplossen van ongelijkheden)**.** Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\dfrac{x+4}{x-3} < 2$.

We mogen *niet* zomaar linker- en rechterlid vermenigvuldigen met $x-3$, want we kennen het teken niet van $x-3$. We maken dus een *gevalsonderscheid*:

- Merk alvast op dat de uitdrukking niet gedefinieerd is voor $x = 3$: we zouden immers delen door nul. 3 behoort dus al zeker *niet* tot de oplossingsverzameling.
- $x-3 > 0$: We vermenigvuldigen links en rechts met $x-3$. De ongelijkheid blijft behouden omdat $x-3$ positief is.

$$\begin{array}{rcll} x+4 & < & 2x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ -x \text{ optellen }) \\ 4 & < & x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ +6 \text{ optellen }) \\ 10 & < & x & (\ x \text{ is groter dan } 10\ ) \end{array}$$

- $x-3 < 0$: We vermenigvuldigen links en rechts met $x-3$. De ongelijkheid keert om omdat $x-3$ negatief is.

$$\begin{array}{rcll} x+4 & > & 2x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ -x \text{ optellen }) \\ 4 & > & x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ +6 \text{ optellen }) \\ 10 & > & x & (\ x \text{ is kleiner dan } 10\ ) \end{array}$$

Dus

- in het geval dat $x-3 > 0$ (of $x > 3$), dan wordt de ongelijkheid $x > 10$.
- in het geval dat $x-3 < 0$ (of $x < 3$), dan wordt de ongelijkheid $x < 10$. Dat is natuurlijk automatisch het geval: Als $x < 3$ dan is ook $x < 10$. Dus, als $x < 3$ dan is automatisch $\dfrac{x+4}{x-3} < 2$

Samengevat: $\dfrac{x+4}{x-3} < 2$ als $x < 3$ of $x > 10$.

Dus is de oplossingsverzameling is $V =]-\infty, 3[\cup]10, +\infty[$.

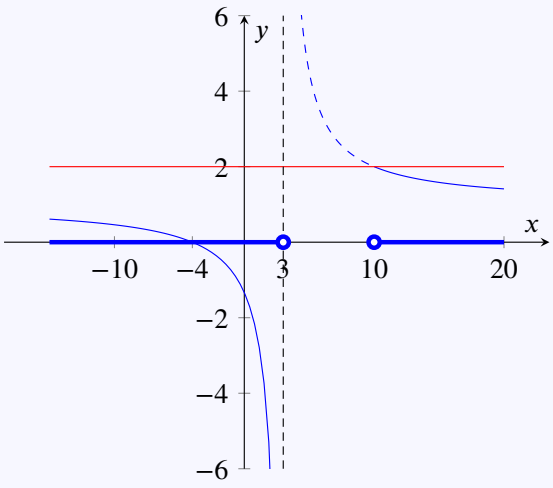
CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.59)

2.2 Ongelijkheden

Herinner je de notatie '$\cup$' om aan te duiden dat V de unie is van de twee halfrechten.

We kunnen dus ook zeggen: $\frac{x+4}{x-3} < 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 3[\cup]10, +\infty[$.

Dit kunnen we ook zien op de grafiek van $\frac{x+4}{x-3}$:



Deze ongelijkheid kan ook opgelost worden, mits herschrijven van de opgave, door het tekenverloop van een rationale functie te onderzoeken.

Bron: Schaum's outline series, Beginning Calculus, Second Edition, p.4

Opmerking 2.2.2 (Bestaansvoorwaarden)**.**

Bij het oplossen van ongelijkheden komen regelmatig situaties voor als in vorig voorbeeld: een breuk $\frac{x+4}{x-3}$ is niet gedefinieerd voor $x = 3$, omdat we dan zouden delen door nul. De ongelijkheid kan dus zelfs niet worden opgeschreven voor deze waarde van x, want de uitdrukking $\frac{x+4}{x-3}$ *heeft geen zin* voor $x = 3$. Voor we de ongelijkheid oplossen moeten we dus als zogenaamde bestaansvoorwaarde stellen dat $x \neq 3$. Dit leidt meestal tot gevalsonderscheid. Niet alleen bij nulpunten van een noemer, ook bij het nemen van wortels kunnen bestaansvoorwaarden nodig zijn: een uitdrukking als $\sqrt{x+3} > 7$ heeft geen betekenis als $x + 3 < 0$.

Zij $x, y \in \mathbb{R}$ en f een reële functie. We kunnen ons het volgende afvragen:

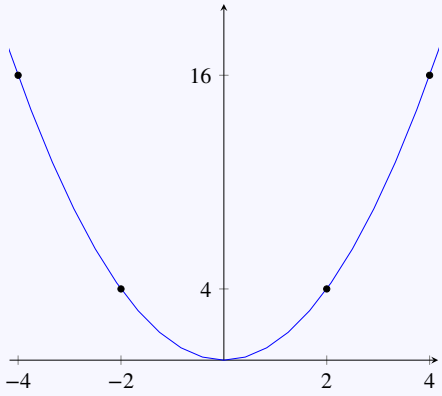
als $x < y$, kunnen we dan iets zinnigs zeggen over $f(x)$ en $f(y)$?

In De Ideale Wereld zouden we kunnen hopen dat $x < y$ impliceert dat ook $f(x) < f(y)$, maar de Wereld is niet Ideaal.

Voorbeeld 2.2.4. We onderzoeken bij wijze van voorbeeld het verband voor de functie $f(x) = x^2$.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Ongelijkheden



Er geldt dan:

$$\begin{array}{rcl} 2 < 4 & \text{en} & 2^2 < 4^2 \\ -4 < -2 & \text{en} & (-4)^2 > (-2)^2 \\ -2 < 4 & \text{en} & (-2)^2 < 4^2 \\ -4 < 2 & \text{en} & (-4)^2 > 2^2 \\ -2 < 2 & \text{en} & (-2)^2 = 2^2 \end{array}$$

Als x en y beide positief zijn, wordt de orde behouden. Als x en y beide negatief zijn, draait de orde om. Als x en y een verschillend teken hebben, kunnen we niets zeggen over de relatie tussen x^2 en y^2: zowel $x^2 < y^2$, $x^2 > y^2$ als $x^2 = y^2$ zijn mogelijk. In dit geval mogen we dus niet kwadrateren.

We kunnen de verschillende gevallen samenvatten als:

Als $x, y \geq 0$ dan geldt: $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$.

Als $x, y \leq 0$ dan geldt: $x < y \Leftrightarrow x^2 > y^2$.

Als $x < 0 < y$ zijn zowel $x^2 \leq y^2$ als $x^2 \geq y^2$ mogelijk.

Dit voorbeeld toont aan dat je erg moet opletten bij het al dan niet behouden blijven van ongelijkheden.

Definitie 2.2.1. Zij f een reële functie op een interval $I \subset \mathbb{R}$. Dan geldt:

$$\begin{array}{rcl} f \text{ is strikt stijgend op } I & \iff & \text{voor alle } x, y \in I : (x < y \implies f(x) < f(y)) \\ f \text{ is strikt dalend op } I & \iff & \text{voor alle } x, y \in I : (x < y \implies f(x) > f(y)) \end{array}$$

Dus, als je *weet* dat een bepaalde functie stijgt (omdat je de grafiek kent), dan weet je ook dat $f(x) < f(y)$ van zodra $x < y$.

Voorbeeld 2.2.5.

1. De functie $f : x \mapsto 2x + 3$ is stijgend, en dus is $f(2) < f(4)$.
2. De functie $f : x \mapsto -2x + 3$ is dalend, en dus is $f(2) > f(4)$.
3. De functie $f : x \mapsto x^2$ is stijgend op het interval $[0, 10]$, en dus is $f(2) < f(4)$.
4. De functie $f : x \mapsto x^2$ is dalend op het interval $[-10, 0]$, en dus is $f(-4) > f(-2)$.
5. De functie $f : x \mapsto \sqrt{x}$ is stijgend op het interval $[0, +\infty[$ en dus is $f(2) < f(4)$.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Ongelijkheden

Oefening 2.2.1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid

1. $2 < \sqrt{x} \iff x \in \ ]4, +\infty[$

Uitwerking: De bestaansvoorwaarde is $x \geq 0$. Beide leden zijn positief. We mogen kwadrateren en de orde blijft bewaard. Na kwadrateren wordt de vergelijking $4 < x$. Beide voorwaarden tesamen geven als oplossingsverzameling $]4, +\infty[$.

2. $-2 < \sqrt{x} \iff x \in \ [0, +\infty[$

Uitwerking: De bestaansvoorwaarde is $x \geq 0$. Het linkerlid is negatief en het rechterlid is positief. We mogen niet kwadrateren. We hoeven ook niet te kwadrateren want voor elke $x \geq 0$ zal $\sqrt{x}$ groter zijn dan -2. De oplossingsverzameling is $[0, +\infty[$.

3. $2 < -\sqrt{x} \iff x \in$ geen oplossingen

Uitwerking: Het linkerlid is positief en het rechterlid is negatief. We mogen niet kwadrateren. We hoeven ook niet te kwadrateren want voor geen enkele x zal $-\sqrt{x}$ groter zijn dan 2. De vergelijking heeft geen oplossingen.

4. $-2 < -\sqrt{x} \iff x \in \ [0, 4[$

Uitwerking: De bestaansvoorwaarde is $x \geq 0$. Beide leden zijn negatief. We mogen kwadrateren maar de orde draait dan om. Na kwadrateren wordt de vergelijking $4 > x$. Beide voorwaarden tesamen geven als oplossingsverzameling $[0, 4[$.

Voorbeeld 2.2.6. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x-1} > 3$.

De uitdrukking onder het wortelteken moet positief zijn, anders heeft de opgave geen betekenis. Dit is de bestaansvoorwaarde:

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1\,.$$

We mogen kwadrateren omdat beide leden van de ongelijkheid positief zijn en de orde blijft bewaard. We krijgen dan $x - 1 > 9$.

Omdat $x - 1 > 9$ overeenstemt met $x > 10$, is aan de bestaansvoorwaarde $(x \geq 1)$ zeker voldaan.

De oplossingsverzameling is dus $V =]10, +\infty[$.

In volgende voorbeelden geven we enkel de methode, niet de gehele uitwerking.

Voorbeeld 2.2.7. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x+2} \leq x$.

Bestaansvoorwaarde: $x \geq -2$

- geval $x \geq 0$: kwadrateren mag en orde blijft bewaard
- geval $x < 0$: kwadrateren mag niet en hoeft ook niet, geen oplossing

Voorbeeld 2.2.8. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x+2} \geq x$.

Bestaansvoorwaarde: $x \geq -2$

- geval $x \geq 0$: kwadrateren mag en orde blijft bewaard
- geval $x < 0$: kwadrateren mag niet en hoeft ook niet, ongelijkheid steeds voldaan

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Tekenverloop van rationale functies

Rationale functies zijn functies waarvan je het functievoorschrift kan schrijven als een *breuk van veeltermen*. Van rationale functies kan je het tekenverloop bepalen door eerst teller en noemer te ontbinden in eerste- en tweedegraadsveeltermen, en daarna de tekenverlopen van die factoren te combineren. We illustreren de werkwijze met een voorbeeld.

Voorbeeld 2.3.1 (Tekenverloop van een rationale functie)**.**

Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $\dfrac{(4-x^2)(3x^2-9x+6)}{2x+4} \leqslant 0$.

Uitwerking: We maken voor elk van de factoren van teller en noemer een apart tekenverloop en brengen dit alles samen in één tabel.

- $(4-x^2)$ heeft twee nulpunten: 2 en -2.
- $(3x^2-9x+6)$ heeft twee nulpunten: 1 en 2.
- $(2x+4)$ heeft één nulpunt: -2.

Dit geeft volgende samenvattende tabel (met de nulpunten steeds geordend van klein naar groot):

x		-2		1		2	
$4-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$3x^2-9x+6$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$2x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{(4-x^2)(3x^2-9x+6)}{2x+4}$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$-$

De vertikale streep bij het nulpunt van de noemer duidt aan dat de breuk er niet gedefinieerd is.
We bekomen de onderste rij dus door de tekens van de eerste- en tweedegraadsfactoren te vermenigvuldigen. Zo bepalen we het teken van de getallen in de kolom die staat voor $x \in]-\infty, 2[$ als volgt: twee mintekens (dus negatieve factoren) vermenigvuldigen geeft iets positief, en dat dan vermenigvuldigen met de derde positieve factor geeft dan iets positief, wat ons het plusteken in de onderste rij geeft. Als we een nul tegenkomen moeten we opletten:

- Zijn er enkel factoren in de teller die nul worden, dan wordt de rationale functie ook nul.
- Is er een factor in de noemer nul, dan is de rationale functie niet gedefinieerd in dat punt, en zetten we een $\vert$.

De oplossingsverzameling van de ongelijkheid is dus $V = [1, +\infty[$.

Oefening 2.3.1. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ volgende ongelijkheden gelden.

1. $\dfrac{(2x-3)(x^2-5x+4)}{x^2(-x^2+2x-1)} \leqslant 0$ $\quad x \in]1, 3/2\,] \cup [4, +\infty[$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Driehoeksongelijkheden

De **driehoeksongelijkheid** is een erg belangrijke eigenschap van de absolute waarde, en meer algemeen van het begrip *afstand*.

De driehoeksongelijkheid zegt dat voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$|x-y| \leq |x-z|+|z-y|$$

Vb: $\begin{cases} 3 = |5-2| \leq |5-3|+|3-2| = 2+1 = 3 \\ 3 = |5-2| \leq |5-1|+|1-2| = 4+1 = 5 \end{cases}$

en drukt uit dat de *absolute waarde* $|x-y|$ *van een verschil* de *(kortste) afstand* is tussen x en y. Inderdaad, de ongelijkheid zegt dat $|x-y|$ steeds korter (i.e. kleiner) is dan de langs een willekeurig getal z te passeren, dus via $|x-z|+|y-z|$.

Je kan de driehoeksvergelijking wat manipuleren als volgt:

- door in het rechterlid $x-z=a$ en $z-y=b$ te schrijven, verkrijg je $a+b=x-y$, en dus $|a+b| \leq |a|+|b|$.

- door nu $a=x-y$ en $b=y$ te nemen, krijg je $|x| = |x-y+y| \leq |x-y|+|y|$, en dus $|x|-|y| \leq |x-y|$. En met $a=x$ en $b=y-x$ krijg je $|y| = |x-(y-x)| \leq |x|+|y-x|$, en dus $|y|-|x| \leq |y-x| = |x-y|$. Als zowel $|x|-|y|$ als $|y|-|x|$ kleiner zijn dan $|x-y|$ geldt natuurlijk ook $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|$.

Eigenschap 2.4.1. Voor $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt de (eerste) driehoeksongelijkheid

$$|x-y| \leq |x-z|+|z-y|$$

Vb: $\begin{cases} 3 = |5-2| \leq |5-3|+|3-2| = 2+1 = 3 \\ 3 = |5-2| \leq |5-1|+|1-2| = 4+1 = 5 \end{cases}$

of equivalent (kies $x \rightsquigarrow x-z$ en $y \rightsquigarrow z-y$)

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

Vb: $\begin{cases} 7 = |5+2| \leq |5|+|2| = 5+2 = 7 \\ 3 = |5+(-2)| \leq |5|+|-2| = 5+2 = 7 \end{cases}$

Hieruit volgt de tweede driehoeksongelijkheid

$$\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|$$

Vb: $\begin{cases} 3 = \big||5|-|2|\big| \leq |5-2| = 3 \\ 3 = \big||5|-|-2|\big| \leq |5-(-2)| = 7 \end{cases}$

Opmerking 2.4.1.

Uit $|x+y| \leq |x|+|y|$ volgt ook onmiddellijk dat $|x-y| \leq |x|+|y|$ (want $x-y = x+(-y)$ en $|y| = |-y|$). Maar natuurlijk geldt NIET ALTIJD dat $|x-y| \not\leq |x|-|y|$. De tweede driehoeksongelijkheid geeft een soort omgekeerde: $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$.

De driehoeksongelijkheid geeft dus slechts *de helft* van de niet bestaande gelijkheid $|x+y| \not= |x|+|y|$ die sommigen wel eens op roekeloze wijze durven toepassen.

Oefening 2.4.1. Toon aan dat $|y|-7 < |x| < |y|+7$ zodra $|x-y| < 7$.

Uitwerking: Omdat altijd $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$ volgt uit $|x-y| < 7$ dat ook

$$\big||x|-|y|\big| \leq 7$$

en door $|x-a| < r \iff a-r < x < a+r$ toe te passen op de buitenste absolute waarde vind je

$$|y|-7 < |x| < |y|+7$$

De oefening zegt dat als x minder dan 7 verwijdert ligt van y, dan ligt $|x|$ minder dan 7 van $|y|$.

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Driehoeksongelijkheden

Oefening 2.4.2. Toon aan dat $|6x-2| < 16$ zodra $|x+2| < 1/3$.

Uitwerking: $|6x-2| = |6(x+2)-14| \leqslant 6|x+2| + 14 < 6(1/3) + 14 = 16$.

Oefening 2.4.3. Als $|x+5| \leqslant 2$ en $|y+5| \leqslant 6$, dan kan $|x-y|$ maximaal gelijk zijn aan 8? Geef een concreet voorbeeld waarvoor die maximale waarde van $|x-y|$ bereikt wordt.

Uitwerking: $|x-y| \leqslant |x-(-5)| + |-5-y| = |x+5| + |y+5| \leqslant 2+6 = 8$, dus afstand is hoogstens 8. En die maximale afstand wordt ook bereikt, namelijk voor $x=-3$ en $y=-11$ of voor $x=-7$ en $y=1$.

Oefening 2.4.4. Bestaan er $x, y, z, \in \mathbb{R}$ waarvoor $|x+1| \leqslant 2, |y+1| \leqslant 3$, $|y-z| \leqslant 1$ en $|x-z| \geqslant 7$? Argumenteer!

Uitwerking: Neen. $|x-z| \leqslant |x-y| + |y-z| \leqslant |x+1| + |1+y| + |y-z| \leqslant 2+3+1 = 6$.
Als je zorgt dat de eerste drie ongelijkheden gelden is de afstand tussen x en z automatisch kleiner of gelijk aan 6. Aan de laatste ongelijkheid kan dus niet voldaan worden.

Oefening 2.4.5 (Uitdaging: extra oefening over driehoeksongelijkheden)**.**

Vind voor elke $a \in \mathbb{R}$ een $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$ zodat dan voor alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $|a-x| < \varepsilon$ geldt dat $\dfrac{|a|}{2} < |x|$?

Uitwerking:

De tweede driehoeksongelijkheid $|\,|x| - |y|\,| \leqslant |x-y|$ legt een verband tussen $|x|, |y|$ en $|x-y|$.

We weten dat $|\,|x|-|y|\,| \leqslant |x-y|$ en dus geldt voor elke ε waarvoor $|x-y| < \varepsilon$ door de transitiviteit (namelijk $a<b$ en $b<c \implies a<c$) dat

$$\begin{array}{rcl} |\,|x|-|y|\,| & < & \varepsilon \\ & \Updownarrow & (|x|<r \iff -r<x<r) \\ -\varepsilon < \quad |x|-|y| & & < \varepsilon \\ & \Updownarrow & |y| \text{ optellen} \\ |y|-\varepsilon < \quad |x| & & < |y|+\varepsilon \end{array}$$

Voor $\varepsilon = \dfrac{|y|}{2}$ wordt de linkse ongelijkheid het gevraagde $\dfrac{|y|}{2} < |x|$, en dus is $\varepsilon = \dfrac{|y|}{2}$ de gezochte ε.

CC BY-NC-SA 4.0

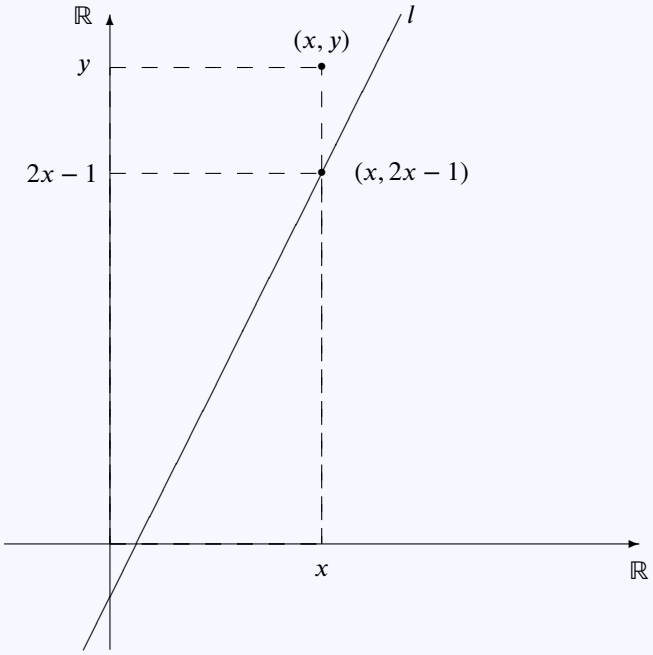
3.1 Lineaire ongelijkheden grafisch oplossen

Een algemene lineaire vergelijking met twee onbekenden is van de vorm $ax+by+c=0$. Men kan zich niet alleen afvragen waar $ax+by+c=0$, maar ook waar $ax+by+c => 0$ en waar $ax+by+x<0$.

We maken onmiddellijk volgende bedenkingen

- $ax+by+c=0$ is de vergelijking van een rechte. Het lijkt aannemelijk dat alle punten waar $ax+by+c>0$ aan één kant van die rechte zullen liggen (en steeds verder van die rechte naarmate $ax+by+c$ groter wordt) en aan de andere kant als $ax+by+c<0$. We zullen verder zien dat dat inderdaad zo is.
- Er geldt duidelijk dat $ax+by+c<0$ als en slechts als $-ax-by-c>0$. Het volstaat dus ongelijkheden van het type $ax+by+c<0$ te bestuderen (want de andere ongelijkheden kunnen we tot dit geval herleiden door met -1 te vermenigvuldigen).
- als $b=0, a\neq 0$ wordt de ongelijkheid $ax+c<0$, wat te herleiden is tot $x<-c/a$ of $x>-c/a$, afhankelijk van het teken van a

Voorbeeld 3.1.1. Bekijken we de functie f met functievoorschrift $f(x)=2x-1$, dan is $y=2x-1$ de vergelijking van de grafiek van deze functie f. De grafische voorstelling hiervan in het vlak $\mathbb{R}^2$ is een rechte l.



Bekijken we nu alle punten op een vertikale rechte met eenzelfde vaste x-coördinaat. Alle punten $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ **strikt boven** de rechte l hebben een y-coördinaat die strikt groter is dan de y-coördinaat van het punt op de rechte l en voldoen dus aan de ongelijkheid $y>2x-1$, terwijl de punten **strikt onder** de rechte l voldoen aan de ongelijkheid $y<2x-1$.

Dit kunnen we doen voor elke vertikale rechte. We kunnen dus besluiten dat alle punten $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ van het halfvlak **strikt boven** de rechte l voldoen aan de ongelijkheid $y>2x-1$ en alle punten $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ van het halfvlak **strikt onder** de rechte l voldoen aan de ongelijkheid $y<2x-1$
Uiteraard bepaalt de ongelijkheid $y\geqslant 2x-1$ het bovenste halfvlak **met** de punten op de rechte l, en $y\leqslant 2x-1$ het onderste halfvlak **met** de punten op de rechte l.

Algemeen geldt volgende eigenschap

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Lineaire ongelijkheden grafisch oplossen

Eigenschap 3.1.1.

Als $y = ax + b$ met $a, b \in \mathbb{R}$ de vergelijking is van een niet-vertikale rechte l in het (x, y)−vlak, dan bepaalt

(a) $y > ax + b$ het halfvlak **boven** de rechte l **zonder** de punten op de rechte l,

(b) $y < ax + b$ het halfvlak **onder** de rechte l **zonder** de punten op de rechte l,

(c) $y \geqslant ax + b$ het halfvlak **boven** de rechte l **met** de punten op de rechte l,

(d) $y \leqslant ax + b$ het halfvlak **onder** de rechte l **met** de punten op de rechte l.

Als $x = b$ met $b \in \mathbb{R}$ de vergelijking is van een vertikale rechte l in het (x, y)−vlak, dan bepaalt

(e) $x > b$ het halfvlak **rechts** van de rechte l **zonder** de punten op de rechte l,

(f) $x < b$ het halfvlak **links** van de rechte l **zonder** de punten op de rechte l,

(g) $x \geqslant b$ het halfvlak **rechts** de rechte l **met** de punten op de rechte l,

(h) $x \leqslant b$ het halfvlak **links** van de rechte l **met** de punten op de rechte l.

Om een *stelsel* ongelijkheden van bovenstaande vormen grafisch op te lossen, lossen we *elke ongelijkheid afzonderlijk* op en bepalen dan het *gemeenschappelijke deel (de doorsnede)* van de verkregen oplossingsverzamelingen.

Voorbeeld 3.1.2.

1. Zoek alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die voldoen aan $2x - y + 4 > 0$.

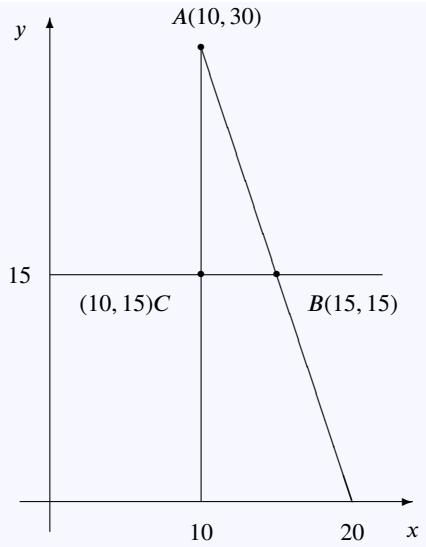
Uitwerking: De gegeven ongelijkheid is gelijkwaardig met $y < 2x + 4$.
We tekenen de rechte l met vergelijking $y = 2x + 4$. De oplossingsverzameling is dus het halfvlak onder de rechte l zonder de punten op de rechte (eig. **??**(**??**)).

2. Zoek alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die voldoen aan $\begin{cases} x & \geqslant & 10 \\ y & \geqslant & 15 \\ 3x + y & \leqslant & 60 \end{cases}$

Uitwerking: We tekenen de rechten met vergelijkingen $x = 10$, $y = 15$ en $y = -3x + 60$.
Voor elk van de ongelijkheden bepalen we de oplossingsverzameling.
Voor $x \geqslant 10$ is dit het halfvlak rechts van de vertikale rechte $x = 10$ met de punten op de rechte zelf (eig. **??**(**??**)).
Voor $y \geqslant 15$ is dit het halfvlak boven de horizontale rechte $y = 15$ met de punten op de rechte zelf (eig. **??**(**??**)).
Voor $y \leqslant -3x + 60$ is dit het halfvlak onder de rechte met de punten op de rechte zelf (eig. **??**(**??**)).
De oplossingsverzameling van het stelsel bestaat dus uit de punten binnen de driehoek ABC en op de randen ervan.

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Lineaire ongelijkheden grafisch oplossen



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.59)

3.2 Ongelijkheden met rationale functies

Ongelijkheden met *rationale functies*, dat zijn functie met als functievoorschrift een *breuk van veeltermen*, zijn moeilijker dan ongelijkheden met veeltermen omdat je bij ongelijkheden erg moet oppassen als je beide leden vermenigvuldigt met een mogelijk negatief getal. We starten met een eenvoudig en motiverend voorbeeld en presenteren vervolgens een meer algemene methode.

Voorbeeld 3.2.1 (ongelijkheid via gevalsonderscheid)**.** Voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt $\dfrac{x+4}{x-3} < 2$.

We mogen *niet* zomaar linker- en rechterlid vermenigvuldigen met $x-3$, want we kennen het teken niet van $x-3$. We maken dus een *gevalsonderscheid*:

- Merk alvast op dat de uitdrukking niet gedefinieerd is voor $x = 3$: we zouden immers delen door nul. Het getal 3 behoort dus al zeker *niet* tot de oplossingsverzameling.
- $x-3 > 0$: bij vermenigvuldigen links en rechts met $x-3$ blijft de ongelijkheid behouden omdat $x-3$ positief is.

$$\begin{array}{rcll} x+4 & < & 2x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ -x \text{ optellen }) \\ 4 & < & x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ +6 \text{ optellen }) \\ 10 & < & x & (\ x \text{ is groter dan } 10\ ) \end{array}$$

- $x-3 < 0$: bij vermenigvuldigen links en rechts met $x-3$ keert de ongelijkheid om omdat $x-3$ negatief is.

$$\begin{array}{rcll} x+4 & > & 2x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ -x \text{ optellen }) \\ 4 & > & x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ +6 \text{ optellen }) \\ 10 & > & x & (\ x \text{ is kleiner dan } 10\ ) \end{array}$$

Dus

- in het geval dat $x-3 > 0$ (of $x > 3$), dan wordt de ongelijkheid $x > 10$.
- in het geval dat $x-3 < 0$ (of $x < 3$), dan wordt de ongelijkheid $x < 10$. Merk op dat als $x < 3$, dan is natuurlijk automatisch ook $x < 10$. Dus, als $x < 3$ dan is de ongelijkheid $x < 10$ altijd voldaan, en is dus automatisch ook $\dfrac{x+4}{x-3} < 2$

Samengevat: $\dfrac{x+4}{x-3} < 2$ als $x < 3$ of $x > 10$.

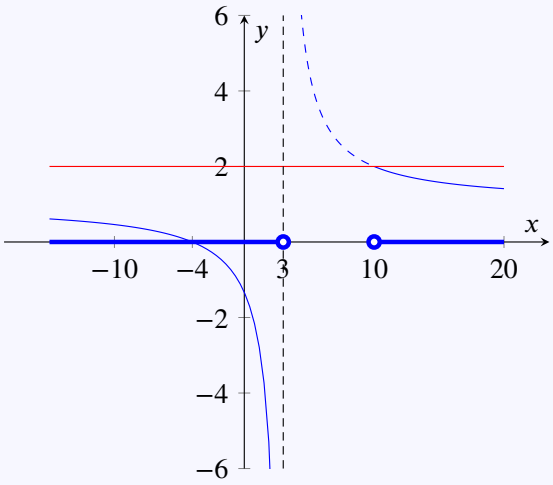
Dus is de oplossingsverzameling is $V =]-\infty, 3[\cup]10, +\infty[$.

In plaats van met gevalsonderscheid, kan je deze ongelijkheid ook oplossen met een tekentabel.

De oplossing kan worden voorgesteld op de grafiek van $\dfrac{x+4}{x-3}$:

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Ongelijkheden met rationale functies



Bron: Schaum's outline series, Beginning Calculus, Second Edition, p.4

Voor meer ingewikkelde rationale functies is een eenvoudig gevalsonderscheid zoals in het bovenstaande voorbeeld niet altijd mogelijk. Een meer algemene methode is het opstellen van een tekentabel net zoals bij veeltermen, alleen nemen we het nu soms quotiënten. Voor het teken heeft dat geen belang, enkel voor de waarde in de nulpunten moet je extra opletten. We illustreren de werkwijze met een voorbeeld.

Voorbeeld 3.2.2 (ongelijkheden via tekentabel)**.** Voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt $\dfrac{(4-x^2)(3x^2-9x+6)}{2x+4} \leqslant 0$.

Uitwerking: We maken voor elk van de factoren van teller en noemer een apart tekenverloop en brengen dit alles samen in één tabel.

- $(4-x^2)$ heeft twee nulpunten: 2 en -2.
- $(3x^2-9x+6)$ heeft twee nulpunten: 1 en 2.
- $(2x+4)$ heeft één nulpunt: -2.

Dit geeft volgende samenvattende tabel (met de nulpunten steeds geordend van klein naar groot):

x		-2		1		2	
$4-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$3x^2-9x+6$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$2x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{(4-x^2)(3x^2-9x+6)}{2x+4}$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$-$

Bij een nul moeten we nu extra opletten:

- zijn er enkel factoren *in de teller* die nul worden, dan wordt de rationale functie er ook nul.
- is er een factor *in de noemer* nul, dan is de rationale functie er niet gedefinieerd en zetten we een $\vert$.

De oplossingsverzameling van de ongelijkheid is dus $V = [1, +\infty[$.

Oefening 3.2.1. Voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt $\dfrac{(2x-3)(x^2-5x+4)}{x^2(-x^2+2x-1)} \leqslant 0$?

Antwoord: voor $x \in]1, 3/2\,] \cup [4, +\infty[$

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Tekenverloop van veeltermen

4.1.1 Tekenverloop van eerstegraadsfuncties

De grafiek van een functie $x \mapsto ax + b$ met $a, b \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ is een *rechte*.
Als a positief is, is de functie strikt *stijgend* en als a negatief is strikt *dalend* .
Het (enige) *nulpunt* van de functie is $-b/a$.

Deze informatie vatten we samen in volgend **tekenverloop** (tekentabel) voor $x \mapsto ax + b$

x		$x_1 = -b/a$	
$ax + b$ met $a > 0$	$-$	0	$+$
$ax + b$ met $a < 0$	$+$	0	$-$

4.1.2 Tekenverloop van tweedegraadsfuncties

De grafiek van een functie $x \mapsto ax^2 + bx + c$ met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ is een *parabool*.
Als $a < 0$ is dat een zogenaamde *bergparabool*, als $a > 0$ een *dalparabool*.
Men noemt het getal $D = b^2 - 4ac$ de **discriminant** van de functie.

Als $D < 0$ heeft de functie *geen reële nulpunten*, en
als $D \geq 0$ dan vinden we de nulpunten met de *wortelformule*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Dit vatten we samen in volgende tekentabellen.

- Als $D > 0$ zijn er **twee verschillende snijpunten** $x_1 < x_2$ met de x-as, en volgend tekenverloop:

x		x_1		x_2	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$	0	$-$	0	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$	0	$+$	0	$-$

- Als $D = 0$ zijn er **twee samenvallende snijpunten** met de x-as, en volgend tekenverloop:

x		$x_1 = x_2$	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$	0	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$	0	$-$

- Als $D < 0$ zijn er **geen snijpunten** met de x-as, en volgend tekenverloop:

x	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$

Voor tweedegraadsfuncties kunnen al deze tekentabellen worden opgebouwd door volgende eenvoudige regel:

de tekentabel *begint steeds* met *het teken van* a, en het *verandert* telkens je een nulpunt passeert (waarbij -natuurlijk- als er twee nulpunten *tegelijk* worden gepasseerd, het teken ook twee keer verandert (en dus niet verandert: $+ \to - \to +$ is gewoon $+$ blijven))

Voorbeeld 4.1.1.

1. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $8 - 4x < 0$.

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Tekenverloop van veeltermen

Uitwerking: Het nulpunt is 2. De coëfficiënt $a = -4$ is negatief, dus is de tekentabel

x		$x_1 = 2$	
$8 - 4x (a > 0)$	$+$	0	1

De oplossingsverzameling is dus $V =]2, +\infty[$

2. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $x^2 + 5x + 6 \geqslant 0$.

Uitwerking: De discriminant is $D = 25 - 4.6 = 1$, de nulpunten zijn $x_1 = \dfrac{-5+1}{2} = -2$ en $x_2 = \dfrac{-5-1}{2} = -3$. De coëfficiënt $a = 1$ is positief, dus is de tekentabel

x		$x_1 = -3$		$x_2 = -2$	
$x^2 + 5x + 6$ dus $a > 0$	$+$	0	$-$	0	$+$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-\infty, -3] \cup [-2, +\infty[$.

3. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $-2x^2 + 4x - 5 \geqslant 0$.

Uitwerking: De discriminant is $D = 16 - 40 = -24 < 0$, en er zijn dus geen nulpunten. De hoogstegraads-coëfficiënt is negatief, dus is de tekentabel

x	
$-2x^2 + 4x + -5$ met $a < 0$	$-$

De oplossingsverzameling is dus leeg, $V = \emptyset$.

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Bestaansvoorwaarden en kwadrateringsvoorwaarden

Als voorbereiding op het bestuderen van ongelijkheden verdiepen we ons eerst even in het eenvoudigere geval van vergelijkingen. We onderzoeken meer bepaald een specifiek type probleem dat kan optreden bij het oplossen van sommige vergelijkingen en ongelijkheden: het introduceren van 'valse oplossingen'.

Voorbeeld 4.2.1. Beschouw de vergelijking

$$\sqrt{x+2} = x.$$

Het is niet onmiddellijk duidelijk hoe we deze vergelijking met een vierkantswortel kunnen oplossen. Een mogelijkheid is om *de vergelijking te kwadrateren*: als we beide leden van de vergelijking kwadrateren dan verdwijnt de vierkantswortel:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x+2}\right)^2 &= x^2 \\ \Leftrightarrow\ x+2 &= x^2,\end{aligned}$$

en dit is een tweedegraadsvergelijking $x^2 - x - 2 = 0$, waarvan je kan berekenen dat de oplossingen -1 en 2 zijn. Mooi, daarmee hebben we de vergelijking opgelost. Of toch niet ?

Als we $x = 2$ invullen in $\sqrt{x+2} = x$ vinden we $\sqrt{4} = 2$, wat uiteraard klopt. Maar als we $x = -1$ invullen vinden we $\sqrt{1} = -1$. Maar $\sqrt{1}$ is helemaal niet gelijk aan -1, en $x = -1$ is dus *geen* oplossing van $\sqrt{x+2} = x$, ook al was het wel een oplossing van de gekwadrateerde vergelijking.

Hoe kunnen we dit soort problemen voorkomen? Een vergelijking met een vierkantswortel zouden we graag oplossen zoals hierboven, namelijk door de vergelijking te kwadrateren. Dat process introduceert echter mogelijk valse oplossingen, die we met behulp van zogenaamde *bestaansvoorwaarden* en *kwadrateringsvoorwaarden* kunnen uitsluiten. Bij het oplossen van een vergelijking met een vierkantswortel in, moeten we rekening houden met volgende voorwaarden:

- **Bestaansvoorwaarde**: wat onder de vierkantswortel staat moet positief zijn.
- **Kwadrateringsvoorwaarde**: wat gelijk is aan een vierkantswortel moet positief zijn.

Deze voorwaarden zorgen er voor dat je geen valse oplossingen krijgt.

Van waar komt die kwadrateringsvoorwaarde precies? We weten dat als $a = b$, dat dan zeker ook $a^2 = b^2$ (want de kwadraten van twee gelijke getallen zijn natuurlijk ook gelijk aan elkaar). Maar, als $a^2 = b^2$, dan volgt niet noodzakelijk dat $a = b$, want $a^2 = b^2$ geldt ook als $a = -b$. De kwadrateringsvoorwaarde sluit de extra 'valse' oplossing $a = -b$ uit.

Voorbeeld 4.2.2. Herneem vorig voorbeeld:

$$\sqrt{x+2} = x.$$

De **bestaansvoorwaarde** zegt dat wat onder de vierkantswortel staat positief moet zijn, oftewel dat $x + 2 \geq 0$. Dit kunnen we herschrijven als $x \geq -2$. Beide oplossingen van de gekwadrateerde vergelijking (-1 en 2) voldoen aan deze voorwaarde.
De **kwadrateringsvoorwaarde** zegt dat wat gelijk is aan een vierkantswortel positief moet zijn. In dit geval is de vierkanstwortel gelijk aan x, en dus moet $x \geq 0$. Het getal 2 is groter dan nul, en is dan ook een oplossing van de vergelijking $\sqrt{x+2} = x$: het voldoet immers aan beide voorwaarden en is een oplossing van de gekwadrateerde vergelijking. Het getal -1 is echter niet groter dan 0, de kwadrateringsvoorwaarde is niet voldaan, en -1 is inderdaad geen oplossing van $\sqrt{x+2} = x$.

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Bestaansvoorwaarden en kwadrateringsvoorwaarden

We hebben de situatie nu bekeken voor een specifiek geval. De kwadrateringsvoorwaarde is in het leven geroepen voor het oplossen van vergelijkingen met vierkantswortels, maar bestaansvoorwaarden komen in nog veel andere situaties voor, zoals bijvoorbeeld delen door iets dat nul kan worden.

Bovenstaande reflecties omtrent de bestaansvoorwaarden en kwadrateringsvoorwaarden zjn natuurlijk ook van toepassing bij het oplossen van ongelijkheden.

Voorbeeld 4.2.3. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x-1} > 3$.

De uitdrukking onder het wortelteken moet positief zijn, anders heeft de opgave geen betekenis. Dit is de bestaansvoorwaarde:

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1\,.$$

We mogen kwadrateren omdat beide leden van de ongelijkheid positief zijn en de orde blijft bewaard. We krijgen dan $x - 1 > 9$.

Omdat $x - 1 > 9$ overeenstemt met $x > 10$, is aan de bestaansvoorwaarde $(x \geq 1)$ zeker voldaan.

De oplossingsverzameling is dus $V =]10, +\infty[$.

In volgende voorbeelden geven we enkel de methode, niet de gehele uitwerking.

Voorbeeld 4.2.4. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x+2} \leq x$.

Bestaansvoorwaarde: $x \geq -2$

- geval $x \geq 0$: kwadrateren mag en orde blijft bewaard
- geval $x < 0$: kwadrateren mag niet en hoeft ook niet, geen oplossing

Voorbeeld 4.2.5. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x+2} \geq x$.

Bestaansvoorwaarde: $x \geq -2$

- geval $x \geq 0$: kwadrateren mag en orde blijft bewaard
- geval $x < 0$: kwadrateren mag niet en hoeft ook niet, ongelijkheid steeds voldaan

Oefening 4.2.1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid

1. $2 < \sqrt{x} \iff x \in \ ]4, +\infty[$

Uitwerking: De bestaansvoorwaarde is $x \geq 0$. Beide leden zijn positief. We mogen kwadrateren en de orde blijft bewaard. Na kwadrateren wordt de vergelijking $4 < x$. Beide voorwaarden tesamen geven als oplossingsverzameling $]4, +\infty[$.

2. $-2 < \sqrt{x} \iff x \in \ [0, +\infty[$

Uitwerking: De bestaansvoorwaarde is $x \geq 0$. Het linkerlid is negatief en het rechterlid is positief. We mogen niet kwadrateren. We hoeven ook niet te kwadrateren want voor elke $x \geq 0$ zal $\sqrt{x}$ groter zijn dan -2. De oplossingsverzameling is $[0, +\infty[$.

3. $2 < -\sqrt{x} \iff x \in$ geen oplossingen

Uitwerking: Het linkerlid is positief en het rechterlid is negatief. We mogen niet kwadrateren. We hoeven ook niet te kwadrateren want voor geen enkele x zal $-\sqrt{x}$ groter zijn dan 2. De vergelijking heeft geen oplossingen.

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Bestaansvoorwaarden en kwadrateringsvoorwaarden

4. $-2 < -\sqrt{x} \iff x \in [0,4[$

Uitwerking: De bestaansvoorwaarde is $x \geq 0$. Beide leden zijn negatief. We mogen kwadrateren maar de orde draait dan om. Na kwadrateren wordt de vergelijking $4 > x$. Beide voorwaarden tesamen geven als oplossingsverzameling $[0,4[$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Basisoefeningen ongelijkheden

Oefening 5.1.1. Toon aan dat voor elke $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ geldt dat $\frac{1}{\cos^2 x} + \sin^2 x \leqslant \frac{5}{2}$.

Uitwerking: Toon eerst aan dat voor elke $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ geldt dat $\sin^2 x \leqslant 1/2$ en $\frac{1}{\cos^2 x} \leqslant 2$.
Deze twee ongelijkheden verder lid aan lid optellen.

Oefening 5.1.2. Toon aan dat voor elke $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ waarbij $x < y$ geldt dat

$$\frac{1+2x-x^3}{x} > \frac{1+2y-y^3}{y}.$$

Uitwerking: Definieer de functie met voorschrift $f(x) = \frac{1+2x-x^3}{x}$. Nu is $f'(x) = -\frac{2x^3+1}{x^2}$, zodat de afgeleide strikt negatief is op $\mathbb{R}_0^+$. De functie f is dus strikt dalend op $\mathbb{R}_0^+$.

Oefening 5.1.3. Zij $\varepsilon > 0$ een strikt positief reëel getal en $n \in \mathbb{N}$ een natuurlijk getal dat voldoet aan $n > \left(\frac{7}{\varepsilon}\right)^2$.

Toon aan dat $\frac{7}{\sqrt{n}+3} < \varepsilon$.

Uitwerking: $\frac{7}{\sqrt{n}+3} < \frac{7}{\sqrt{n}} < \frac{7}{\frac{7}{\varepsilon}} = \varepsilon$
Vul zelf aan met de nodige verantwoordingen.

Oefening 5.1.4. Stel $R \in \mathbb{R}$ een willekeurig reëel getal en $n \in \mathbb{N}$ een natuurlijk getal dat voldoet aan $n \geqslant 3$ en $n > \frac{R+1}{2}$.

Toon aan dat $\frac{2n^2-3}{n} > R$.

Uitwerking: $\frac{2n^2-3}{n} \geqslant \frac{2n^2-n}{n} = \frac{n(2n-1)}{n} = 2n-1 > 2(\frac{R+1}{2}) - 1 = R$
Vul zelf aan met de nodige verantwoordingen.

Oefening 5.1.5. Zij $\varepsilon > 0$ een vast strikt positief reëel getal.
Zoek welke voorwaarden (in functie van ε) aan een natuurlijk getal $K \in \mathbb{N}$ moeten opgelegd worden opdat voor alle natuurlijke getallen $n \geqslant K$ zou gelden

1. $\frac{7}{n^2-2} < \varepsilon$;

Uitwerking: Neem bijvoorbeeld $K \geqslant 2$ en $K > \sqrt{\frac{7}{\varepsilon} + 2}$. (Andere voorwaarden zijn mogelijk).

2. $\frac{7}{n^2+2} < \varepsilon$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Basisoefeningen ongelijkheden

Uitwerking: Neem bijvoorbeeld $K > \sqrt{\frac{7}{\varepsilon}}$. (Andere voorwaarden zijn mogelijk).

Oefening 5.1.6. Toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Uitwerking: Vorm om tot $\sqrt{n+2} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1}$. Verder kwadrateren vereenvoudigen en nogmaals kwadrateren geeft een equivalente ongelijkheid die altijd voldaan is.

Oefening 5.1.7. Een rij reële getallen $u_0, u_1, u_2, \ldots$ waarvoor een index $K \in \mathbb{N}$ bestaat zodat

(a) voor elk natuurlijk getal $n \geqslant K$ geldt dat $u_n \leqslant u_{n+1}$ heet *stijgend vanaf de index* K.

(b) voor elk natuurlijk getal $n \geqslant K$ geldt dat $u_n \geqslant u_{n+1}$ heet *dalend vanaf de index* K.

Onderzoek of volgende rijen stijgend of dalend zijn vanaf een bepaalde index.

1. $u_n = \dfrac{2n-1}{3n+4}$: Stijgend vanaf $K = 0$

2. $u_n = \dfrac{n}{n^2+4}$: Dalend vanaf $K = 3$

3. $u_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$ met $n \in \mathbb{N}_0$: Stijgend vanaf $K = 0$

4. $u_n = \tan \dfrac{\pi}{4n}$ met $n \in \mathbb{N}_0$: Dalend vanaf $K = 0$

5. $u_n = \dfrac{10^n}{n!}$: Dalend vanaf $K = 10$

Oefening 5.1.8. Bepaal de parameter $r \in \mathbb{R}$ opdat volgende vierkantsvergelijking twee verschillende reële oplossingen zou hebben die beide groter zijn dan -1.

$$x^2 + rx - 1/2 = 0$$

Uitwerking: $r < 1/2$

Oefening 5.1.9. Zoek grafisch welke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ voldoen aan volgend stelsel.

1.
$$\begin{cases} x & < & y \\ x-1 & > & 0 \\ x+y & < & 3 \end{cases}$$

Uitwerking: De punten binnen de driehoek ABC zonder de randen, met $A = (1\ ,\ 2), B = (3/2\ ,\ 3/2)$ en $C = (1\ ,\ 1)$.

2.
$$\begin{cases} x-y+3 & \geqslant & 0 \\ 3x+y & < & 0 \\ x+2y+3 & > & 0 \end{cases}$$

Uitwerking: De punten binnen de driehoek ABC samen met de rand AB, met $A = (-3/4\ ,\ 9/4), B = (-3\ ,\ 0)$ en $C = (3/5\ ,\ -9/5)$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Extra oefeningen ongelijkheden

Oefening 5.2.1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid. Vergeet ook niet na te gaan voor welke $x \in \mathbb{R}$ beide leden gedefinieerd zijn.

1. $(x^2+x)^2 > (x^2+5)^2 \iff x \in]5,+\infty[$
2. $\sqrt{(x-1)^2} < x^2+4x-5 \iff x \in]-\infty,-6[\cup]1,+\infty[$
3. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2+27x-1}}{x} > 3 \iff x \in]-1,0[\cup]\dfrac{1}{27},1[$
4. $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}} > x-2 \iff x \in]-\infty,-2] \cup]0,+\infty[$

Oefening 5.2.2. Onderzoek telkens welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid.

1. $\dfrac{x^2+25}{6x^2-17x+12} \leqslant \dfrac{3x-4}{2x-3} + \dfrac{2x-3}{3x-4} \iff x \in]-\infty,0] \cup]4/3,3/2[\cup [3,+\infty[$
2. $\dfrac{3(x+2)^3}{x^2+7x+10} \geqslant \dfrac{x(x+2)^3}{x^2+7x+10} \iff x \in]-5,-2[\cup]-2,3]$

Oefening 5.2.3.

1. Bepaal alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $\dfrac{2-x}{x-3}$ de sinus is van een hoek. $x \in]-\infty,5/2]$
2. Onderzoek welke $x \in [-1,1]$ met $x \neq 0$ voldoen aan $\dfrac{\tan x^2}{\sin x} \leqslant \dfrac{1}{\cos x}$. $x \in [-1,0[\cup]0,1]$

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Oefening ongelijkheden 10(b)

Oefening 5.3.1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

$$\sqrt{x+3} < x-2$$

Oplossing: $x \in]\frac{5+\sqrt{21}}{2}, +\infty[$

Uitwerking: Bestaansvoorwaarde:

$$x \geq -3$$

- In het geval $x-2<0$ zijn er geen oplossingen want $\sqrt{x+3} \geq 0$
- In het geval $x-2 \geq 0$ mogen we kwadrateren en blijft de ongelijkheid behouden want beide leden zijn positief. De bestaansvoorwaarde $x \geq -3$ is ook voldaan in dit geval. Na kwadrateren wordt de ongelijkheid

$$\begin{array}{rcl} x+3 & < & (x-2)^2 \\ & \Updownarrow & \\ x+3 & < & x^2-4x+4 \\ & \Updownarrow & \\ 0 & < & x^2-5x+1 \end{array}$$

De nulpunten van x^2-5x+1 zijn $\frac{5-\sqrt{21}}{2}$ en $\frac{5+\sqrt{21}}{2}$.

De ongelijkheid $0 < x^2-5x+1$ geldt bijgevolg voor $x < \frac{5-\sqrt{21}}{2}$ en voor $x > \frac{5+\sqrt{21}}{2}$.

Merk op dat

$$\frac{5-\sqrt{21}}{2} < 2 < \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

Omat we in het geval $x \geq 2$ zitten, behoren $x \in \mathbb{R}$ die voldoen aan $x < \frac{5-\sqrt{21}}{2}$ niet tot de oplossing.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.59)

5.4 Oefeningen ongelijkheden en absolute waarde

5.4.1 Niveau 1

Oefening 5.4.1. Onderzoek achtereenvolgens voor welke $x \in \mathbb{R}$ volgende ongelijkheden gelden.

1. $x^2 - 4 < 0 \iff x \in]-2, 2[$
2. $\dfrac{1}{x^2-4} < 0 \iff x \in]-2, 2[$
3. $\dfrac{1}{4-x^2} > 0 \iff x \in]-2, 2[$
4. $100 - x < 0 \iff x \in]100, +\infty[$
5. $\dfrac{100-x}{x^2-4} < 0 \iff x \in]-2, 2[\cup]100, +\infty[$
6. $\dfrac{100+x}{x^2-4} < 0 \iff x \in]-\infty, -100[\cup]-2, 2[$
7. $-x < 0 \iff x \in]0, +\infty[$
8. $\dfrac{-x}{x^2-4} < 0 \iff x \in]-2, 0[\cup]2, +\infty[$

Oefening 5.4.2. Los volgende ongelijkheden op:

1. Welke reële getallen x voldoen aan $2x + 5 \geq 4x + 3$. Antwoord: $x \in]-\infty, 1]$

Uitwerking: $2x + 5 \geq 4x + 3 \Leftrightarrow 5 - 3 \geq 4x - 2x \Leftrightarrow 2 \geq 2x$, en beide leden delen door 2 geeft $1 \geq x$.

2. Welke reële getallen x voldoen aan $-2x \leq -4$. Antwoord: $x \in [2, +\infty[$

Oefening 5.4.3. Bereken (zonder rekenmachine) volgende absolute waarden.

1. $|2 - 9| = 7$
2. $|-2 - (-6)| = 4$
3. $\left|\dfrac{11}{10} - \dfrac{51}{10}\right| = 4$
4. $|\pi - 3\pi| = 2\pi$

Oefening 5.4.4. Los volgende vergelijkingen op.

1. $|x| = 5 \quad x \in \{-5, 5\}$
2. $|x - 3| = 7 \quad x \in \{-4, 10\}$

5.4.2 Niveau 2

Oefening 5.4.5. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid.

1. $2(x^2 + 1) \leqslant 5x \iff x \in [1/2, 2]$
2. $x^2(x^2 + 3) < (x + 6)(x^2 + 3) \iff x \in]-2, 3[$

Uitwerking: Omdat $x^2 + 3 > 0$ kunnen we beide leden van de ongelijkheid hierdoor delen (want $\neq 0$) en blijft de orde bewaard (want > 0). Zo herleiden we de opgave tot de ongelijkheid

$$x^2 - x - 6 < 0.$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Oefeningen ongelijkheden en absolute waarde

3. $\dfrac{x^2+5x+6}{8-4x} < 0 \iff x \in]-3,-2[\cup]2,+\infty[$

4. $\dfrac{-3x+6}{x^2-x} < 0 \iff x \in]0,1[\cup]2,+\infty[$

5. $\dfrac{2-x^2}{5(x^2+3)} > 0 \iff x \in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$

6. $\dfrac{1}{x} < 3 \iff x \in]-\infty,0[\cup]1/3,+\infty[$

Uitwerking: We geven enkel de uitwerking die begint met beide leden vermenigvuldigen met x, maar je kan de oefening ook oplossen door het tekenverloop te zoeken van een rationale functie. De eerste belangrijke stap is de bestaansvoorwaarde opschrijven. Omdat de noemer gelijk is aan x moet x verschillend zijn van 0: Dit is de bestaansvoorwaarde. We mogen niet zomaar beide leden vermenigvuldigen met x, omdat we het teken van x niet kennen. Hiervoor moeten we een gevalsonderscheid maken.
Bekijk eerst het geval $x > 0$. In dit geval kunnen we de ongelijkheid herschrijven als $\frac{1}{3} < x$ (aangezien het teken niet verandert). Dus er moet gelden dat $x > \frac{1}{3}$ en $x > 0$ (het huidige geval). Dit levert het interval $\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$ als eerste deel van de oplossingsverzameling.
Bekijk nu het geval $x < 0$. Dan wisselt het teken en vinden we $\frac{1}{3} > x$. Dus nu moet $x < \frac{1}{3}$ en $x < 0$ (het huidige geval). Dit levert het interval $]-\infty,0[$ als deel van de oplossingsverzameling.
We hebben alle mogelijke gevallen gehad, en de oplossingsverzameling is de unie van de halfrechten die we hebben gevonden

$$V =]-\infty,0[\cup \left]\frac{1}{3},+\infty\right[.$$

7. $\dfrac{x}{x+1} \geq -2 \iff x \in]-\infty,-1[\cup \left[\frac{-2}{3},+\infty\right[$

Uitwerking: We geven enkel de uitwerking die begint met beide leden vermenigvuldigen met $x+1$, maar je kan de oefening ook oplossen door het tekenverloop te zoeken van een rationale functie. We mogen *niet* zomaar linker- en rechterlid vermenigvuldigen met $x+1$, want we kennen het teken niet van $x+1$. We maken dus een *gevalsonderscheid*:

- Bestaansvoorwaarde: $x \neq -1$.
- $x+1 > 0$: We vermenigvuldigen links en rechts met $x+1$. De ongelijkheid blijft behouden omdat $x+1$ positief is.

$$\begin{array}{rcll} x & \geq & -2(x+1) & \\ & \Updownarrow & & (\ 2x \text{ optellen }) \\ 3x & \geq & -2 & \\ & \Updownarrow & & (\text{ delen door } 3\ ) \\ x & \geq & -\frac{2}{3} & \end{array}$$

- $x+1 < 0$: We vermenigvuldigen links en rechts met $x+1$. De ongelijkheid keert om omdat $x+1$ negatief is.

$$\begin{array}{rcll} x & \leq & -2(x+1) & \\ & \Updownarrow & & (\ 2x \text{ optellen }) \\ 3x & \leq & -2 & \\ & \Updownarrow & & (\text{ delen door } 3\ ) \\ x & \leq & -\frac{2}{3} & \end{array}$$

Dus

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Oefeningen ongelijkheden en absolute waarde

- in het geval dat $x+1>0$ (of $x>-1$), dan wordt de ongelijkheid $x \geq -\frac{2}{3}$. Dit levert het interval $\left[\frac{-2}{3}, +\infty\right[$ als eerste deel van de oplossingsverzameling.
- in het geval dat $x+1<0$ (of $x<-1$), dan wordt de ongelijkheid $x \leq -\frac{2}{3}$. Dat is natuurlijk automatisch het geval: Als $x<-1$ dan is ook $x \leq -\frac{2}{3}$. Dus, als $x<-1$ dan is automatisch $\frac{x}{x+1} \geq -2$. Dit levert het interval $]-\infty,-1[$ als tweede deel van de oplossingsverzameling.

Dus is de oplossingsverzameling is $V =]-\infty,-1[\cup \left[\frac{-2}{3}, +\infty\right[$.

8. $\frac{(x-5)^2}{x-4} < \frac{x-5}{x-4} \iff x \in]-\infty, 4[\cup]5, 6[$

9. $\frac{2x}{x-1} \leqslant \frac{x}{x-2} \iff x \in [0,1[\cup]2,3]$

Oefening 5.4.6. Los volgende vergelijkingen op.

1. $|2x+5| = 4 \quad x \in \{-9/2, -1/2\}$

Uitwerking: Dit betekent dat $2x+5=4$ of $2x+5=-4$. De eerste gelijkheid herschrijft zich tot $x=-1/2$ en de tweede tot $x=-9/2$.

2. $\left|\frac{x}{2}-1\right| = 1 \quad x \in \{0,4\}$

Oefening 5.4.7. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $|x-4| < 2$. $x \in]2,6[$

2. $|4-x| \leq 2$. $x \in [2,6]$

3. $|3x| < 6$. $x \in]-2,2[$

4. $|3x-4| < 5$. $x \in]-\frac{1}{3}, 3[$

5. $|3(x-1)| < 2$. $x \in]\frac{1}{3}, \frac{5}{3}[$

6. $\left|\frac{1}{3}(1-x)\right| < 1$. $x \in]-2,4[$

Uitwerking: De absolute waarde van een product is het product van de absolute waarden: $\left|\frac{1}{3}(1-x)\right| = \frac{1}{3}|1-x|$. Bijgevolg kunnen we de hele ongelijkheid met 3 vermenigvuldigen om te vinden dat $|1-x|<3$. De eigenschap uit de hint zegt dan dat dit overeenkomt met $-3<1-x<3 \Leftrightarrow -4<-x<2 \Leftrightarrow -2<x<4$.

Oefening 5.4.8. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $|\sqrt{x}+3| < 9$. $x \in [0,36[$

Uitwerking: De bestaansvoorwaarde is $x \geq 0$. De eenvoudigste manier om deze ongelijkheid op te lossen is opmerken dat we de absolute waardetekens kunnen laten vallen omdat $\sqrt{x}+3$ altijd groter dan nul is, aangezien een vierkantswortel altijd positief is. De ongelijkheid wordt dus eigenlijk $\sqrt{x}<6$, en aangezien

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Oefeningen ongelijkheden en absolute waarde

beide leden positief zijn kunnen we kwadrateren. Dit geeft dan $x < 36$, en zo wordt de oplossingsverzameling $[0, 36[$ (waar we de bestaansvoorwaarde ook hebben gebruikt).

2. $|3 - \sqrt{x}| < 1$. $x \in]4, 16[$

Uitwerking: Omdat de vierkantswortel van x genomen wordt hebben we de bestaansvoorwaarde $x \geq 0$. We gebruiken de eigenschap $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$ en herschrijven de ongelijkheid met de absolute waarde als

$$-1 < 3 - \sqrt{x} < 1\,.$$

We trekken van elk lid 3 af

$$-4 < -\sqrt{x} < -2\,.$$

en vermenigvuldigen alles met -1 (let er op dat alle tekens wisselen)

$$4 > \sqrt{x} > 2\,.$$

Dit kunnen we splitsen in 2 ongelijkheden: enerzijds hebben we dat $4 > \sqrt{x}$, en anderzijds hebben we dat $\sqrt{x} > 2$. In beide gevallen zijn de twee leden positief, zodat we mogen kwadrateren. Dit geeft de twee ongelijkheden $16 > x$ en $x > 4$. Aan de bestaansvoorwaarde $x \geq 0$ is al zeker voldaan als $x > 4$, en dus vinden we als uiteindelijke oplossing $4 < x < 16$, dus de oplossingsverzameling is $]4, 16[$.

3. $\left|\dfrac{1 - \sqrt{4x+1}}{4}\right| < 1$. $x \in [-\frac{1}{4}, 6[$

Uitwerking: De bestaansvoorwaarde voor de wortel is $4x + 1 \geq 0$, oftewel $x \geq -\frac{1}{4}$. We gebruiken $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$, en herschrijven de ongelijkheid hiermee dan als

$$-1 < \frac{1 - \sqrt{4x+1}}{4} < 1\,.$$

We vermenigvuldigen elk lid met 4

$$-4 < 1 - \sqrt{4x+1} < 4\,,$$

trekken van elk lid 1 af

$$-5 < -\sqrt{4x+1} < 3\,,$$

en vermenigvuldigen alles met -1 (let er op dat alle tekens wisselen)

$$-3 < \sqrt{4x+1} < 5\,.$$

De vierkantswortel is altijd positief, zodat de linkerongelijkheid overbodig wordt. De rechterongelijkheid blijft, maar we kunnen beide leden dan kwadrateren om te vinden dat $4x+1 < 25$, wat herleid kan worden tot $x < 6$. Dit combineren met de bestaansvoorwaarde $\left(x \geq -\frac{1}{4}\right)$ levert dan de oplossingsverzameling $[-\frac{1}{4}, 6[$.

4. $\left|\dfrac{3 + \sqrt{1-x}}{2}\right| < 1$ geen oplossingen

Uitwerking: De bestaansvoorwaarde drukt uit dat wat onder de vierkantswortel positief moet zijn. Dit betekent dat $1 - x \geq 0$, oftewel $x \leq 1$. We herschrijven de ongelijkheid met de absolute waarde m.b.v. de eigenschap $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$ als

$$-1 < \frac{3 + \sqrt{1-x}}{2} < 1\,,$$

wat we dan kunnen herleiden tot

$$-5 < \sqrt{1-x} < -1\,,$$

door eerst alles te vermenigvuldigen met 2 en er vervolgens 3 van af te trekken. We vinden dus dat de vierkantswortel van een zekere uitdrukking kleiner moet zijn dan een negatief getal, wat uiteraard niet kan

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Oefeningen ongelijkheden en absolute waarde

aangezien een vierkantswortel altijd positief is. Er voldoet dus geen enkele $x \in \mathbb{R}$ aan de ongelijkheid, en we zeggen dus dat de oplossingsverzameling de lege verzameling $\emptyset$ is.

Je had al direct kunnen zien dat deze ongelijkheid nooit op zou gaan: Wat binnen de absolute waardetekens staat is altijd positief, zodat we deze absolute waardetekens kunnen laten vallen. De ongelijkheid is dan eigenlijk

$$\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{1-x}}{2} < 1\,.$$

Maar hier tellen we iets positief (de wortel gedeeld door 2) op bij $3/2 = 1.5$. De som is dus altijd groter dan 1.5, en dus nooit kleiner dan 1.

Oefening 5.4.9. Onderzoek welke $p > 0$ voldoen aan $\left|\frac{1}{12}\left(7 - \sqrt{1+48p}\right)\right| < 1$. $p \in]0, \frac{15}{2}[$

Uitwerking: Omdat $p > 0$ is $1 + 48p > 0$ en is er geen bestaansvoorwaarde nodig. We gebruiken de eigenschap $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$ en herschrijven de ongelijkheid als

$$-1 < \frac{1}{12}\left(7 - \sqrt{1+48p}\right) < 1$$

We vermenigvuldigen elk lid met 12

$$-12 < 7 - \sqrt{1+48p} < 12$$

en trekken van elk lid 7 af

$$-19 < -\sqrt{1+48p} < 5$$

De rechterongelijkheid is automatisch voldaan. Bij het kwadrateren van de linkerongelijkheid draait het ongelijkheidsteken om (we kwadrateren twee negatieve waarden) en dit geeft

$$\begin{aligned} 1 + 48p &< 361 \\ p &< \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

5.4.3 Niveau 3

Oefening 5.4.10. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid. Vergeet ook niet na te gaan voor welke $x \in \mathbb{R}$ beide leden gedefinieerd zijn.

1. $\dfrac{x-2}{\sqrt{x+1}} < 2 \iff x \in]-1, 8[$

2. $\sqrt{x+3} < x - 2 \iff x \in \left]\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right[$

Uitwerking: We beginnen weer eerst met de bestaansvoorwaarde op te schrijven. Wat onder de wortel staat moet positief zijn, zodat $x + 3 \geq 0$, oftewel $x \geq -3$: Dit is de bestaansvoorwaarde.
Anderzijds willen we beide leden kwadrateren om de ongelijkheid verder te kunnen uitwerken. Omdat een vierkantswortel positief is zal voor onze uiteindelijke oplossingen moeten gelden dat $x - 2 > 0$, juist omdat $0 \leq \sqrt{x+3} < x - 2$. Beide leden zullen dus positief moeten zijn, en dan bewaart beide leden kwadrateren de orde (omdat de functie $f : x \mapsto x^2$ strikt stijgend is voor positieve getallen). We kunnen de ongelijkheid dus (onder de bestaansvoorwaarde $x \geq -3$ en de andere gevonden voorwaarde $x - 2 > 0$) herschrijven als $x + 3 < (x-2)^2$. Dit kunnen we herwerken

$$\begin{aligned} & x + 3 < (x-2)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x + 3 < x^2 - 4x + 4 \\ \Leftrightarrow \quad & -x^2 + 5x - 1 < 0\,. \quad (*) \end{aligned}$$

De nulpunten van deze tweedegraadsveelterm zijn $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$ en $x_2 = \dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$, en dus vinden we met de

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Oefeningen ongelijkheden en absolute waarde

tekentabel dat de ongelijkheid $(*)$ opgaat voor

$$x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[\,.$$

We weten dat $\sqrt{21}$ tussen 4 en 5 ligt, want $\sqrt{16} = 4$ en $\sqrt{25} = 5$. Dus ligt $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$ tussen 0 en 1/2 (inderdaad: vervang $\sqrt{21}$ door 4 en 5 in de uitdrukking voor x_1), en x_1 is dus in elk geval kleiner dan 2. De gevonden voorwaarde $x - 2 > 0$ (of $x > 2$) is nergens voldaan in het interval $]-\infty, x_1[$. Maar x_2 is wel groter dan 2, zodat alle getallen in $]x_2, +\infty[$ wel aan beide voorwaarden voldoet, en dus echte oplossingen zijn. De oplossingsverzameling is dus $V =]\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}, +\infty[$.

3. $\sqrt[3]{4x} \leq x \iff x \in [-2, 0] \cup [2, +\infty[$

Uitwerking: Merk eerst en vooral op dat we hier geen bestaansvoorwaarde hebben: de derdemachtswortel van een reëel getal bestaat altijd. We zouden beide leden tot de derde macht willen verheffen om van de wortel af te geraken. De functie $f : x \mapsto x^3$ is stijgend op heel $\mathbb{R}$, zodat het teken bewaard blijft als we beide leden tot de derde macht verheffen. De op te lossen ongelijkheid is dus volledig evenwaardig met de ongelijkheid

$$4x \leq x^3\,,$$

vanwege de redenen hierboven besproken. Het is nu verleidelijk om een x weg te delen langs beide kanten, maar dit mag natuurlijk niet zomaar, en we hebben dus een gevalsonderscheid nodig.

- Als $x = 0$ mogen we niet delen door x. Maar $x = 0$ invullend in de ongelijkheid geeft $0 \leq 0$, wat klopt. We onthouden dus alvast dat 0 tot de oplossingsverzameling behoort.
- Als $x > 0$ mogen we een factor x wegdelen, en moeten we het ongelijkheidsteken niet veranderen. Zo krijgen we $4 \leq x^2$, oftewel $x^2 - 4 \geq 0$, wat we met een tekentabel kunnen uitwerken. We vinden $x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$, maar aangezien we in het geval $x > 0$ werken houden we enkel $[2, +\infty[$ over voor dit geval.
- Als $x < 0$ mogen we ook een factor x wegdelen, maar moeten we wel het ongelijkheidsteken omdraaien. We vinden zo $4 \geq x^2$, oftewel $x^2 - 4 \leq 0$, wat we met een tekentabel kunnen oplossen. De oplossing is het interval $[-2, 2]$, maar aangezien we in het geval $x < 0$ werken vinden we enkel $[-2, 0[$.

Al deze deeloplossingen samenbrengen levert als oplossingsverzameling

$$V = [-2, 0[\cup \{0\} \cup [2, +\infty[\,,$$

en we kunnen dit nog iets mooier herschrijven door het singleton $\{0\}$ te gebruiken om het ene interval gesloten te maken (het haakje omdraaien). Dit geeft dan de uiteindelijke oplossingsverzameling

$$V = [-2, 0] \cup [2, +\infty[\,.$$

4. $(x+1)^3 < 27 \iff x \in]-\infty, 2[$

Oefening 5.4.11. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $|x^2 - 2| < 1. \iff x \in \left]-\sqrt{3}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{3}\right[$

Uitwerking: We herschrijven de ongelijkheid met de absolute waarde als $-1 < x^2 - 2 < 1$. We splitsen dit in twee ongelijkheden, en gaan hier de tekentabel voor bepalen. De eerste ongelijkheid is dus $-1 < x^2 - 2$, oftewel $0 < x^2 - 2 + 1$. De tweede ongelijkheid is $x^2 - 2 < 1$, oftewel $x^2 - 2 - 1 < 0$. De nulpunten en het verloop worden samengevat in volgende tekentabel.

x		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$	
x^2-1	+	+	+	0	−	0	+	+	+
x^2-3	+	0	−	−	−	−	−	0	+

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Oefeningen ongelijkheden en absolute waarde

De oplossingen moeten voldoen aan $x^2 - 1 > 0$ en $x^2 - 3 < 0$, en uit de tabel zien we dan dat de oplossingsverzameling $V = \left]-\sqrt{3}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{3}\right[$ is.

2. $|x^2 - 3| < 2x. \quad \Longleftrightarrow \quad x \in]1, 3[$

Uitwerking: Aangezien de absolute waarde van een getal altijd positief is kunnen alvast enkel strikt positieve $x \in \mathbb{R}$ aan de gelijkheid voldoen: $2x$ moet immers groter zijn dan de absolute waarde van een uitdrukking, en dus al zeker positief zijn. We gebruiken dan de eigenschap $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$ om de absolute waarde te herschrijven: De ongelijkheid wordt dan

$$-2x < x^2 - 3 < 2x\,.$$

Dit komt dan weer neer op het bepalen van de tekentabel van 2 tweedegraadsfuncties. Om deze tekentabel op te stellen bereken je de discriminant en de nulpunten van beide tweedegraadsfuncties. We zoeken de $x \in \mathbb{R}$ zodat $0 < x^2 + 2x - 3$ en $x^2 - 2x - 3 < 0$, en lezen de oplossing af uit volgende tabel:

x		-3		-1		1		3	
$x^2 + 2x - 3$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 2x - 3$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

We vinden dus dat x moet behoren tot het interval $]1, 3[$ om aan de ongelijkheid te voldoen. Alle getallen in dit interval zijn positief, zodat ook aan onze opmerking in het begin voldaan wordt.

CC BY-NC-SA 4.0

5.5 Oefeningen rationale functies

Oefening 5.5.1.

1. $\frac{1}{x} < 3 \iff x \in]-\infty, 0[\cup]1/3, +\infty[$

Uitwerking:

- Ofwel brengen we de term uit het rechterlid naar het linkerlid zodat we vergelijken met nul en lossen de oefening verder op door het tekenverloop van een rationale functie uit te voeren:
  $\frac{1}{x} < 3 \iff \frac{1-3x}{x} < 0$

x		0		$\frac{1}{3}$	
$1-3x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{1-3x}{x}$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$

  We lezen af dat de oplossingsverzameling $V =]-\infty, 0[\cup \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$ is.

- Ofwel beginnen we met beide leden te vermenigvuldigen met x. De eerste belangrijke stap is de bestaansvoorwaarde opschrijven. Omdat de noemer gelijk is aan x moet x verschillend zijn van 0: Dit is de bestaansvoorwaarde. We mogen niet zomaar beide leden vermenigvuldigen met x, omdat we het teken van x niet kennen. Hiervoor moeten we een gevalsonderscheid maken.
  Bekijk eerst het geval $x > 0$. In dit geval kunnen we de ongelijkheid herschrijven als $\frac{1}{3} < x$ (aangezien het teken niet verandert). Dus er moet gelden dat $x > \frac{1}{3}$ en $x > 0$ (het huidige geval). Dit levert het interval $\left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$ als eerste deel van de oplossingsverzameling.
  Bekijk nu het geval $x < 0$. Dan wisselt het teken en vinden we $\frac{1}{3} > x$. Dus nu moet $x < \frac{1}{3}$ en $x < 0$ (het huidige geval). Dit levert het interval $]-\infty, 0[$ als deel van de oplossingsverzameling.
  We hebben alle mogelijke gevallen gehad, en de oplossingsverzameling is de unie van de halfrechten die we hebben gevonden
  $$V =]-\infty, 0[\cup \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[.$$

2. $\frac{x}{x+1} \geq -2 \iff x \in]-\infty, -1[\cup \left[\frac{-2}{3}, +\infty\right[$

Uitwerking: We geven enkel de uitwerking die begint met beide leden vermenigvuldigen met $x+1$, maar je kan de oefening ook oplossen door het tekenverloop te zoeken van een rationale functie. We mogen *niet* zomaar linker- en rechterlid vermenigvuldigen met $x+1$, want we kennen het teken niet van $x+1$. We maken dus een *gevalsonderscheid*:

- Bestaansvoorwaarde: $x \neq -1$.
- $x+1 > 0$: We vermenigvuldigen links en rechts met $x+1$. De ongelijkheid blijft behouden omdat $x+1$ positief is.
  $$\begin{array}{rcll} x & \geq & -2(x+1) & \\ & \Updownarrow & & (\ 2x \text{ optellen }) \\ 3x & \geq & -2 & \\ & \Updownarrow & & (\ \text{delen door } 3\ ) \\ x & \geq & -\frac{2}{3} & \end{array}$$
- $x+1 < 0$: We vermenigvuldigen links en rechts met $x+1$. De ongelijkheid keert om omdat $x+1$

5.5 Oefeningen rationale functies

negatief is.

$$\begin{array}{rcll} x & \leq & -2(x+1) & \\ & \Updownarrow & & (\ 2x \text{ optellen}) \\ 3x & \leq & -2 & \\ & \Updownarrow & & (\ \text{delen door } 3) \\ x & \leq & -\frac{2}{3} & \end{array}$$

Dus

- in het geval dat $x+1>0$ (of $x>-1$), dan wordt de ongelijkheid $x \geq -\frac{2}{3}$. Dit levert het interval $\left[\frac{-2}{3}, +\infty\right[$ als eerste deel van de oplossingsverzameling.
- in het geval dat $x+1<0$ (of $x<-1$), dan wordt de ongelijkheid $x \leq -\frac{2}{3}$. Dat is natuurlijk automatisch het geval: Als $x<-1$ dan is ook $x \leq -\frac{2}{3}$. Dus, als $x<-1$ dan is automatisch $\frac{x}{x+1} \geq -2$. Dit levert het interval $]-\infty,-1[$ als tweede deel van de oplossingsverzameling.

Dus is de oplossingsverzameling is $V =]-\infty,-1[\cup \left[\frac{-2}{3}, +\infty\right[$.

3. $\frac{(x-5)^2}{x-4} < \frac{x-5}{x-4} \iff x \in]-\infty, 4[\cup]5, 6[$

Uitwerking: Als je de factoren $x-4$ en $x-5$ wil schrappen moet je gevalsonderscheidingen maken. Eenvoudiger is

$$\frac{(x-5)^2}{x-4} < \frac{x-5}{x-4} \iff \frac{(x-5)^2-(x-5)}{x-4} < 0 \iff \frac{(x-5)(x-5-1)}{(x-4)} < 0$$

x		4		5		6	
$x-5$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-6$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(x-5)(x-6)}{x-4}$	$-$	|	$+$	0	$-$	0	$+$

De oplossingsverzameling is $V =]-\infty, 4[\cup]5, 6[$

4. $\frac{2x}{x-1} \leqslant \frac{x}{x-2} \iff x \in [0, 1[\cup]2, 3]$

Oefening 5.5.2. Onderzoek achtereenvolgens voor welke $x \in \mathbb{R}$ volgende ongelijkheden gelden.

1. $\frac{1}{4-x^2} > 0 \iff x \in]-2, 2[$

2. $\frac{100-x}{x^2-4} < 0 \iff x \in]-2, 2[\cup]100, +\infty[$

3. $\frac{100+x}{x^2-4} < 0 \iff x \in]-\infty, -100[\cup]-2, 2[$

4. $\frac{-x}{x^2-4} < 0 \iff x \in]-2, 0[\cup]2, +\infty[$

5. $\frac{-3x+6}{x^2-2} < 0 \iff x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[\cup]2, +\infty[$

6. $\frac{x^2+5x+6}{8-4x} < 0 \iff x \in]-3, -2[\cup]2, +\infty[$

CC BY-NC-SA 4.0

5.5 Oefeningen rationale functies

7. $\dfrac{2-x^2}{5(x^2+3)} > 0 \iff x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$

Oefening 5.5.3. Onderzoek telkens welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid.

1. $\dfrac{x^2+25}{6x^2-17x+12} \leqslant \dfrac{3x-4}{2x-3} + \dfrac{2x-3}{3x-4} \iff x \in]-\infty, 0] \cup]4/3, 3/2[\cup [3, +\infty[$

2. $\dfrac{3(x+2)^3}{x^2+7x+10} \geqslant \dfrac{x(x+2)^3}{x^2+7x+10} \iff x \in]-5, -2[\cup]-2, 3]$

CC BY-NC-SA 4.0

5.6 Oefeningen ongelijkheden veeltermen

Oefening 5.6.1. Los volgende ongelijkheden op:

1. Geef alle gehele getallen x die voldoen aan $4 \leq x < 7$. Antwoord: $4, 5, 6$

2. Welke reële getallen x voldoen aan $x + 5 < 7$?

Meerkeuze:

(a) $[0, 2[$

(b) $]-\infty, 2[$ ✓

(c) $]-\infty, 2]$

(d) $]-2, 7[$

Uitwerking: We tellen bij beide leden -5 op, en dit geeft $x < 2$.

3. Welke reële getallen x voldoen aan $2x + 5 \geq 4x + 3$? Antwoord: $x \in]-\infty, 1]$

Uitwerking: $2x + 5 \geq 4x + 3 \Leftrightarrow 5 - 3 \geq 4x - 2x \Leftrightarrow 2 \geq 2x$, en beide leden delen door 2 geeft $1 \geq x$.

4. Welke reële getallen x voldoen aan $-2x \leq -4$? Antwoord: $x \in [2, +\infty[$

Oefening 5.6.2. Los onderstaande ongelijkheden van de eerste graad op.

1. $x - 8 < 4$ $x < 4 + 8 \Leftrightarrow x < 12$ dus $x \in]-\infty, 12[$

2. $-2x \leq 6$ $-x \leq 3 \Leftrightarrow x \geq -3$ dus $x \in [-3, +\infty[$

3. $-2(x + 3) > 4$ $x + 3 < -2 \Leftrightarrow x < -5$ dus $x \in]-\infty, -5[$

4. $-5x + 1 \geq 3x + 17$ $-8x \geq 16 \Leftrightarrow x \leq -2$ dus $x \in]-\infty, -2]$

5. $-\frac{5}{2}x - 2 \geq 4 - \frac{1}{4}x$ $x \leq -\frac{8}{3}$ dus $x \in \left]-\infty, -\frac{8}{3}\right]$

6. $\frac{1}{2}x + 1 < 6 - \frac{1}{3}x$ $x < 6$ dus $x \in]-\infty, 6[$

7. $-3(x - 4) < -x + 9$ $x > \frac{3}{2}$ dus $x \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

Oefening 5.6.3. Los onderstaande ongelijkheden van de tweede graad op.

1. $(x - 8)^2 > 2x - 16$ $x \in]-\infty, 8[\cup]10, +\infty[$

2. $4x^2 \leq 12x - 9$ De enige oplossing is: $x = \frac{3}{2}$

3. $-t^2 + 2t > 1$ Er zijn geen oplossingen

4. $2x^2 - 8x + 8 \geq 0$ De oplossingenverzameling is $\mathbb{R}$. Alle reële waarden voldoen aan de ongelijkheid.

Oefening 5.6.4. Los onderstaande hogeregraadsongelijkheden op.

1. $x^3 - 4x^2 + x + 6 \leq 0$ $x \in]-\infty, -1] \cup [2, 3]$

2. $x^5 + x^4 - x - 1 > 0$ $x \in]1, +\infty[$

3. $8x^4 + 6x^3 - 15x^2 - 16x - 3 < 0$ $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right[$

CC BY-NC-SA 4.0

5.6 Oefeningen ongelijkheden veeltermen

4. $x^6 - x^5 - 2x^3 + x^2 + 3x - 2 \geq 0$ $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

CC BY-NC-SA 4.0

5.7 Oefeningen tekenverloop van rationale functies

Oefening 5.7.1. Onderzoek achtereenvolgens voor welke $x \in \mathbb{R}$ volgende ongelijkheden gelden.

1. $x^2 - 4 < 0 \iff x \in]-2, 2[$
2. $\dfrac{1}{x^2 - 4} < 0 \iff x \in]-2, 2[$
3. $\dfrac{1}{4 - x^2} > 0 \iff x \in]-2, 2[$
4. $100 - x < 0 \iff x \in]100, +\infty[$
5. $\dfrac{100 - x}{x^2 - 4} < 0 \iff x \in]-2, 2[\cup]100, +\infty[$
6. $\dfrac{100 + x}{x^2 - 4} < 0 \iff x \in]-\infty, -100[\cup]-2, 2[$
7. $-x < 0 \iff x \in]0, +\infty[$
8. $\dfrac{-x}{x^2 - 4} < 0 \iff x \in]-2, 0[\cup]2, +\infty[$

Oefening 5.7.2. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ volgende ongelijkheden gelden.

1. $\dfrac{-3x + 6}{x^2 - 2} < 0 \iff x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[\cup]2, +\infty[$
2. $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{8 - 4x} < 0 \iff x \in]-3, -2[\cup]2, +\infty[$
3. $\dfrac{2 - x^2}{5(x^2 + 3)} > 0 \iff x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$

CC BY-NC-SA 4.0

5.8 Zelftest ongelijkheden

Oefening 5.8.1. Los volgende ongelijkheden op:

1. Geef alle gehele getallen x die voldoen aan $4 \leq x < 7$. Antwoord: $4, 5, 6$

2. Welke reële getallen x voldoen aan $x + 5 < 7$.

Meerkeuze:

(a) $[0, 2[$

(b) $]-\infty, 2[$ ✓

(c) $]-\infty, 2]$

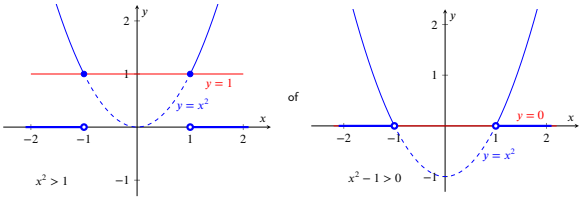
(d) $]-2, 7[$

3. Welke reële getallen x voldoen aan $2x + 5 \geq 4x + 3$. Antwoord: $[1, +\infty[$

4. Welke reële getallen x voldoen aan $-2x \leq -4$. Antwoord: $[2, +\infty[$

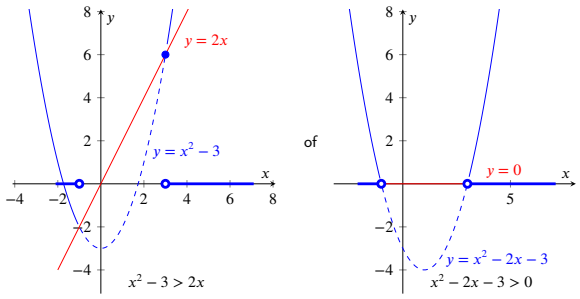
5. Welke reële getallen x voldoen aan $x^2 > 1$. Maak een tekening. Antwoord: $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

Feedback:



6. Welke reële getallen x voldoen aan $x^2 - 3 > 2x$. Maak een tekening. Antwoord: $]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$

Feedback:



7. Bereken welke reële getallen x voldoen aan $\dfrac{x+4}{x-3} < 2$.
(Uitdaging) Probeer daarna eventueel ook een tekening te maken. Antwoord: $]-\infty, 3\,[\cup]10, +\infty\,[$

Feedback: Deze oefening wordt als voorbeeld behandeld bij ongelijkheden

Oefening 5.8.2. (Uitdaging) Los volgende ongelijkheden op:
Voor deze oefening moet je ook tweedegraads vergelijkingen kunnen oplossen.

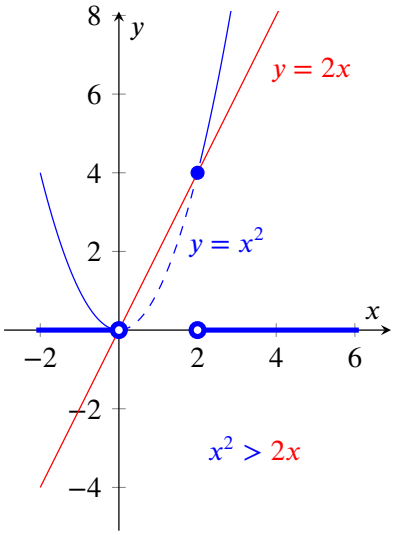
1. Bereken welke reële getallen x voldoen aan $x^2 > 2x$.

CC BY-NC-SA 4.0

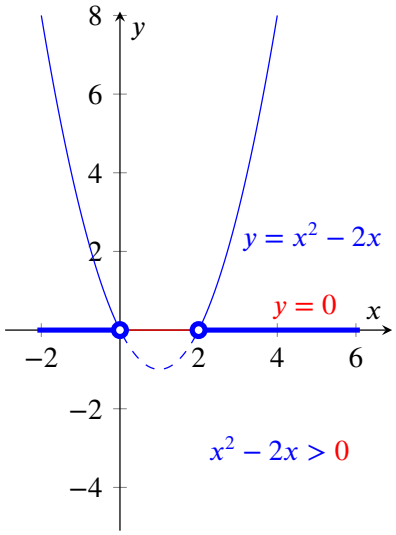
5.8 Zelftest ongelijkheden

Maak daarna een tekening. Antwoord: $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

Feedback:



of



CC BY-NC-SA 4.0