KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Xoverzicht: Meetkunde

(Versie 2026/10/26.1)

Inhoudsopgave

KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Module 1
Meetkunde: overzichten/samenvattingen

(Versie 2026/10/26.1)

1.1 Vlakke meetkunde: basis

In deze sectie vatten we de belangrijkste eigenschappen van driehoeken, de cirkel en rechten samen.

1.1.1 Driehoeken

Eigenschap 1.1.1 (Willekeurige driehoeken).

(a) De oppervlakte van een driehoek is
$$\frac{\text{basis} \times \text{hoogte}}{2}$$

(b) De som van de hoeken in een driehoek is $180°$ of π:
$\alpha + \beta + \gamma = \pi$

(c) Sinusregel
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

(d) Cosinusregel
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma$

Eigenschap 1.1.2 (Rechthoekige driehoeken). Voor een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden x en y, schuine zijde r en θ de hoek ingesloten tussen x en r, geldt:

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ (Stelling van Pythagoras)}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r}\left(= \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}\right)$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r}\left(= \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}\right)$$
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}\left(= \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}\right)$$

Eigenschap 1.1.3 (gelijkbenige driehoek).

- Bij een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk.
- Gevolg: de hoeken van een gelijkzijdige driehoek meten $60°$ of $\frac{\pi}{3}$

1.1.2 De cirkel

Een cirkel met middelpunt O en straal r is de verzameling van alle punten die op een afstand r van het punt O liggen. De belangrijkste eigenschappen van een cirkel zijn:

Eigenschap 1.1.4 (cirkel).

Voor een cirkel (met straal r) geldt:

(a) De omtrek is $2\pi r$.

(b) De oppervlakte is πr^2.

(c) De raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

CC BY-NC-SA 4.0

(d) Als je op een cirkel met straal r een boog s tekent die vanuit het middelpunt O onder een hoek α wordt gezien, dan is de booglengte s gegeven door αr, met de hoek α uitgedrukt in radialen.

(e) Een omtrekshoek meet de helft van de middelpuntshoek op dezelfde boog.

speciaal geval: de omtrekshoek op een halve cirkel is $90°$ of $\frac{\pi}{2}$

1.1.3 Rechten

Eigenschap 1.1.5 (Overstaande hoeken)**.** Overstaande hoeken bij twee snijdende rechten zijn gelijk.

Eigenschap 1.1.6 (Stelling van Thales)**.**

De evenwijdige projectie behoudt de verhouding van evenwijdige lijnstukken: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Eigenschap 1.1.7 (Twee evenwijdige rechten en een snijlijn)**.**

Als twee evenwijdige rechten gesneden worden door een derde rechte dan zijn:

- elke twee overeenkomstige hoeken gelijk
- elke twee verwisselende binnenhoeken gelijk
- elke twee verwisselende buitenhoeken gelijk
- elke twee binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn supplementair
- elke twee buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn supplementair

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Vlakke meetkunde: rechten

De meest eenvoudige 'figuren' in het vlak zijn rechten. We bestuderen ze hier vanuit een algebraïsch standpunt, in het cartesische vlak $\mathbb{R}^2$.

Definitie 1.2.1. De oplossingsverzameling van een vergelijking van de vorm $ax + by + c = 0$ met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en a en b niet beide 0 noemen we een **rechte**.

We noteren $L \leftrightarrow ax + by + c = 0$, en lezen '$L$ heeft als vergelijking $ax + by + c = 0$'.

Voorbeeld 1.2.1 (Basisvoorbeelden)**.**

- De rechte $L_1 \leftrightarrow y = 0$ is de x-as, $L_1 = \{((t, 0)|t \in \mathbb{R}\}$.
- De rechte $L_2 \leftrightarrow y = 1$ is evenwijdig met de x-as, $L_2 = \{((t, 1)|t \in \mathbb{R}\}$.
- De rechte $L_3 \leftrightarrow x = 0$ is de y-as, $L_3 = \{((0, t)|t \in \mathbb{R}\}$.
- De rechte $L_4 \leftrightarrow x = 1$ is evenwijdig met de y-as, $L_4 = \{((1, t)|t \in \mathbb{R}\}$.
- De rechte $L_5 \leftrightarrow y = x$ is de eerste bissectrice, $L_5 = \{((t, t)|t \in \mathbb{R}\}$.

Opmerking 1.2.1.

- Deze definitie betekent dat elke rechte een vergelijking heeft van de vorm $ax + by + c = 0$, en dat omgekeerd dergelijke vergelijking (met a en b niet allebei 0) altijd de vergelijking is van een *rechte*.
- Meestal wordt een andere –of geen– definitie gegeven van een rechte, en dan wordt bovenstaande definitie een eigenschap.

De definitie en enkele van haar gevolgen worden verduidelijkt in volgende eigenschap:

Eigenschap 1.2.1.

- Een punt P met cartesische coördinaten (x_0, y_0) behoort tot de rechte $L \leftrightarrow ax + by + c = 0$ als en slechts als $ax_0 + by_0 + c = 0$
- Als $b = 0$ wordt de vergelijking $ax + c = 0$, waaruit volgt dat $x = -\frac{c}{a}$. Merk op dat er geen voorwaarde is op y, y kan alle mogelijke waarden aannemen. Alle punten (x, y) in het vlak die voldoen aan deze vergelijking vormen bijgevolg de vertikale rechte $x = -\frac{c}{a}$.
- Als $b \neq 0$ is kunnen we de vergelijking ook schrijven als

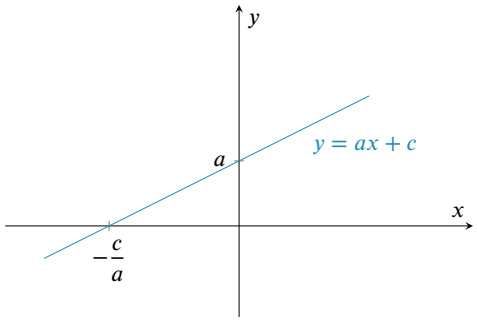
$$y = -\frac{1}{b}(ax + c) \text{ of } y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Merk op dat de grafiek van een reële functie $x \mapsto mx+q$ hetzelfde is als de oplossingsverzameling van de vergelijking $y = mx + q$.

Alle punten (x, y) in het vlak die voldoen aan de vergelijking $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ vormen dus een rechte met richtingscoëfficiënt $-\frac{a}{b}$ en snijpunt met de y-as $-\frac{c}{b}$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Vlakke meetkunde: rechten



Eigenschap 1.2.2 (Vergelijking van een rechte door een gegeven punt met gegeven richtingscoëfficient)**.**

De vergelijking van de rechte L door het punt (x_1, y_1) met richtingscoëfficiënt m is

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

Eigenschap 1.2.3 (Vergelijking van een rechte door twee gegeven punten)**.**

De vergelijking van de rechte L door de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) is

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

De richtingscoëfficiënt m van dergelijke rechte is dus $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \left(\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} \right)$

Eigenschap 1.2.4 (Vergelijking van een rechte met gegeven snijpunten met de assen)**.**

De vergelijking van de rechte L die de x-as snijdt in $(a, 0)$ en de y-as in $(0, b)$ (met a en b beide verschillend van 0) is

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Eigenschap 1.2.5 (Vergelijking van een rechte door de oorsprong)**.**

De vergelijking van de rechte L door de oorsprong en het punt is (x_1, y_1) is

$$y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x$$

De vergelijking van de rechte L door de oorsprong en met richtingscoëfficiënt m is

$$y = mx$$

Zogenaamde parametervergelijkingen zijn een fundamenteel andere vorm van 'vergelijkingen' waarmee we een rechte kunnen beschrijven. Het zijn eigenlijk de 'oplossingen' van de cartesische vergelijking.

Definitie 1.2.2. De parametervergelijking van een rechte door het punt (x_1, y_1) met richtingscoëfficiënt $m = a/b$ is een uitdrukking van de vorm

$$L \leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + ta \\ y = y_1 + tb \end{cases} , t \in \mathbb{R}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Vlakke meetkunde: rechten

Het is soms makkelijker deze parametervergelijking in vectorvorm op te schrijven, door $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

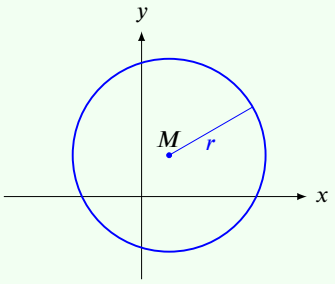
$$L \leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} \quad t \in \mathbb{R}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Basiseigenschappen van de cirkel

Een kort overzicht van enkele belangrijke eigenschappen van *cirkels*:

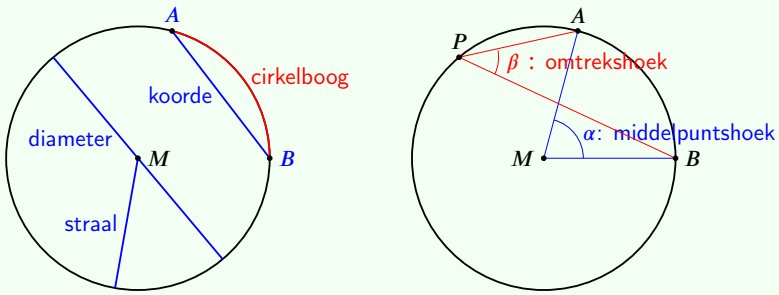
Definitie 1.3.1. De **cirkel** met **middelpunt** M en **straal** r is de verzameling van alle punten die op een afstand r van het punt M liggen.



Volgende begrippen worden dikwijls gebruikt in verband met cirkels:

Definitie 1.3.2 (Begrippen in verband met cirkels)**.**

- Een **koorde** van een cirkel is een lijnstuk waarvan beide eindpunten op de cirkel liggen.
- Een **cirkelboog** is een deel van een cirkel tussen twee van zijn punten.
- Een **middellijn** of **diameter** van een cirkel is een koorde die het middelpunt bevat. Een diameter is een koorde van maximale lengte. Het woord diameter wordt behalve voor het lijnstuk zelf ook gebruikt voor de *lengte* van het lijnstuk. Hetzelfde fenomeen doet zich voor bij het begrip straal: de straal van een cirkel is een getal, maar soms ook een lijnstuk tussen het middelpunt en een punt van de cirkel.
- Een **middelpuntshoek** op een koorde is een hoek waarvan het hoekpunt samenvalt met het middelpunt en de benen door de eindpunten van de koorde gaan.
- Een **omtrekshoek** op een koorde is een hoek waarvan het hoekpunt op de cirkel ligt en de benen door de eindpunten van de koorde gaan.



We zeggen dus dat middelpuntshoeken en omtrekshoeken *op een koorde* of *op een cirkelboog* staan, maar ook dat een omtrekshoek of middelpuntshoek een koorde of cirkelboog *afsnijden* op de cirkel.

Eigenschap 1.3.1 (Eigenschappen van een cirkel)**.**

(a) De omtrek van een cirkel met straal r is $2\pi r$.

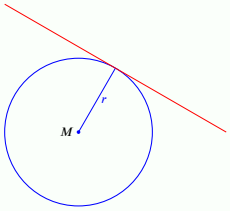
CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Basiseigenschappen van de cirkel

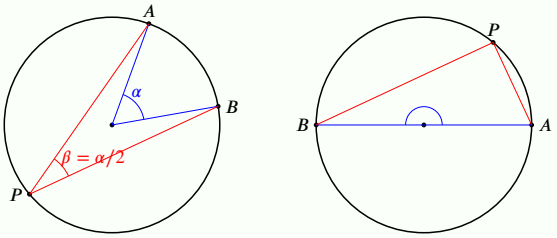
(b) De oppervlakte van een cirkel met straal r is πr^2.

(c) De diameter van een cirkel is het dubbel van de straal.

(d) De raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.



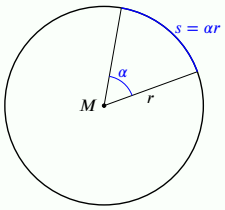
(e) Elke omtrekshoek meet de helft van de middelpuntshoek die op dezelfde boog staat.



Als α een gestrekte hoek van $180°$ is, volgt dat de omtrekshoek β op een halve cirkel $90°$ meet. Dus:

(f) Elke driehoek op een diameter met derde hoekpunt op de cirkel is rechthoekig.

(g) De lengte van een boog s die een middelpuntshoek α afsnijdt op een cirkel met straal r is gegeven door αr als de hoek α wordt uitgedrukt in radialen.



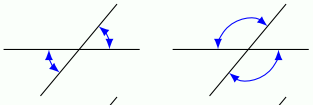
CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Basiseigenschappen van hoeken en rechten

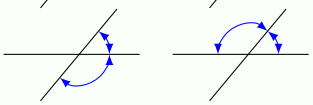
Hoeken en lengten voldoen aan volgende eenvoudige maar belangrijke eigenschappen:

Eigenschap 1.4.1. Als twee rechten snijden geldt:

overstaande hoeken zijn *gelijk*.

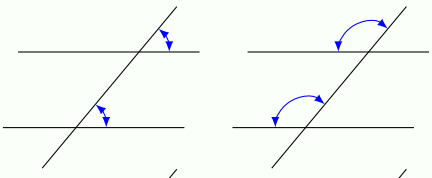


aanliggende hoeken zijn *supplementair*.

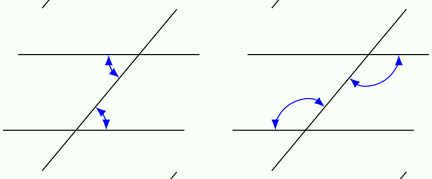


Eigenschap 1.4.2. Als een rechte twee evenwijdige rechten snijdt geldt:

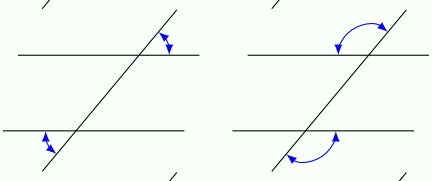
overeenkomstige hoeken zijn gelijk



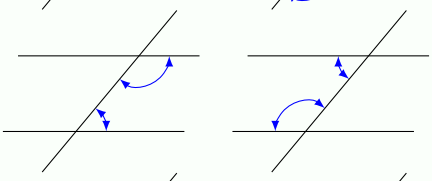
verwisselende binnenhoeken zijn gelijk



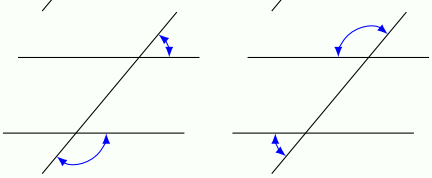
verwisselende buitenhoeken zijn gelijk



binnenhoeken aan dezelfde kant zijn supplementair

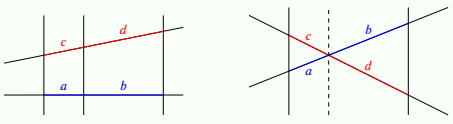


buitenhoeken aan dezelfde kant zijn supplementair



Eigenschap 1.4.3 (Stelling van Thales)**.**

Als drie evenwijdige lijnen twee andere lijnen snijden, dan worden de verhoudingen van deze laatste lijnstukken behouden: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.1)

1.5 Basiseigenschappen van driehoeken

Driehoeken zijn erg belangrijke objecten bij meetkundige problemen. Enerzijds kunnen we van elke *hoek* eenvoudig een rechthoekige *drie*hoek maken door een loodlijn te tekenen op één van de benen van de hoek. Anderzijds kan de studie van veelhoeken zoals rechthoeken of zeshoeken dikwijls worden herleid tot de studie van driehoeken door *diagonalen* te tekenen. Zo kan de oppervlakte van een veelhoek –minstens theoretisch– worden berekend als de som van de oppervlakte van een aantal driehoeken.

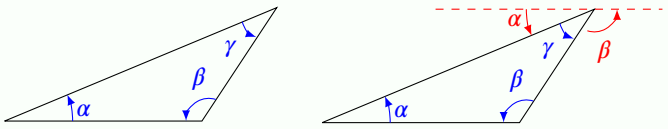


Een hoek Een driehoek Eén *veel*hoek *Veel* driehoeken

Door een rechte te tekenen evenwijdig aan de overstaande zijde blijkt dat de som van de drie hoeken een gestrekte hoek is:

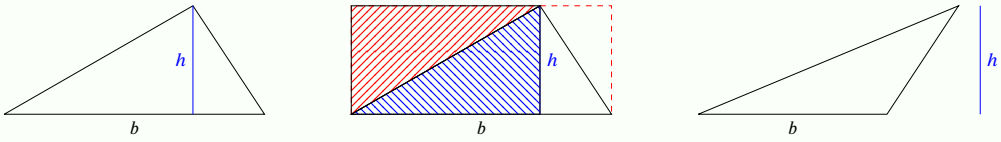
Eigenschap 1.5.1. De *som van de hoeken* van een driehoek is een gestrekte hoek.

In symbolen: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$



Als de hoeken α, β en γ in graden zijn uitgedrukt wordt de som $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Eigenschap 1.5.2. De *oppervlakte* van een driehoek is $\dfrac{\text{basis} \times \text{hoogte}}{2}$



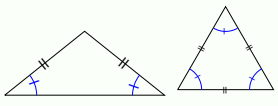
De oppervlakte van een driehoek is inderdaad precies de helft van die van de rechthoek met zijden b en h. De oppervlakte hangt niet af van de *vorm* van de driehoek, enkel van een *basis* en de bijhorende *hoogte*.

Definitie 1.5.1.

Een **gelijkbenige** driehoek is een driehoek met (minstens) twee gelijke zijden.
Een **gelijkzijdige** driehoek is een driehoek met drie gelijke zijden.

Eigenschap 1.5.3.

Een gelijkbenige driehoek heeft twee gelijke basishoeken.
Een gelijkzijdige driehoek heeft drie gelijke hoeken.



De som van de hoeken is $180°$, dus is elke hoek van een gelijkzijdige driehoek $\dfrac{180°}{3} = 60°$ of $\dfrac{\pi}{3}$.

Eigenschap 1.5.4 (Stelling van Pythagoras)**.**

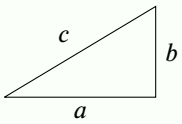
In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Basiseigenschappen van driehoeken

gelijk aan de som van de kwadraten van de aanliggende zijden.

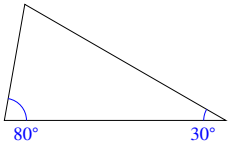
In symbolen: $a^2 + b^2 = c^2$



Oefening 1.5.1. Bepaal de grootte van de derde hoek van volgende driehoeken:

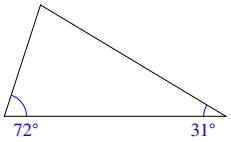
1. $\alpha = 80°, \beta = 30°$, $\gamma = 70°$.

Uitwerking: De som van de hoeken van een driehoek is $180°$: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, en hieruit vinden we $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 80° - 30° = 70°$.



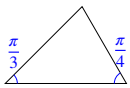
2. $\beta = 31°, \gamma = 72°$, $\alpha = 77°$.

Uitwerking: De som van de hoeken van een driehoek is $180°$: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, en hieruit vinden we $\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 31° - 72° = 77°$.



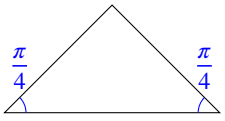
3. $\alpha = \pi/4, \gamma = \pi/3$, $\beta = 5\pi/12$ radialen.

Uitwerking: De som van de hoeken van een driehoek is π radialen: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, en hieruit vinden we $\beta = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{3\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$.



4. Gegeven een gelijkbenige driehoek waarvan één basishoek grootte $\pi/4$ heeft. De andere basishoek heeft dan grootte $= \pi/4$, en de derde hoek heeft grootte $= \pi/2$.

Uitwerking: De tweede basishoek meet ook $\pi/4$, omdat een gelijkbenige driehoek gegeven is. Hiermee kan dan ook de grootte van de derde hoek bepaald worden: de som van de hoeken van een driehoek is π: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Hieruit halen we dat de derde hoek een grootte van $\pi - \pi/4 - \pi/4 = \pi/2$ heeft.



CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

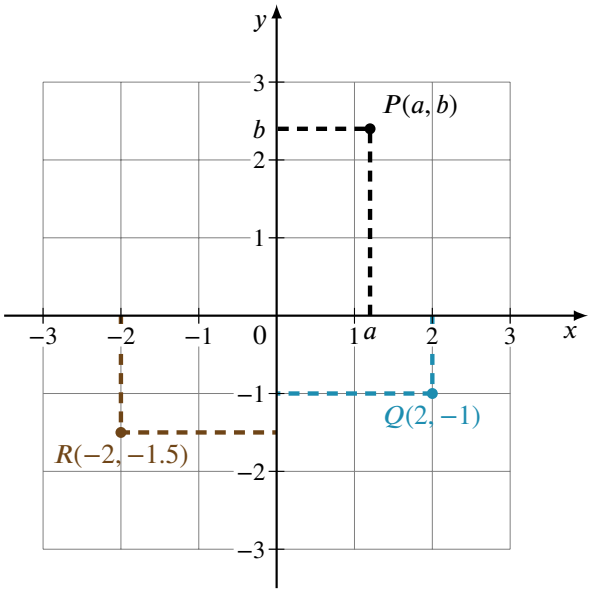
Module 2
Meetkunde: opbouw FEB

(Versie 2026/10/26.1)

2.1 Cartesiaans assenstelsel en coördinaten

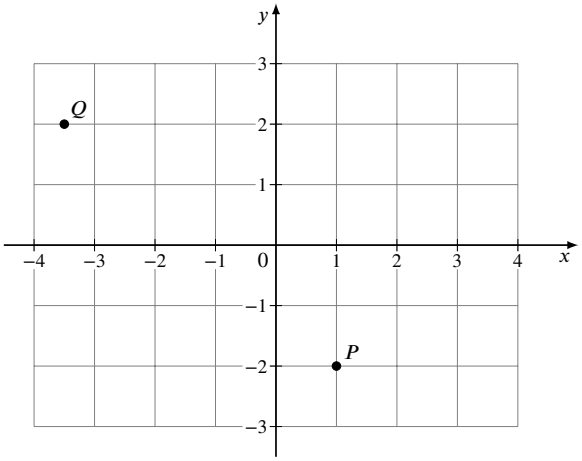
Een **cartesiaans assenstelsel** bestaat uit een horizontale x-as en een verticale y-as die loodrecht op elkaar staan en waarbij de eenheden op beide assen even groot zijn.

Ten opzichte van dergelijk assenstelsel wordt elk punt volledig beschreven door *een koppel* (a, b) *reële getallen* (de **coördinaten** van het punt): eerst de horizontale x-coördinaat en dan de verticale y-coördinaat. We noteren $P(a, b)$ voor punt P met coördinaten (a, b).
We gebruiken dikwijls ook de letters x en y voor de coördinaten zelf: $P(x, y)$ is dan het punt met x-coördinaat het getal x en y-coördinaat het getal y.



Via coördinaten kunnen meetkundige problemen worden opgelost door ze met algebraïsche methoden *uit te rekenen*. Dergelijke meetkunde met coördinaten noemt men soms ook *analytische* meetkunde.

Oefening 2.1.1. De coördinaten van P zijn $(1, -2)$, die van Q zijn $(-3.5, 2)$.



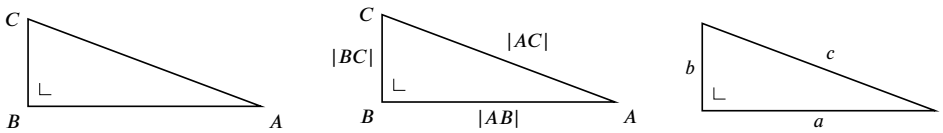
2.2 Afstand tussen twee punten

Definitie 2.2.1. We noteren met $|AB|$ de **afstand** tussen twee punten A en B. Er geldt $|AB| = |BA|$.

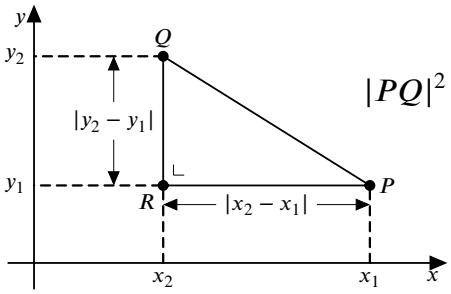
De bekendste stelling uit de hele wiskunde geeft een verband tussen afstanden in een rechthoekige driehoek:

Eigenschap 2.2.1 (Stelling van Pythagoras)**.**

Een driehoek ABC heeft een rechte hoek in B als en slechts als $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$.



In de analytische meetkunde kunnen we de stelling van Pythagoras formuleren in termen van cartesiaanse coördinaten. We vinden de afstand $|PQ|$ tussen twee punten $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$ via de constructie van de rechthoekige driehoek PQR.



$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= |PR|^2 + |RQ|^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \end{aligned}$$

Eigenschap 2.2.2. De **afstand** tussen punt P met coördinaten (x_1, y_1) en Q met coördinaten (x_2, y_2) is

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Voorbeeld 2.2.1. De afstand tussen punt P met coördinaten $(2, 3)$ en Q met coördinaten $(-2, -1)$ is

$$|PQ| = \sqrt{((-2) - 2)^2 + ((-1) - 3)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5.66$$

Oefening 2.2.1. De afstand tussen de punten $(-1, 0)$ en $(2, 4)$ is 5

Feedback: $\sqrt{(2 - (-1))^2 + (4 - 0)^2} = 5$

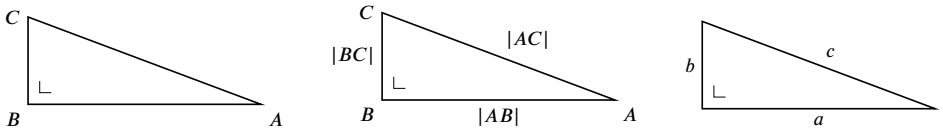
2.3 Afstanden tussen punten en een rechte

Definitie 2.3.1. We noteren met $|AB|$ de **afstand** tussen twee punten A en B. Er geldt $|AB| = |BA|$.

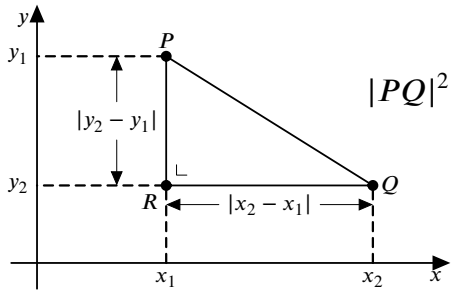
De bekendste stelling uit de hele wiskunde geeft een verband tussen afstanden in een rechthoekige driehoek:

Eigenschap 2.3.1 (Stelling van Pythagoras)**.**

Een driehoek ABC heeft een rechte hoek in B als en slechts als $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$.



In de analytische meetkunde kunnen we de stelling van Pythagoras formuleren in termen van Cartesische coordinaten. We vinden de afstand $|PQ|$ tussen twee punten $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$ via de constructie van de rechthoekige driehoek PQR.



$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= |PR|^2 + |RQ|^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \end{aligned}$$

Eigenschap 2.3.2. De **afstand** tussen punt P met coördinaten (x_1, y_1) en Q met coördinaten (x_2, y_2) is

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Voorbeeld 2.3.1. De afstand tussen punt P met coördinaten $(2, 3)$ en Q met coördinaten $(-2, -1)$ is

$$|PQ| = \sqrt{((-2) - 2)^2 + ((-1) - 3)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5.66$$

Oefening 2.3.1. De afstand tussen de punten $(-1, 0)$ en $(2, 4)$ is 5

Feedback: $\sqrt{(2 - (-1))^2 + (4 - 0)^2} = 5$

Stelling 2.3.1. De afstand tussen een punt $P = (x_0, y_0)$ en een rechte L met cartesische vergelijking $ax + by + c = 0$ is:

$$d(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Afstanden tussen punten en een rechte

Bewijs. *Het onderstaande bewijs is enkel ter interesse en moet niet gekend worden*:

Als de cartesische vergelijking van de rechte L gegeven is door $ax+by+c=0$ vinden we onmiddelijk dat de rico $m_L = -\frac{a}{b}$ is. De afstand tussen een punt $P=(x_0,y_0)$ en de de rechte L kan gevonden worden via de rechte die loodrecht staat op L en door het punt P gaat. Noem T de rechte die loodrecht staat op L. Noem verder $Q=(f,g)$ het snijpunten van de rechten L en T. We weten dat de rico van L gelijk is aan $\frac{b}{a}$ want voor twee loodrechte rechten geldt $m_L \cdot m_T = -1$. We hebben de volgende gelijkheid voor de rico van L:

$$\frac{y_0-g}{x_0-f} = \frac{b}{a}$$

of nog $a(y_0-g)-b(x_0-f)=0$. Kwadrateren we dit, dan krijgen we

$$a^2(y_0-g)^2 + b^2(x_0-f)^2 = 2ab(y_0-g)(x_0-f)$$

Het idee van het bewijs is om de expressie $\big(a(x_0-f)+b(y_0-g)\big)^2$ op twee manieren te schrijven. Enerzijds, hebben we:

$$\begin{aligned}\big(a(x_0-f)+b(y_0-g)\big)^2 &= a^2(x_0-f)^2 + 2ab(y_0-g)(x_0-f) + b^2(y_0-g)^2\\ &= (a^2+b^2)((x_0-f)^2+(y_0-g)^2)\end{aligned}$$

Anderzijds, hebben we ook dat

$$(a(x_0-f)+b(y_0-g))^2 = (ax_0+by_0-af-bg))^2 = (ax_0+by_0+c)^2$$

waarbij de laatste gelijkheid volgt uit het feit dat (f,h) op de rechte $ax+by+c=0$ ligt.

Stellen we nu de bovenstaande twee expressies gelijk aan elkaar, dan krijgen we:

$$(a^2+b^2)((x_0-f)^2+(y_0-g)^2) = (ax_0+by_0+c)^2$$

We vinden dus dat de afstand tussen P en de rechte L gelijk is aan:

$$d(P,L) = \sqrt{(x_0-f)^2+(y_0-g)^2} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Voorbeeld 2.3.2. We zoeken de afstand tussen het punt $P=(5,1)$ en de rechte gegeven door $y=3x+1$. Toepassen van bovenstaande formule geeft:

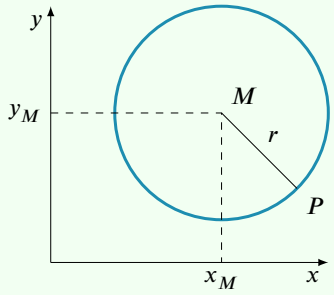
$$d = \frac{|3\cdot 5 - 1\cdot 1 + 1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{15}{\sqrt{10}}$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 De vergelijking van de cirkel

Definitie 2.4.1. De **cirkel** met **middelpunt** M en **straal** r, genoteerd $C(M,r)$, is de verzameling van alle punten die op een afstand r van het punt M liggen.

Dus: een punt P ligt op $C(M,r)$ als en slechts als $|PM| = r$.



De vergelijking van een cirkel is een nodige en voldoende voorwaarde waar de coördinaten van een punt aan moeten voldoen opdat dit punt op de cirkel zou liggen. De voorwaarde $|PM| = r$ is equivalent met

$$\sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} = r$$

waarbij (x, y) de coördinaten zijn van het punt P, en (x_M, y_M) de coördinaten van het middelplunt M. Door linkerlid en rechterlid te kwadrateren, bekomen we de vergelijking van de cirkel:

Eigenschap 2.4.1. De cirkel $C(M,r)$ met middelpunt $M(x_M, y_M)$ en straal r heeft als vergelijking

$$C(M,r) \leftrightarrow (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2.$$

Voorbeeld 2.4.1. De cirkel met middelpunt $M = (0,2)$ en straal 3 heeft als vergelijking

$$C(M,3) \leftrightarrow (x-0)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

of dus

$$C(M,3) \leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 9.$$

Door de kwadraten uit te rekenen krijgen we ook

$$C(M,3) \leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$$

Oefening 2.4.1. Ligt $(2,3)$ op de cirkel met middelpunt $(1,-1)$ en straal 4? Nee

Uitwerking: Nee, want $(2-1)^2 + (3-(-1))^2 = 1 + 16 \neq 16 = 4^2$.

Oefening 2.4.2. Stel de vergelijking op van de cirkel met gegeven middelpunt en straal:

1. $M(-1,0)$ en $r = 1$

Uitwerking: $(x-(-1))^2 + (y-0)^2 = 1^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 = 0$

2. $M(5,2)$ en $r = 4$

Uitwerking: $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 4^2 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-2)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 - 10x + y^2 - 4y + 13 = 0$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 De vergelijking van de cirkel

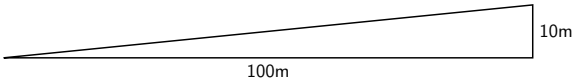
Oefening 2.4.3. Bepaal het middelpunt en de straal van volgende cirkel: $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 20$

Uitwerking: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$, het middelpunt is $(-1, 2)$, de straal is 5

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 De vergelijking van een rechte

De *helling* van een weg wordt meestal uitgedrukt als *een percentage*. Een helling van 10% betekent dan dat je per 100m horizontale afstand met 10m stijgt. Soms is het nuttig een helling uit te drukken *met graden* eerder dan met een percentage. Bij een helling van 100% stijg je 1m op elke 1m horizontale verplaatsing, en dat komt dus overeen met een helling van 45°.



$$\text{Helling} = \frac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}} = \frac{10}{100} = 0.1 \quad (= 10\%).$$

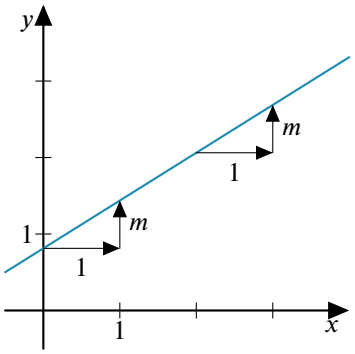
De wiskundige term voor helling-als-percentage is *richtingscoëfficiënt*, soms afgekort to rico:

Definitie 2.5.1. De **richtingscoëfficiënt** of **rico** van een rechte is de *helling* van die rechte.

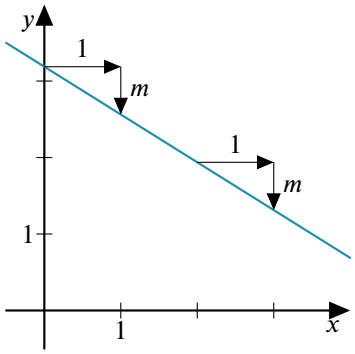
Als de rechte door de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) gaat, is de rico m gelijk aan

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \left(\text{of ook } m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right).$$

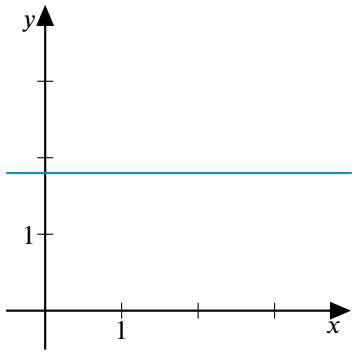
Bij **stijgende** rechten is $m > 0$ en bij **dalende** rechten is $m < 0$. Voor horizontale rechten is $m = 0$. Voor verticale rechten is de rico niet gedefinieerd, intuïtief kan je denken dat dergelijk rechte oneindig steil is.



$m > 0$

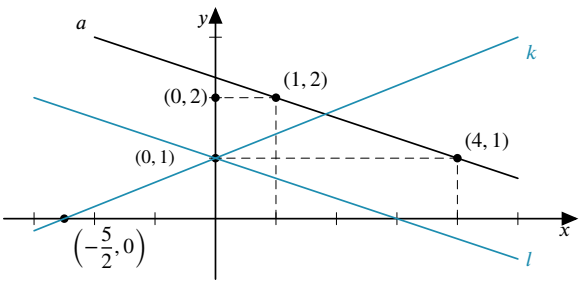


$m < 0$



$m = 0$

Oefening 2.5.1. Bepaal de rico's van de rechten k en l.



Antwoord: $m_k = \frac{2}{5}$ en $m_l = -\frac{1}{3}$

2.5 De vergelijking van een rechte

Eigenschap 2.5.1. De vergelijking van een niet-verticale rechte l kan steeds geschreven worden in de vorm

$$l \leftrightarrow \boxed{y = mx + q},$$

waarbij m de rico is en q het snijpunt met de y-as. De vergelijking kan op verschillende manieren worden opgesteld:

- De rechte l door het **punt** (x_1, y_1) met **rico** m_l.
  Het punt (x, y) behoort tot de rechte l als en slechts als
  $$l \leftrightarrow \boxed{y - y_1 = m_l(x - x_1)}.$$
- De rechte l door de **twee punten** (x_1, y_1) en (x_2, y_2) met $x_1 \neq x_2$.
  Het punt (x, y) behoort tot de rechte l als en slechts als
  $$l \leftrightarrow \boxed{(y - y_1) = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)}.$$

De vergelijking van een verticale rechte is steeds van de vorm $\boxed{x = b}$, $b \in \mathbb{R}$.
De vergelijking van een horizontale rechte is steeds van de vorm $\boxed{y = q}$, $q \in \mathbb{R}$.

Oefening 2.5.2. Stel een vergelijking op van een rechte door twee punten.

1. De rechte door $(-5, -2)$ en $(-1, -3)$ heeft als vergelijking $y = -\frac{1}{4}x - \frac{13}{4}$

2. De rechte door $(0, 0)$ en $(2, 3)$ heeft als vergelijking $y = \frac{3}{2}x$

3. De rechte door $(1, 6)$ met rico -4 heeft als vergelijking $y = -4x + 10$

Oefening 2.5.3.

1. Voldoet het punt $(1000, -1750)$ aan de vergelijking van de rechte $a \leftrightarrow y = -2x + 250$? Ja

2. Behoort het punt $(5, 1)$ tot $b \leftrightarrow y - 20 = 4x$? Nee

Feedback: Neen, als je $(5, 1)$ invult, krijg je $1 - 20 = 4 \cdot 1$, en dat is niet waar, want $-19 \neq 4$.

Alternatieve redenering: als je $x = 5$ invult, krijg je $y = 40$. Het punt $(5, 1)$ behoort dus niet tot de rechte b. Het punt met $x = 5$ op de rechte b is het punt $(5, 40)$.

Definitie 2.5.2 (Cartesiaanse vergelijkingen van een rechte)**.**

Een **cartesiaanse vergelijking** van een rechte is een uitdrukking van de vorm

$$\boxed{ax + by + c = 0} \quad (\text{ of ook } ax + by = d)$$

met a en b niet beide nul. Een punt (x_0, y_0) ligt op de rechte ligt als en slechts als $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Eigenschap 2.5.2. Voor de rechte met vergelijking $ax + by + c = 0$ geldt:

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 De vergelijking van een rechte

$a = 0$	$\iff$	de rechte is evenwijdig met de x-as	$\iff$	$y = k$
$b = 0$	$\iff$	de rechte is evenwijdig met de y-as	$\iff$	$x = k$
$c = 0$	$\iff$	de rechte gaat door de oorsprong	$\iff$	$ax + by = 0$ of $y = kx$ of $x = k'y$

Opmerking 2.5.1. Voor niet-vertikale rechten kan je eenvoudig wisselen tussen de cartesiaanse vergelijking en de standaardvergelijking:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{met } b \neq 0 \iff y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \iff y = mx + q \quad \text{met } m = -\frac{a}{b} \text{ en } q = -\frac{c}{b}$$

Voorbeeld 2.5.1. Geef de vergelijking van volgende rechten:

1. door de oorsprong en $(3, 6)$: $y = 2x$

2. door $(0, 1)$ en $(3, 7)$: $y = 2x + 1$

3. door de oorsprong en $(-1, -2)$: $y = 2x$

4. door $(0, 0)$ en $(-1, -1)$: $x = y$

5. door $(0, 0)$ en $(1, 2)$: $y = 2x$

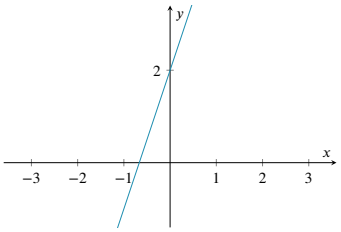
6. door $(0, 1)$ en $(-1, -1)$: $y = 2x + 1$

7. door $(1, 2)$ en $(-1, -2)$: $y = 2x$

Oefening 2.5.4. Teken de rechten met volgende vergelijkingen. Duidt telkens de snijpunten aan met de assen en de richtingscoëfficiënten.

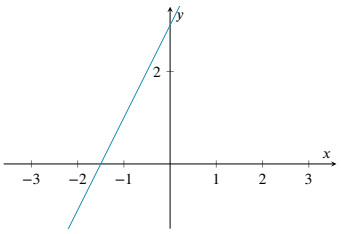
1. $y = 3x + 2$

Uitwerking:



2. $y = 2x + 3$

Uitwerking:

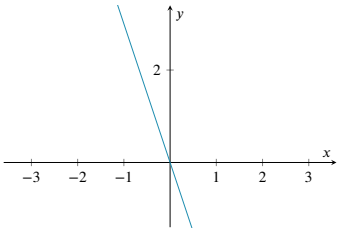


3. $y = -3x$

CC BY-NC-SA 4.0

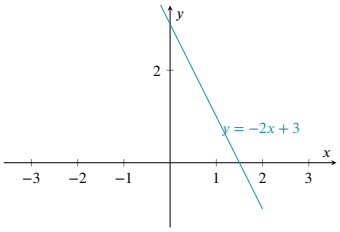
2.5 De vergelijking van een rechte

Uitwerking:



4. $y = -2x + 3$

Uitwerking:

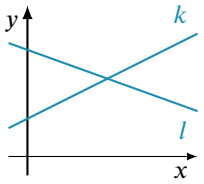


CC BY-NC-SA 4.0

2.6 Onderlinge ligging van rechten

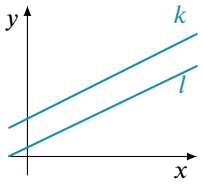
Twee rechten met vergelijkingen van de vorm $y = mx + q$ kunnen volgende *relatieve posities* hebben:

Snijdend



één snijpunt
rico's verschillend
constante termen irrelevant
Voorbeelden:
$y = x + 1$ en $y = 2x + 1$

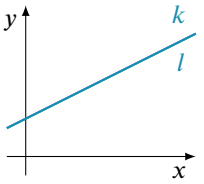
Evenwijdig



geen snijpunten
rico's gelijk
constante termen verschillend

$y = x + 1$ en $y = x + 2$

Samenvallend



oneindig veel snijpunten
rico's gelijk
constante termen gelijk

$y = x + 1$ en $y = x + 1$

Opmerking 2.6.1.

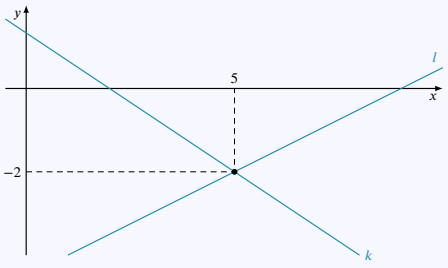
- Er is wat terminologische verwarring mogelijk of *samenvallende* rechten al dan niet ook *evenwijdig* zijn. Volgens bovenstaand schema is dat *niet* het geval: evenwijdige rechten hebben *geen* gemeenschappelijke punten, en samenvallende rechten hebben er oneindig veel. In de praktijk is het soms toch gebruikelijk om ook samenvallende rechten 'evenwijdig' te noemen.
- Samenvallende rechten hebben *dezelfde* vergelijking van de vorm $y = mx + q$. Maar let op: vergelijkingen van de vorm $ax + by + c = 0$ van samenvallende rechten moeten enkel *evenredig* zijn. Zo zijn de rechten $y = 2x + 4$ en $x = 2 - \frac{1}{2}y$ wel degelijk samenvallend (of 'gelijk').
- We bespreken verder nog een speciaal geval van snijden, namelijk *loodrecht* snijden.

Voorbeeld 2.6.1. Beschouw de rechten $k \leftrightarrow 2x + 3y - 4 = 0$ en $l \leftrightarrow x - 2y - 9 = 0$.

De rechten k en l snijden als ze een gemeenschappelijk punt hebben, dus als er één punt (x^*, y^*) is dat voldoet aan beide vergelijkingen. Dit punt moet dus een unieke oplossing zijn van het stelsel

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0, \\ x - 2y - 9 = 0. \end{cases}$$

Oplossen van dit stelsel, bijvoorbeeld door het dubbele van de tweede vergelijking af te trekken van de eerste vergelijking, levert $7y + 14 = 0$, en dus $y = -2$. Deze waarde $y = -2$ substitueren in een van de bovenstaande vergelijkingen levert $x = 5$. Besluit: de rechten k en l snijden in het punt $(5, -2)$.



Oefening 2.6.1.

1. Door een punt buiten een rechte gaat precies één rechte evenwijdig aan die rechte.

CC BY-NC-SA 4.0

2.6 Onderlinge ligging van rechten

2. Door een punt buiten een rechte gaan oneindig veel rechten die die rechte snijdt.

3. Door een punt buiten een rechte gaat geen enkele rechte die samenvalt met die rechte.

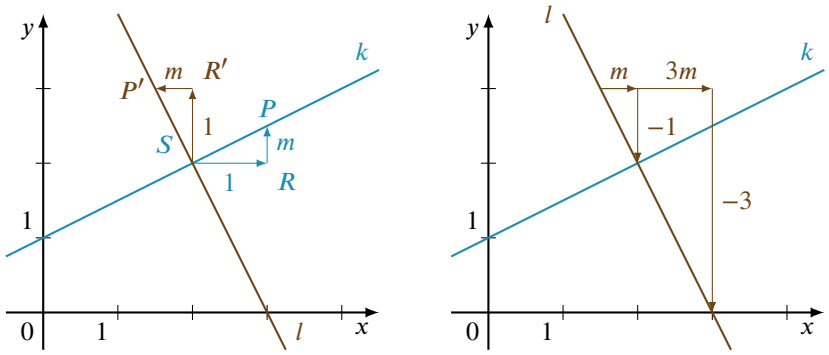
4. Door een punt buiten een rechte gaat geen enkele rechte die samenvalt met die rechte.

Oefening 2.6.2. Als k en l verschillende evenwijdige rechten zijn, en l en m zijn onderling verschillende evenwijdige rechten, dan kunnen k en m zowel samenvallend als evenwijdig zijn.

Er is een interessant verband tussen de rico's van twee rechten die elkaar **loodrecht** (ook **orthogonaal**) snijden, dus onder een hoek van 90°.

Als een rechte k loodrecht staat op een rechte l, dan kan je l verkrijgen door een rotatie van k over 90° rond hun snijpunt.

De rico m van k is de stijging van k na een horizontale afstand 1, dus de afstand $|RP|$. We bepalen nu de rico van de rechte l. Na de rotatie over 90° zien we dat een beweging naar links met m eenheden gepaard gaat met een stijging van 1 eenheid. Met andere woorden: een horizontale beweging van m eenheden naar rechts (bv. vanuit P') is gekoppeld aan een verticale beweging van -1 eenheid. Een horizontale beweging van $3m$ naar rechts veroorzaakt een verticale beweging van -3, ... Dus $m_l = \dfrac{-1}{m} = \dfrac{-3}{3m} = \ldots$.



Samengevat:

Eigenschap 2.6.1.

Twee (niet-verticale) rechten k en l staan **loodrecht op elkaar** als hun rico's voldoen aan

$$m_k = -\frac{1}{m_l} \text{ of dus } \boxed{m_k \cdot m_l = -1}$$

Elke verticale rechte staat loodrecht op elke horizontale rechte.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.1)

KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Module 3
Meetkunde: FIIW/FEB ?

(Versie 2026/10/26.1)

3.1 Congruentie en gelijkvormigheid

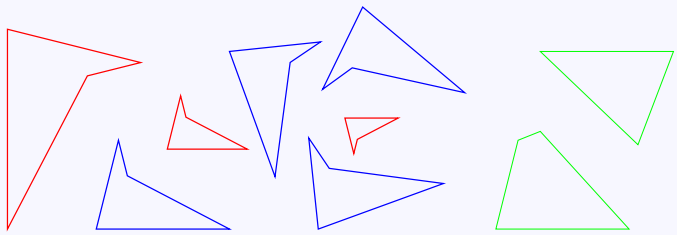
De begrippen *gelijkvormigheid* en *congruentie* duiden twee verschillende manieren aan waarop figuren al dan niet *aan elkaar gelijk* kunnen worden beschouwd.

Definitie 3.1.1. Meetkundige figuren zijn onderling

gelijkvormig als ze *dezelfde vorm* hebben (maar mogelijk verschillen in grootte)
congruent als ze *dezelfde vorm en grootte* hebben

Voorbeeld 3.1.1.

- De blauwe figuren hieronder zijn onderling congruent.
  De rode zijn gelijkvormig maar niet congruent met de blauwe. Ze zijn ook onderling gelijkvormig, maar niet congruent met elkaar.
  De groene figuren zijn niet gelijkvormig, en dus zeker niet congruent met de blauwe of met de rode of onderling.



- Alle cirkels zijn onderling *gelijkvormig*. Ze zijn *congruent* als hun *stralen gelijk* zijn.
- Alle vierkanten zijn onderling *gelijkvormig*. Ze zijn *congruent* als hun *zijden gelijk* zijn.
- Rechthoeken zijn *gelijkvormig* aan elkaar als hun lengtes en breedtes *gelijke verhoudingen* hebben. Ze zijn *congruent* als ze *gelijke lengtes en breedtes* hebben.

Opmerking 3.1.1.

- Let op: gespiegelde figuren kunnen toch gelijkvormig of congruent zijn.
- Let op met het begrip 'gelijke vorm'. In sommige contexten betekent dit dat de vorm *en* de grootte gelijk moet zijn, en soms beschouwt men enkel de grootte. Ook de oriëntatie wordt soms relevant gevonden en soms niet. De begrippen 'gelijkvormig' en 'congruent' zijn wel ondubbelzinning, en hebben steeds de betekenis zoals gegeven in bovenstaande definitie: voor 'gelijkvormigheid' heeft de grootte en de oriëntatie dus geen belang.

Eigenschap 3.1.1. In het belangrijke geval van *driehoeken* geldt:

- Twee driehoeken zijn *congruent* als en slechts als overeenkomstige zijden gelijk zijn.
- Twee driehoeken zijn *gelijkvormig* als en slechts als overeenkomstige hoeken gelijk zijn.
- Als twee driehoeken congruent zijn, dan zijn hun overeenkomstige hoeken gelijk.

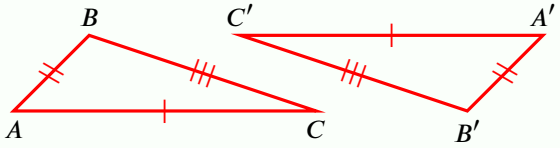
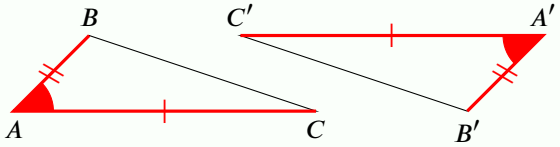
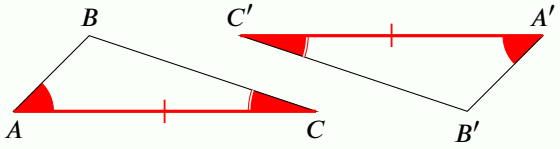
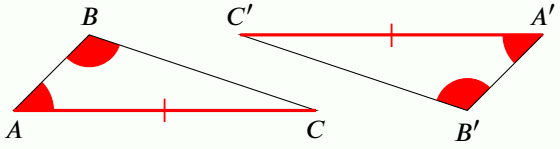
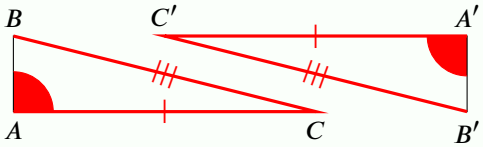
De laatste bewering kan je ook formuleren als 'congruente driehoeken hebben gelijk hoeken' of 'als in een driehoek overeenkomstige zijden gelijk zijn, dan zijn automatisch ook de overeenkomstige hoeken gelijk'.

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Congruentie en gelijkvormigheid

In praktijk zijn er verschillende criteria om congruentie van driehoeken te controleren:

Eigenschap 3.1.2. Driehoeken zijn *congruent* zodra ze voldoen aan één van volgende kenmerken:

	Congruentiekenmerk	Figuur
ZZZ	(zijde-zijde-zijde)	
ZHZ	(zijde-hoek-zijde)	
HZH	(hoek-zijde-hoek)	
HHZ	(hoek-hoek-zijde)	
RZZ	(rechte hoek - zijde - zijde)	

Opmerking 3.1.2. Omdat twee gelijke hoeken onmiddellijk impliceert dat de *drie* hoeken gelijk zijn (want hun som is $180°$), zijn de kenmerken **HZH** en **HHZ** eigenlijk equivalent: twee hoeken en een zijde gelijk impliceert congruent. Dit geldt *niet* voor twee zijden en één hoek: dan is de volgorde wel degelijk van belang, want **HZZ** is geen congruentiekenmerk, zoals blijkt uit oefening **??**.

Eigenschap 3.1.3. Driehoeken zijn *gelijkvormig* zodra ze voldoen aan één van volgende kenmerken:

HH	(hoek-hoek)	twee (en dus automatisch drie) corresponderende hoeken zijn gelijk
zzz	(zijde-zijde-zijde)	de *verhoudingen* van overeenkomstige zijden zijn gelijk
zHz	(zijde-hoek-zijde)	de *verhoudingen* van twee overeenkomstige zijden zijn gelijk en de ingesloten hoek is gelijk

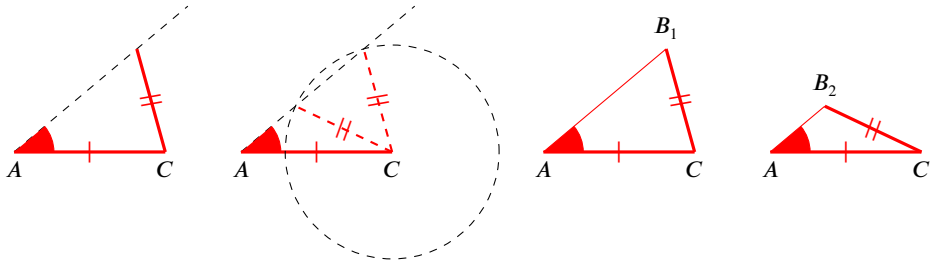
Merk op: de notate met kleine **z** voor 'overeenkomende zijden zijn *evenredig*' wordt niet algemeen gebruikt.

Oefening 3.1.1. Toon met een voorbeeld aan dat er geen congruentiekenmerk **HZZ** bestaat.

Uitwerking:

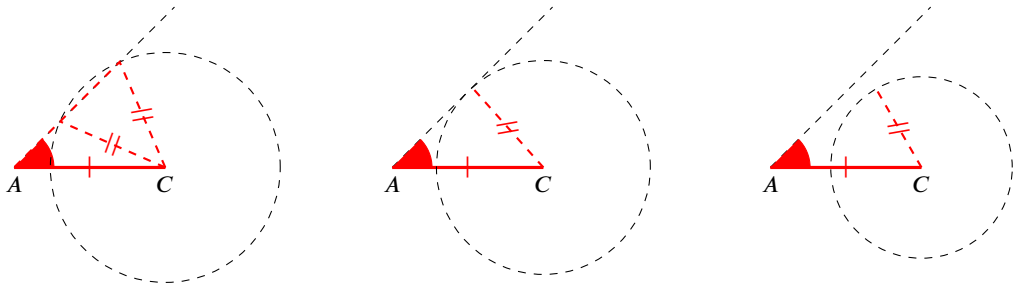
CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Congruentie en gelijkvormigheid



Conclusie: er bestaan in dit geval *twee niet congruente driehoeken* met hetzelfde HZZ-kenmerk!

Als de derde zijde 'te kort' is, bestaat er geen driehoek. Als ze te lang is bestaan er twee. En voor één lengte bestaat er precies één, namelijk als de cirkel raakt, en dat is precies als de hoek in C een rechte hoek is. Dat is het criterium dat boven **RZZ** werd genoemd.



Extra uitdaging voor de geïnteresseerden die de sinusregel kennen: onderzoek het verband tussen het fenomeen dat in deze oefening werd onderzocht en de sinusregel...

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Oppervlakte, inhoudsmaten en SI-eenheden

Definitie 3.2.1. De omtrek of de lengte van een vlakke figuur is de totale lengte van de buitenzijde.

Om de omtrek van een figuur te bepalen meten we alle zijden en maken we de som. De SI-eenheid (= Internationale Standaard) van de omtrek is de meter, m. Het eenheidsstelsel dat we gebruiken voor de omtrek noemen we lengtematen.

kilometer	hectometer	decameter	meter	decimeter	centimeter	millimeter
1 km	1 hm	1 dam	1 m	1 dm	1 cm	1 mm
1000 m	100 m	10 m	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m

Opmerking 3.2.1. Het verschil tussen 2 opeenvolgende kolommen is telkens een factor 10.

Definitie 3.2.2. De oppervlakte van een vlakke figuur is eenvoudig voor te stellen als het gebied dat je kunt bedekken.

Maar let op: het oppervlak is het scheidingsvlak aan de bovenkant tussen een lichaam en zijn omgeving, terwijl de oppervlakte de afmetingen van dit oppervlak voorstelt. Onthoud dus: een oppervlak heeft een oppervlakte. De SI-eenheid van de oppervlakte is de vierkante meter, m^2. Het eenheidsstelsel dat we gebruiken voor de oppervlakte noemen we oppervlaktematen.

vierkante kilometer	vierkante hectometer	vierkante decameter	vierkante meter	vierkante decimeter	vierkante centimeter	vierkante millimeter
1 km^2	1 hm^2	1 dam^2	1 m^2	1 dm^2	1 cm^2	1 mm^2
1.10^6 m^2	10000 m^2	100 m^2	1 m^2	0,01 m^2	0,0001 m^2	1.10^{-6} m^2
	1 hectare	1 are	1 centiare			

Opmerking 3.2.2. Het verschil tussen 2 opeenvolgende kolommen is telkens een factor 100.

Landmaten geven ook een oppervlakte weer: hectare (ha), are (a), centiare (ca).

- 1 are $= 10m \cdot 10m = 100m^2$
- 1 hectare $= 100$ are $= 100m \cdot 100m = 10000m^2$

Definitie 3.2.3. De inhoud of het volume van een ruimtefiguur is de grootte van het gebied in de ruimte (drie- (of hoger-) dimensionaal) dat door het voorwerp wordt ingenomen.

De SI-eenheid van het volume is de kubieke meter, m^3. Het eenheidsstelsel dat we gebruiken voor het volume noemen we de ruimtematen.

kubieke kilometer	kubieke hectometer	kubieke decameter	kubieke meter	kubieke decimeter	kubieke centimeter	kubieke millimeter
1 km^3	1 hm^3	1 dam^3	1 m^3	1 dm^3	1 cm^3	1 mm^3
1.10^9 m^3	1.10^6 m^3	1000 m^3	1 m^3	$1.10^{-3}m^3$	$1.10^{-6}m^3$	1.10^{-9} m^3
				1 liter	1 ml	

Opmerking 3.2.3. Het verschil tussen 2 opeenvolgende kolommen is telkens een factor 1000.

Als inhoudsmaat wordt, voornamelijk voor vloeistoffen, ook de liter (l) gebruikt.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Oppervlakte, inhoudsmaten en SI-eenheden

- $1\ l = 1\ dm^3$
- $1\ ml = 1\ cm^3 = 1\ cc$

CC BY-NC-SA 4.0

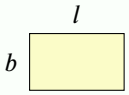
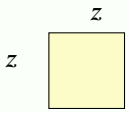
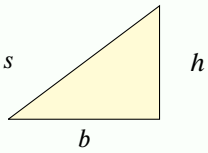
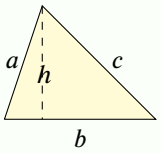
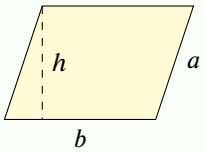
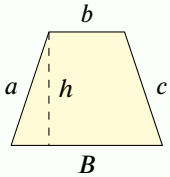
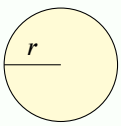
3.3 Oppervlakte en omtrek van vlakke figuren

De onderstaande tabel biedt een overzicht van de omtrek en oppervlakte van de meest courante vlakke figuren.

Eigenschap 3.3.1. Oppervlakte en omtrek van vlakke figuren

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Oppervlakte en omtrek van vlakke figuren

Naam	Figuur	Omtrek	Oppervlakte
Rechthoek		$O = 2(l + b)$	$A = l.b$
Vierkant		$O = 4z$	$A = z^2$
Rechthoekige driehoek		$O = b + h + s$	$A = \frac{b.h}{2}$
Willekeurige driehoek		$O = a + b + c$	$A = \frac{b.h}{2}$
Parallellogram		$O = 2(a + b)$	$A = b.h$
Trapezium		$O = a + b + c + B$	$A = \frac{b + B}{2}.h$
Cirkel		$O = 2\pi r$ Diameter $D = 2.r$ r is de straal	$A = \pi r^2$ $A = \frac{\pi D^2}{4}$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.1)

3.4 Oppervlakte en volume ruimtelichamen

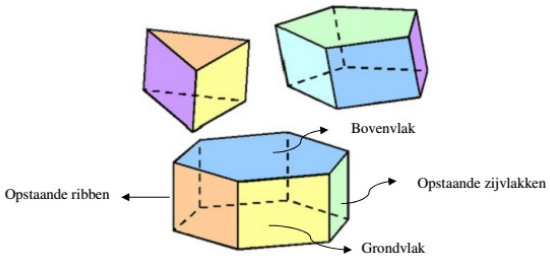
In deze sectie bespreken we de belangrijkste ruimtelichamen en geven formules om hun randoppervlakte en volume te bepalen.

Definitie 3.4.1. Een prisma is een ruimtefiguur waarvan twee zijvlakken evenwijdig zijn (bv. het grond- en bovenvlak) en de overige zijvlakken zijn evenwijdig met eenzelfde lijn die de evenwijdige vlakken snijdt.

Een prisma wordt dus begrensd door twee evenwijdige en even grote veelhoeken (drie-, vier-, vijfhoeken,...) die we het *grondvlak en het bovenvlak* noemen. De *opstaande zijvlakken* bestaan uit rechthoeken of parallellogrammen. De ribben die niet in het grond- of bovenvlak gelegen zijn hebben allen dezelfde lengte, we noemen ze de *opstaande ribben*.

Naargelang het aantal opstaande zijvlakken spreken we van een driezijdig, vierzijdig, vijfzijdig,... prisma.

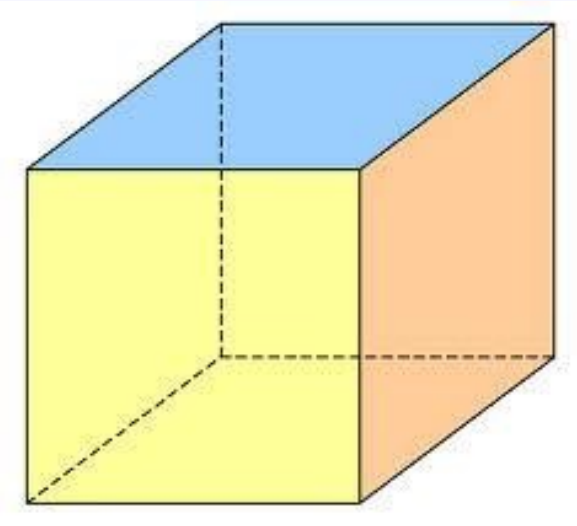
Een *recht* prisma is een prisma, waarin de verbindende ribben en zijvlakken loodrecht op het grondvlak staan. Dit houdt in dat de verbindende zijvlakken rechthoeken zijn. Een scheef *prisma* is een prisma, waarvan de verbindende ribben en zijvlakken niet loodrecht op het grondvlak staan. Dit houdt in dat de verbindende zijvlakken parallellogrammen zijn.



Eigenschap 3.4.1. Oppervlakte van een prisma: $A = \text{opp}_{\text{grondvlak}} + \text{opp}_{\text{bovenvlak}} + \text{opp}_{\text{zijkanten}}$
Volume van een prisma: $V = \text{opp}_{\text{grondvlak}} \cdot \text{hoogte}$

We onderscheiden de volgende drie speciale gevallen van prisma's.

Voorbeeld 3.4.1. Elk kubus is een prisma waarbij de zijvlakken vierkanten zijn. Alle 8 ribben zijn dus even lang. Een kubus is een bijzonder recht prisma.

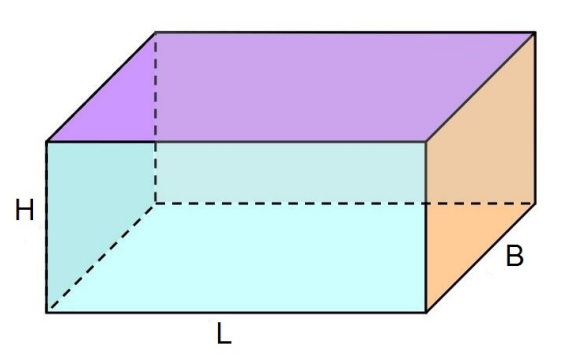


3.4 Oppervlakte en volume ruimtelichamen

We hebben de volgende formules:

- Oppervlakte van een kubus: $A = 6z^2$.
- Volume van een kubus: $V = z^3$

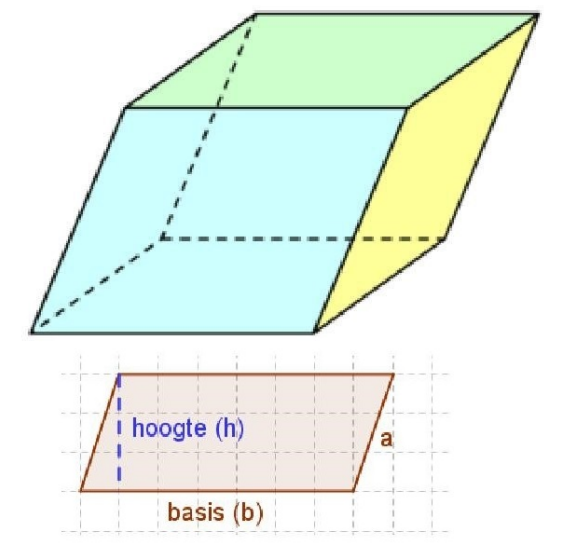
Voorbeeld 3.4.2. Een balk is een prisma waarbij de 6 zijvlakken bestaan uit rechthoeken. Een balk is ook een bijzonder recht prisma.



We hebben de volgende formules:

- Oppervlakte van een balk: $A = 2(L \cdot B + B \cdot H + H \cdot L)$.
- Volume van een balk: $V = L \cdot B \cdot H$

Voorbeeld 3.4.3. Een parallellepipedum is een veelvlak waarvan alle 6 zijvlakken bestaan uit parallellogrammen die paarsgewijs gelijk en evenwijdig zijn. Dus ook het grond- en het bovenvlak zijn parallellogrammen. Een parallellepipedum is een bijzonder scheef prisma, terwijl de kubus en de balk speciale gevallen zijn van een parallellepipedum.



We hebben de volgende formules:

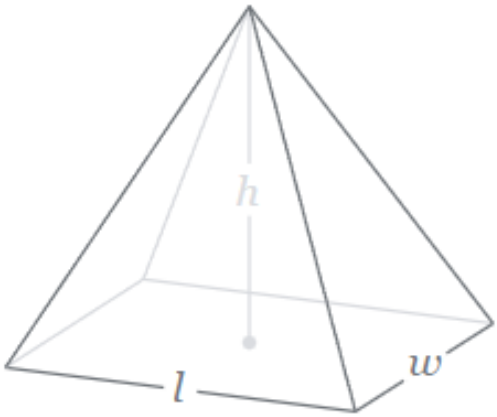
CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Oppervlakte en volume ruimtelichamen

- Oppervlakte van een prisma: A = som van de oppervlakten.
- Volume van een prisma: $V = \text{opp}_{\text{grondvlak}} \cdot \text{hoogte}$

Definitie 3.4.2. Een piramide is een ruimtefiguur waarvan het grondvlak een veelhoek (driehoek, vierhoek, vijfhoek, ...) is en waarvan de hoekpunten verbonden worden met een willekeurig punt in de ruimte. Dit punt noemen we de top van de piramide. De opstaande zijvlakken zijn allemaal driehoekig.

Een rechte piramide heeft als grondvlak een regelmatige veelhoek en de top ligt boven het centrum van het grondvlak. Alle zijvlakken hebben dezelfde driehoekige vorm.



Eigenschap 3.4.2. Oppervlakte: A = som van alle oppervlakten
Volume: $V = \frac{1}{3}\text{opp}_{\text{grondvlak}} \cdot \text{hoogte}$

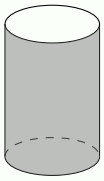
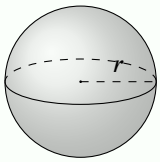
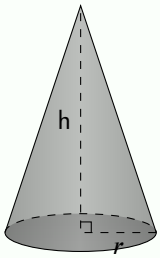
Tenslotte vermelden we nog enkele bekende ruimtefiguren: de cilinder, bol en kegel.

De beroemde Griekse wiskundige Archimedes (287 - 212 BC) hield zich bezig met het berekenen van de inhoud van deze lichamen. Hij ontdekte dat de inhouden van een (rechte) cilinder, een halve bol en een (rechte) kegel met dezelfde straal en hoogte zich verhouden als $3 : 2 : 1$. Archimedes kwam tot dit inzicht met behulp van een ingenieus mechanisch argument. Vandaag kan men de volumes van een kegel, bol of cilinder relatief eenvoudig berekenen met behulp van integralen. We zullen op deze pagina hier niet verder op ingaan en beperken ons tot een overzicht van enkele relevante formules.

Eigenschap 3.4.3.

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Oppervlakte en volume ruimtelichamen

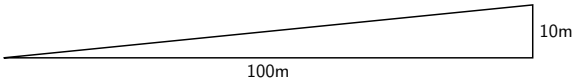
Naam	Figuur	Oppervlak	Volume
Cilinder		$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$	$V = \pi r^2 h$
Bol		$A = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Kegel		$A = \pi r(r + \sqrt{h^2 + r^2})$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Opmerking 3.4.1. De formule voor de oppervlakte van een cilinder kan eenvoudig ingezien worden als volgt. Het gekromde randoppervlak kan je beschouwen als een A4-papier dat werd gekruld en waarvan de uiteinden werden samengekleefd. De lengte van één zijvlak van deze rechthoek komt dan overeen met de lengte van cirkelomtrek in het boven/grond-vlak (i.e. $2\pi r$). Het andere zijvlak van het A4-papier heeft een lengte die overeenkomt met de hoogte van de cilinder (i.e. h). De oppervlakte van het gekromde randoppervlak is dus: $A = l \cdot b = 2\pi rh$. We moeten vervolgens nog de oppervlakte van het grond- en bovenvlak erbij tellen, dus nog 2 keer πr^2. Dit levert dan de bovenstaande formule op voor de cilinder.

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 De vergelijking van een rechte

De *helling* van een weg wordt meestal uitgedrukt als *een percentage*. Een helling van 10% betekent dan dat je per 100m horizontale afstand met 10m stijgt. Soms is het nuttig een helling uit te drukken *met graden* eerder dan met een percentage. Bij een helling van 100% stijg je 1m op elke 1m horizontale verplaatsing, en dat komt dus overeen met een helling van 45°.



$$\text{Helling} = \frac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}} = \frac{10}{100} = 0.1 \quad (= 10\%).$$

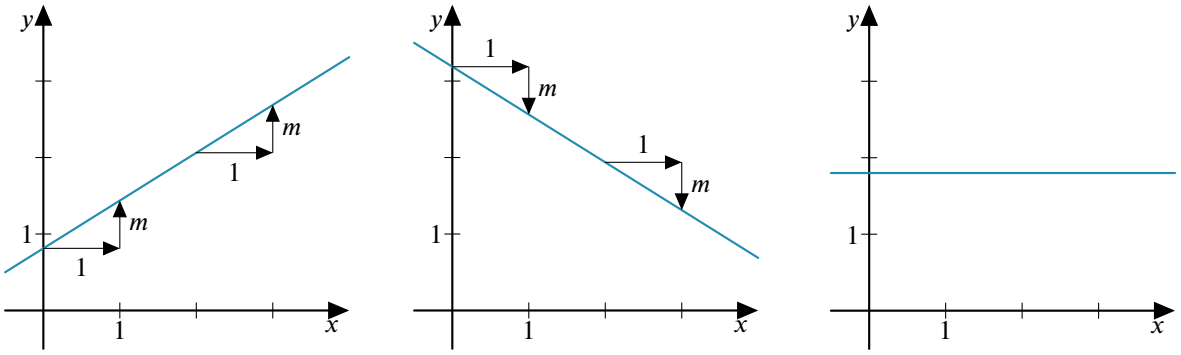
De wiskundige term voor helling-als-percentage is *richtingscoëfficiënt*, soms afgekort to rico:

Definitie 3.5.1. De **richtingscoëfficiënt** of **rico** van een rechte is de *helling* van die rechte.

Als de rechte door de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) gaat, is de rico m gelijk aan

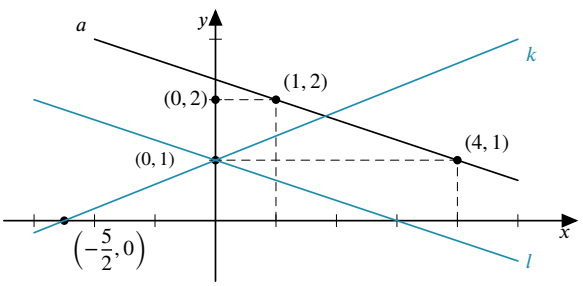
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \left(\text{of ook } m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right).$$

Bij **stijgende** rechten is $m > 0$ en bij **dalende** rechten is $m < 0$. Voor horizontale rechten is $m = 0$. Voor verticale rechten is de rico niet gedefinieerd, intuïtief kan je denken dat dergelijk rechte oneindig steil is.



$m > 0$ $m < 0$ $m = 0$

Oefening 3.5.1. Bepaal de rico's van de rechten k en l.



Antwoord: $m_k = \frac{2}{5}$ en $m_l = -\frac{1}{3}$

3.5 De vergelijking van een rechte

Eigenschap 3.5.1. De vergelijking van een niet-verticale rechte l kan steeds geschreven worden in de vorm

$$l \leftrightarrow \boxed{y = mx + q},$$

waarbij m de rico is en q het snijpunt met de y-as. De vergelijking kan op verschillende manieren worden opgesteld:

- De rechte l door het **punt** (x_1, y_1) met **rico** m_l.
  Het punt (x, y) behoort tot de rechte l als en slechts als
  $$l \leftrightarrow \boxed{y - y_1 = m_l(x - x_1)}.$$
- De rechte l door de **twee punten** (x_1, y_1) en (x_2, y_2) met $x_1 \neq x_2$.
  Het punt (x, y) behoort tot de rechte l als en slechts als
  $$l \leftrightarrow \boxed{(y - y_1) = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)}.$$

De vergelijking van een verticale rechte is steeds van de vorm $\boxed{x = b}, b \in \mathbb{R}$.
De vergelijking van een horizontale rechte is steeds van de vorm $\boxed{y = q}, q \in \mathbb{R}$.

Oefening 3.5.2. Stel een vergelijking op van een rechte door twee punten.

1. De rechte door $(-5, -2)$ en $(-1, -3)$ heeft als vergelijking $y = -\frac{1}{4}x - \frac{13}{4}$
2. De rechte door $(0, 0)$ en $(2, 3)$ heeft als vergelijking $y = \frac{3}{2}x$
3. De rechte door $(1, 6)$ met rico -4 heeft als vergelijking $y = -4x + 10$

Oefening 3.5.3.

1. Voldoet het punt $(1000, -1750)$ aan de vergelijking van de rechte $a \leftrightarrow y = -2x + 250$? Ja
2. Behoort het punt $(5, 1)$ tot $b \leftrightarrow y - 20 = 4x$? Nee

Feedback: Neen, als je $(5, 1)$ invult, krijg je $1 - 20 = 4 \cdot 1$, en dat is niet waar, want $-19 \neq 4$.

Alternatieve redenering: als je $x = 5$ invult, krijg je $y = 40$. Het punt $(5, 1)$ behoort dus niet tot de rechte b. Het punt met $x = 5$ op de rechte b is het punt $(5, 40)$.

Definitie 3.5.2 (Cartesiaanse vergelijkingen van een rechte)**.**

Een **cartesiaanse vergelijking** van een rechte is een uitdrukking van de vorm

$$\boxed{ax + by + c = 0} \quad (\text{ of ook } ax + by = d)$$

met a en b niet beide nul. Een punt (x_0, y_0) ligt op de rechte ligt als en slechts als $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Eigenschap 3.5.2. Voor de rechte met vergelijking $ax + by + c = 0$ geldt:

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 De vergelijking van een rechte

$a = 0$	$\iff$	de rechte is evenwijdig met de x-as	$\iff$	$y = k$
$b = 0$	$\iff$	de rechte is evenwijdig met de y-as	$\iff$	$x = k$
$c = 0$	$\iff$	de rechte gaat door de oorsprong	$\iff$	$ax + by = 0$ of $y = kx$ of $x = k'y$

Opmerking 3.5.1. Voor niet-vertikale rechten kan je eenvoudig wisselen tussen de cartesiaanse vergelijking en de standaardvergelijking:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{met } b \neq 0 \iff y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \iff y = mx + q \quad \text{met } m = -\frac{a}{b} \text{ en } q = -\frac{c}{b}$$

Voorbeeld 3.5.1. Geef de vergelijking van volgende rechten:

1. door de oorsprong en $(3, 6)$: $y = 2x$

2. door $(0, 1)$ en $(3, 7)$: $y = 2x + 1$

3. door de oorsprong en $(-1, -2)$: $y = 2x$

4. door $(0, 0)$ en $(-1, -1)$: $x = y$

5. door $(0, 0)$ en $(1, 2)$: $y = 2x$

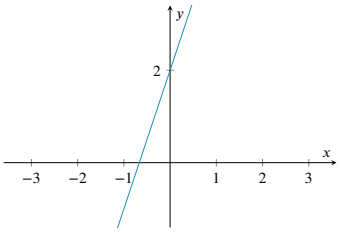
6. door $(0, 1)$ en $(-1, -1)$: $y = 2x + 1$

7. door $(1, 2)$ en $(-1, -2)$: $y = 2x$

Oefening 3.5.4. Teken de rechten met volgende vergelijkingen. Duidt telkens de snijpunten aan met de assen en de richtingscoëfficiënten.

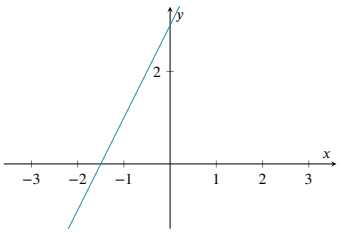
1. $y = 3x + 2$

Uitwerking:



2. $y = 2x + 3$

Uitwerking:

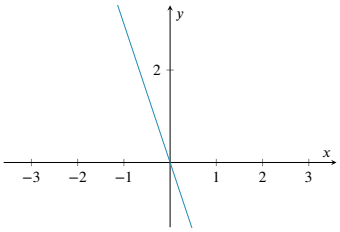


3. $y = -3x$

CC BY-NC-SA 4.0

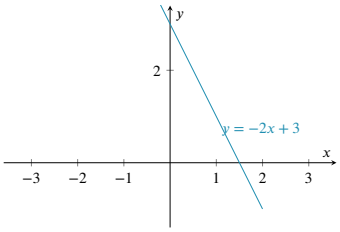
3.5 De vergelijking van een rechte

Uitwerking:



4. $y = -2x + 3$

Uitwerking:

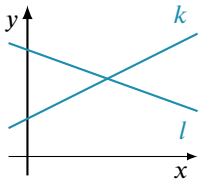


CC BY-NC-SA 4.0

3.6 Onderlinge ligging van rechten

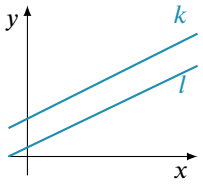
Twee rechten met vergelijkingen van de vorm $y = mx + q$ kunnen volgende *relatieve posities* hebben:

Snijdend



één snijpunt
rico's verschillend
constante termen irrelevant
Voorbeelden:
$y = x + 1$ en $y = 2x + 1$

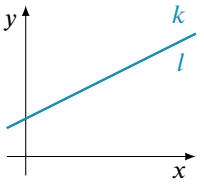
Evenwijdig



geen snijpunten
rico's gelijk
constante termen verschillend

$y = x + 1$ en $y = x + 2$

Samenvallend



oneindig veel snijpunten
rico's gelijk
constante termen gelijk

$y = x + 1$ en $y = x + 1$

Opmerking 3.6.1.

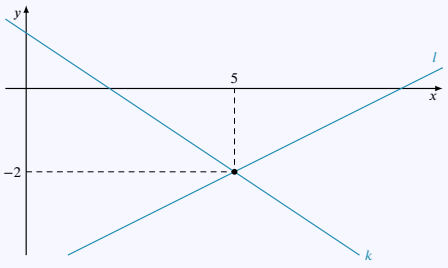
- Er is wat terminologische verwarring mogelijk of *samenvallende* rechten al dan niet ook *evenwijdig* zijn. Volgens bovenstaand schema is dat *niet* het geval: evenwijdige rechten hebben *geen* gemeenschappelijke punten, en samenvallende rechten hebben er oneindig veel. In de praktijk is het soms toch gebruikelijk om ook samenvallende rechten 'evenwijdig' te noemen.
- Samenvallende rechten hebben *dezelfde* vergelijking van de vorm $y = mx + q$. Maar let op: vergelijkingen van de vorm $ax + by + c = 0$ van samenvallende rechten moeten enkel *evenredig* zijn. Zo zijn de rechten $y = 2x + 4$ en $x = 2 - \frac{1}{2}y$ wel degelijk samenvallend (of 'gelijk').
- We bespreken verder nog een speciaal geval van snijden, namelijk *loodrecht* snijden.

Voorbeeld 3.6.1. Beschouw de rechten $k \leftrightarrow 2x + 3y - 4 = 0$ en $l \leftrightarrow x - 2y - 9 = 0$.

De rechten k en l snijden als ze een gemeenschappelijk punt hebben, dus als er één punt (x^*, y^*) is dat voldoet aan beide vergelijkingen. Dit punt moet dus een unieke oplossing zijn van het stelsel

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0, \\ x - 2y - 9 = 0. \end{cases}$$

Oplossen van dit stelsel, bijvoorbeeld door het dubbele van de tweede vergelijking af te trekken van de eerste vergelijking, levert $7y + 14 = 0$, en dus $y = -2$. Deze waarde $y = -2$ substitueren in een van de bovenstaande vergelijkingen levert $x = 5$. Besluit: de rechten k en l snijden in het punt $(5, -2)$.



Oefening 3.6.1.

1. Door een punt buiten een rechte gaat precies één rechte evenwijdig aan die rechte.

CC BY-NC-SA 4.0

3.6 Onderlinge ligging van rechten

2. Door een punt buiten een rechte gaan oneindig veel rechten die die rechte snijdt.

3. Door een punt buiten een rechte gaat geen enkele rechte die samenvalt met die rechte.

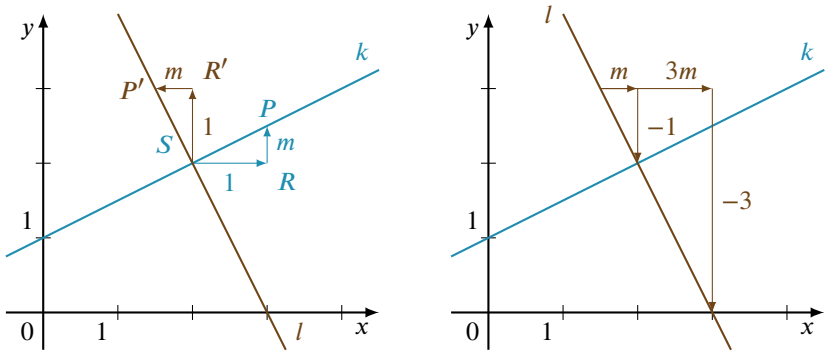
4. Door een punt buiten een rechte gaat geen enkele rechte die samenvalt met die rechte.

Oefening 3.6.2. Als k en l verschillende evenwijdige rechten zijn, en l en m zijn onderling verschillende evenwijdige rechten, dan kunnen k en m zowel samenvallend als evenwijdig zijn.

Er is een interessant verband tussen de rico's van twee rechten die elkaar **loodrecht** (ook **orthogonaal**) snijden, dus onder een hoek van 90°.

Als een rechte k loodrecht staat op een rechte l, dan kan je l verkrijgen door een rotatie van k over 90° rond hun snijpunt.

De rico m van k is de stijging van k na een horizontale afstand 1, dus de afstand $|RP|$. We bepalen nu de rico van de rechte l. Na de rotatie over 90° zien we dat een beweging naar links met m eenheden gepaard gaat met een stijging van 1 eenheid. Met andere woorden: een horizontale beweging van m eenheden naar rechts (bv. vanuit P') is gekoppeld aan een verticale beweging van -1 eenheid. Een horizontale beweging van $3m$ naar rechts veroorzaakt een verticale beweging van -3, ... Dus $m_l = \dfrac{-1}{m} = \dfrac{-3}{3m} = \ldots$.



Samengevat:

Eigenschap 3.6.1.

Twee (niet-verticale) rechten k en l staan **loodrecht op elkaar** als hun rico's voldoen aan

$$m_k = -\frac{1}{m_l} \text{ of dus } \boxed{m_k \cdot m_l = -1}$$

Elke verticale rechte staat loodrecht op elke horizontale rechte.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Module 4
Archief?

(Versie 2026/10/26.1)

4.1 Vectoren in de fysica

TIJDELIJKE VERSIE UIT DE ZOMERCURSUS 2019 ZONDER TEKENINGEN

(en ZONDER OEFENINGEN, maar die staan wel in de TeX-source!)

Rekenen met vectoren is een basisvaardigheid voor vakken natuurkunde. Bij het vectorrekenen maken we gebruik van goniometrie en vlakke meetkunde. In deze module willen we de belangrijkste definities en eigenschappen herhalen en toepassen in oefeningen. De QR-codes in deze module kunnen met een smartphone of webcam gelezen worden en geïnterpreteerd worden door een QR-reader, bijvoorbeeld i-nigma.

Elementaire fysische grootheden kunnen in twee grote categorieën opgedeeld worden: "scalaire fysische grootheden" en "vectoriële fysische grootheden". *Scalars of scalaire grootheden* zijn volledig gekend door een algebraïsch maatgetal (reëel getal) en een eenheid, bv. een massa m van 5 kg, een lengte l van 2 m, een temperatuur T van $-10°$C. *Vectoriële fysische grootheden* zijn gekenmerkt door een grootte, richting, zin en eenheid. Vectoren worden aangeduid met een pijltje of worden vet gedrukt. Voorbeelden van vectoriele grootheden zijn positie ($\vec{r}$), snelheid ($\vec{v}$), versnelling ($\vec{a}$), kracht ($\vec{F}$), elektrisch veld ($\vec{E}$). Vectoren worden op een figuur aangeduid met een pijl. De rechte waarop een vector gelegen is wordt de drager genoemd.

Meestal werken we in toepassingen in de driedimensionale ruimte. Hier zullen we ons echter beperken tot twee dimensies. Dit betekent dat we enkel vectoren in een vlak zullen beschrijven.

4.1.1 Cartesiaans assenstelsel en cartesiaanse coördinaten

Vooralleer we aan de vectoren coördinaten kunnen toekennen moeten we assen invoeren. Een as is een rechte waar een positieve zin aan toegekend is. In een figuur wordt de positieve zin meestal aangeduid met een pijltje of door een eenheidsvector $\vec{e}$ (vector met lengte 1) volgens de positieve zin. De vector $\vec{a}$ wordt aangeduid met een pijl en kunnen we schrijven als een product van een reëel getal a en de eenheidsvector $\vec{e} \parallel \vec{a}$. a wordt de algebraïsche waarde of grootte[1] van de vector $\vec{a}$ genoemd. Deze waarde is positief als $\vec{a}$ en $\vec{e}$ dezelfde zin hebben, en negatief als $\vec{a}$ en $\vec{e}$ een tegengestelde zin hebben.

Wanneer we vectoren in een vlak willen beschrijven hebben we twee assen nodig. Deze assen zullen we othogonaal kiezen met de eenheid op iedere as dezelfde, i.e. een cartesiaans assenstelsel. Conventioneel worden de assen voor een vlak benoemd met x en y. De eenheidsvectoren $\vec{e}_x \parallel x$ en $\vec{e}_y \parallel y$ vormen een basis.[2] Dit betekent dat elke vector $\vec{a}$ in het xy-vlak op éénduidige wijze kan ontbonden worden in vectorcomponenten volgens $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$: $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$. $\vec{a}_x = a_x\vec{e}_x$ is dan de vectorcomponent volgens $\vec{e}_x$ of de coördinaatprojectie op x. Analoog wordt $\vec{a}_y = a_y\vec{e}_y$ de vectorcomponent volgens $\vec{e}_y$ of de coördinaatprojectie op y genoemd. De coördinaat van deze vector is dan (a_x, a_y).

4.1.2 Lengte, richting en zin van vectoren

4.1.2.1 Lengte of norm

De lengte of norm van de vector $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$ kan berekend worden via
$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$. Dit is een rechtstreeks gevolg van de stelling van Pythagoras.

4.1.2.2 Richting en zin

Wat richting en zin betreft, verschilt het wiskundige taalgebruik soms van de dagelijkse taal. Twee even-wijdige pijlen die een tegengestelde kant op wijzen hebben wiskundig gesproken dezelfde richting en een tegengestelde zin.

In twee dimensies kan een richting aangegeven worden

[1] Met de "grootte van een vector"wordt soms ook de norm bedoeld, meestal is het duidelijk uit de context als men de norm of de algebraïsche waarde bedoelt.

[2] In sommige tekstboeken worden ook de notaties $\hat{\imath} \parallel x$ en $\hat{\jmath} \parallel y$ gebruikt.

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Vectoren in de fysica

- door een hoek t.o.v. een referentierichting. Wanneer een x, y-assenstelsel gegeven is, kiest men vaak voor een hoek t.o.v. de positieve x-as, maar andere referentierichtingen zijn even goed. De hoek θ die de vector maakt met de positieve x-as kan berekend worden via $\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$. Let op: er zijn twee hoeken met dezelfde tangens. De juiste hoek bepaal je door een figuur te maken.
- door een eenheidsvector, d.w.z. een vector met lengte één, die de richting en zin aangeeft. Bv. $(0.6, 0.8)$. Wanneer we een vector hebben met een andere lengte, bv. de vector $(2, 5)$ met lengte $\sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$, dan kunnen we steeds een eenheidsvector vinden met dezelfde richting en zin, door te delen door deze lengte: $\frac{1}{\sqrt{29}}(2, 5)$.

Voor toepassingen is het belangrijk dat je snel kan overstappen van een richting gegeven door een hoek t.o.v. een as naar een richting gegeven door een eenheidsvector. Leer de formules echter niet uit het hoofd, maar probeer dit grafisch te zien. Dit kan zowel met het beeld van rechthoekige driehoeken, als door het beeld van de goniometrische cirkel te gebruiken. Hoe je het beeld van de goniometrische cirkel gebruikt kan je zien in de clip.

https://youtu.be/EsHYrhoYJHM

Zelf experimenteren kan met onderstaande applet. Merk op dat in de applet alle hoeken een positieve waarde krijgen. Als je ook negatieve waarden voor de hoeken toelaat verandert het plaatje.

In sommige toepassingen kiezen we ervoor om hoeken in tegenwijzerzin een negatieve waarde te geven. Als je dan de hoek definieert t.o.v. de positieve x-as is de richting steeds gegeven door $(\cos\theta, \sin\theta)$.

4.1.2.3 Voorstelling van vectoren met gekende richting

In fysische problemen, is dikwijls de richting van de vector $\vec{a}$ gekend, maar niet de zin en de lengte (norm). Op een figuur wordt er dan een bepaalde zin vrij gekozen. $\vec{a}$ wordt geschreven als $\vec{a} = a \cdot \vec{e}_a$, met de zin van $\vec{e}_a$ zoals aangeduid op de figuur. De onbekende a wordt dan gezocht door een stelsel van vergelijkingen op te lossen. Indien $a > 0$, dan is $\|\vec{a}\| = a$ en heeft $\vec{a}$ dezelfde zin als $\vec{e}_a$. De vector $\vec{a}$ heeft bijgevolg de zin zoals aangeduid op de figuur. Indien $a < 0$, dan is $\|\vec{a}\| = -a$ en heeft $\vec{a}$ een tegengestelde zin als $\vec{e}_a$. De vector $\vec{a}$ heeft bijgevolg de tegengestelde zin als aangeduid op de figuur.

4.1.2.4 Poolcoördinaten

Cartesiaanse coördinaten (x, y) zijn niet de enige manier om een vector weer te geven met twee getallen. De lengte r en de richting uitgedrukt als hoek θ in tegenwijzerzin t.o.v. de positieve x-as worden de poolcoördinaten genoemd. Voor meer informatie over poolcoördinaten en de omzetting tussen poolcoördinaten en cartesische coördinaten verwijzen we naar de aparte module over poolcoördinaten.

4.1.2.5 Vrije en gebonden vectoren

In de fysica maakt men een onderscheid tussen *vrije en gebonden vectoren*. Als je een *vrije vector* verschuift in het vlak of in de 3-dimensionele ruimte, blijft dit dezelfde vector. Wanneer men op eenzelfde afbeelding verschillende malen dezelfde vector tekent, heeft men verschillende, evenwijdige pijltjes van gelijke lengte die in dezelfde richting wijzen. Twee vrije vectoren zijn gelijk als ze dezelfde lengte, richting en zin hebben. *Gebonden vectoren* hebben ook een vast *aangrijpingspunt*. Hierdoor ligt de grafische voorstelling van een gebonden vector volledig vast: op één afbeelding kan men slechts op één manier de gebonden vector tekenen. De vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ in onderstaande figuur zijn gelijk als het gaat om vrije vectoren, maar verschillend als het gaat om gebonden vectoren, aangezien ze een verschillend aangrijpingspunt hebben.

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Vectoren in de fysica

4.1.3 Bewerkingen met vectoren

4.1.3.1 Som en vermenigvuldiging met een scalar

De som van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ bekomt men door $\vec{b}$ te verschuiven zodat het beginpunt samenvalt met het eindpunt van $\vec{a}$. De vector die men bekomt door het beginpunt van $\vec{a}$ te verbinden met het eindpunt van $\vec{b}$ is de vector $\vec{a}+\vec{b}$. Indien de componenten van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gegeven zijn, kunnen we de vectorsom berekenen door component per component op te tellen:
$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\vec{e}_x+(a_y+b_y)\vec{e}_y$.

Wanneer we de vector $\vec{a}$ vermenigvuldigen met een scalar m verkrijgen we de vector $m\vec{a}$ die dezelfde richting heeft als de vector $\vec{a}$. Indien $m>0$ heeft die vector ook dezelfde zin; indien $m<0$ heeft die vector een tegengestelde zin. De lengte van de vector $m\vec{a}$ is $|m|$ keer de lengte van de vector $\vec{a}$.

Vectoren met de som en de vermenigvuldiging met een scalar gedefinieerd zoals hierboven vormen een vectorruimte. Er gelden dus volgende eigenschappen.

Eigenschap 4.1.1. (a) Het optellen van twee vectoren is associatief:
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

(b) De vector met lengte 0 wordt genoteerd met $\vec{0}$. Deze vector wordt de nulvector genoemd. Er geldt:
$\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

(c) De tegengestelde vector van $\vec{a}$ is $-\vec{a}$:
$-\vec{a}+\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

(d) Het optellen van twee vectoren is commutatief:
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

(e) Het vermenigvuldigen van een vector met een scalar is distributief ten opzichte van de opteling van scalairen:
$(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$.

(f) Het vermenigvuldigen van een vector met een scalar is distributief ten opzichte van de vectoroptelling:
$n(\vec{a}+\vec{b})=n\vec{a}+n\vec{b}$.

(g) Het vermenigvuldigen van een vector met een scalar is associatief ten opzichte van de vermenigvuldiging van scalairen:
$m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}$.

(h) $1\vec{a}=\vec{a}$

4.1.3.2 Afstand tussen 2 plaatsvectoren

Wanneer we de ongebonden vector $\vec{b}-\vec{a}$ zoeken, vinden we dat dit de vector is die het eindpunt van de vector $\vec{a}$ met het eindpunt van de vector $\vec{b}$ verbindt. De norm van deze vector $||\vec{b}-\vec{a}||$ is bijgevolg de afstand tussen beide vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

De relatieve afstand tussen twee vectoren komt voor in verschillende toepassingen, waarvan we er hier enekele geven:

- Cirkel
  Een cirkel bevat alle punten (x,y) op dezelfde afstand r van de oorsprong (a,b). Bijgevolg is de vergelijking van deze cirkel:

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

- Middelloodlijn
  De middelloodlijn van het lijnstuk tussen de punten (a,b) en (c,d) bevat alle punten (x,y) op dezelfde afstand van de punten (a,b) en (c,d). Bijgevolg is de vergelijking van deze middelloodlijn:
  $(x-a)^2+(y-b)^2=(x-c)^2+(y-d)^2$.

- Middelpunt van een cirkel door 3 gegeven punten
  Het middelpunt van een cirkel door 3 gegeven punten kan je zoeken door te eisen dat de afstand tussen dit onbekende middelpunt en elk van de punten gelijk moet zijn.

4.1.3.3 Scalair produkt (inwendig produkt) en orthogonale projectie

Het scalair product van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is het reëel getal gegeven door $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$, waarin θ de hoek voorstelt die ingesloten is tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Indien φ het complement van de ingesloten hoek θ is, dan is $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\varphi$.

De orthogonale projectie van een vector $\vec{a}$ op een as bepaald door de eenheidsvector $\vec{e}_b \parallel \vec{b}$ is gegeven door $\vec{a}_b=\|\vec{a}\|\cos\theta\,\vec{e}_b=(\vec{a}\cdot\vec{e}_b)\,\vec{e}_b$. Hieruit vinden we dat het scalair produkt ook kan berekend worden met behulp van orthogonale projecties:
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_b\,b=a\,b_a$.

Voor de eenheidsvectoren evenwijdig met de assen van een cartesiaans assenstelsel geldt $(i,j=x \text{ of } y)$:

- $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=1$ als $i=j$
- $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=0$ als $i\neq j$.

Hieruit volgt dat voor de vectoren
$\vec{a}=a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y$ en $\vec{b}=b_x\vec{e}_x+b_y\vec{e}_y$, het scalair produkt berekend kan worden via
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y$.

Eigenschap 4.1.2. (a) Het scalair product is commutatief: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

(b) Het scalair product is lineair $(m,n\in\mathbb{R})$:
$(m\vec{a}+n\vec{b})\cdot\vec{c}=m(\vec{a}\cdot\vec{c})+n(\vec{b}\cdot\vec{c})$

(c) De norm van een vector $\vec{a}$ kan berekend worden via het scalair product:
$\|\vec{a}\|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$.

(d) De **ingesloten hoek θ tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$** kan bepaald worden via
$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$.

(e) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$ of $\vec{b}=\vec{0}$ of $\vec{a}\perp\vec{b}$

4.1.4 Vectorvergelijkingen

Twee vectoren zijn aan mekaar gelijk als hun lengte, richting en zin aan mekaar gelijk zijn.

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Vectoren in de fysica

Grafische methode

Een eerste manier om een vectorvergelijking op te lossen is grafisch: je maakt een schets van de gegevens en je gebruikt meetkundige eigenschappen om de onbekende te vinden.

Voorbeeld 4.1.1. De vector $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ kan grafisch bepaald worden door de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ na elkaar te tekenen en het beginpunt van $\vec{a}$ met het eindpunt van $\vec{b}$ te verbinden. Indien $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ en de hoek θ tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gegeven zijn, kan de grootte en richting van de vector $\vec{c}$ berekend worden via de cosinus- en sinusregel:

$$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\pi - \theta) = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\theta)$$

$$\frac{\sin\beta}{\|\vec{b}\|} = \frac{\sin(\pi-\theta)}{\|\vec{c}\|} = \frac{\sin\theta}{\|\vec{c}\|}$$

Voorbeeld 4.1.2. Los volgende vectorvergelijking op naar v_2 en v_3: $\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 = v_3\vec{e}_3$, met $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ de eenheidsvectoren aangeduid op nevenstaande figuur.

oplossing:

- Teken de vector $\vec{v}_2 = v_2\vec{e}_2$ zodat het beginpunt aansluit op het eindpunt van $\vec{e}_1$. De vector teken je evenwijdig aan $\vec{e}_2$.
- Teken de vector $\vec{v}_3 = v_3\vec{e}_3$ zodat het beginpunt samenvalt met het beginpunt van $\vec{e}_1$. De vector teken je evenwijdig aan $\vec{e}_3$.
- $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$ moeten hetzelfde eindpunt hebben. Dit valt dus samen met de kruising van de 2 dragers.
- De vectoren $\vec{e}_1$, $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$ vormen een rechthoekige driehoek met rechthoekszijde $\|\vec{e}_1\| = 1$. In deze rechthoekige driehoek vinden we
  $v_2 = \dfrac{1}{\sin(30°)} = 2$
  $v_3 = \dfrac{1}{\tan(30°)} = \sqrt{3}.$

Via de componenten

Een tweede manier om een vectorvergelijking op te lossen is gebruik makend van de eigenschap dat twee vectoren aan elkaar gelijk zijn als elk van hun componenten aan elkaar gelijk zijn. Dit betekent dat een vectorvergelijking in de driedimensionele ruimte equivalent is aan een set van 3 scalaire vergelijkingen.

Voorbeeld 4.1.3.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x + b_x &= c_x \\ a_y + b_y &= c_y \\ a_z + b_z &= c_z \end{cases}$$

Voorbeeld 4.1.4. Los volgende vectorvergelijking op naar v_2 en v_3: $\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 = v_3\vec{e}_3$, met $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ de eenheidsvectoren aangeduid op nevenstaande figuur.

oplossing:

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Vectoren in de fysica

- Aangezien $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_3$ orthogonaal staan is een natuurlijke keuze voor het assenstelsel $\vec{e}_x \parallel \vec{e}_1$ en $\vec{e}_y \parallel \vec{e}_3$.
- De coördinaten voor de getekende vectoren worden dan
  $\vec{e}_1(1,0)$
  $\vec{e}_2(-\sin(30°), \cos(30°))$
  $\vec{e}_3(0,1)$.
- De vectorvergelijking is equivalent aan een stelsel van twee scalaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} 1 - v_2 \sin 30° &= 0 \quad \text{(vergelijking volgens } x\text{)} \\ v_2 \cos 30° &= v_3 \quad \text{(vergelijking volgens } y\text{)} \end{cases}$$

- Oplossen van dit stelsel geeft ons $v_2 = 2$ en $v_3 = \sqrt{3}$. Merk op dat dit dezelfde oplossing is als deze die we verkregen gebruik makend van de grafische methode.

CC BY-NC-SA 4.0