KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Xoverzicht: Logica en verzamelingen

(Versie 2026/10/26.7)

Inhoudsopgave

1.1 Propositielogica

Mensen denken en communiceren in een taal, bijvoorbeeld in het Nederlands. Soms is het niet eenvoudig om precieze bewoordingen te vinden om een gedachte of redenering exact weer te geven. Bovendien heeft iedereen een eigen taalgevoel, wat tot gevolg kan hebben dat degene die een zin *uitzendt* hem anders interpreteert dan degene die de zin *ontvangt*.

Stel, je belooft aan een kleuter het volgende:

Als je braaf bent, dan krijg je een zuurtje of een reep chocolade.

Wat mag die kleuter dan precies verwachten?

- Kan hij als hij braaf is ook een zuurtje *en* een reep chocolade krijgen?
- Als hij braaf is, mag hij dan *zelf* kiezen tussen een zuurtje of een reep chocolade?
- Kan hij ook iets krijgen als hij *niet* braaf is, of is dat uitgesloten?
- Hoe braaf moet hij eigenlijk zijn om iets te krijgen? Wat als hij *een heel klein beetje* niet braaf is?

Om dergelijke onduidelijkheden en verwarring te vermijden kan men sommige zinnen en sommige redeneervormen proberen onttrekken aan de gewone taal. Men kan ze **formaliseren** in de *symbolische* of *formele logica*. We beperken ons hier tot een kleine selectie van notaties uit de logica die worden gebruikt voor het formuleren van wiskundige definities, eigenschappen en redeneringen.

1.1.1 Proposities en predicaten

Definitie 1.1.1.

Een **propositie** is een zinvolle mededelende volzin, die al dan niet *waar* kan zijn.

De precieze voorwaarden voor *zinvolheid* en *waarheid* zullen van de context afhangen. We zullen daar hier niet verder op ingaan. We spreken af om *uitspraak* als synoniem te gebruiken voor *propositie* in deze cursus.

Voorbeeld 1.1.1 (proposities)**.**

'De aarde is een planeet'	is	een ware propositie
'De aarde is plat'	is	een onware propositie
'De een planeet aarde is'	is	geen propositie (want niet 'zinvol' of 'betekenisvol')
'1+1=2'	is	een ware proposite
'1+1=3'	is	een onware propositie
'1+=!,-5'	is	geen propositie (want niet 'zinvol' of 'betekenisvol')
'De vakantie is voorbij'	is	een propositie (waarvan de waarheid afhangt van de context)
'Is er leven op Pluto?'	is	geen propositie (want een vraag)
'Begreep ik wiskunde maar'	is	geen propositie (want een wens of verzuchting)
'Die is gek'	is	geen propositie (tenzij uit de context blijkt over wie het gaat)
'5 is een priemgetal'	is	een ware propositie
'n is een priemgetal'	is	geen propositie (tenzij uit de context blijkt over welke n het gaat)

Definitie 1.1.2.

Een **predicaat** is een zinvolle mededelende volzin met (één of meerdere) **vrije variabelen** in.

Een vrije variabele is een uitdrukking waarvoor concrete dingen moeten worden ingevuld voordat het predicaat al dan niet waar kan worden. Een predicaat heeft dus een *context* nodig waarin de betekenis van de vrije variabele wordt vastgelegd.

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Propositielogica

Voorbeeld 1.1.2 (predicaten).

'n is een priemgetal' is een predicaat met vrije variabele n:

Als

$n = 5$	dan wordt dit de *ware* propositie '5 is een priemgetal'
$n = 10$	dan wordt dit de *onware* propositie '10 is een priemgetal'
$n = 1/2$	dan krijgen we geen betekenisvolle propositie

'Er bestaan natuurlijke getallen n zodat n een priemgetal is.'	is een ware propositie
'Voor alle natuurlijke getallen n is n een priemgetal.'	is een onware propositie
'Voor alle reële getallen n geldt dat n een priemgetal is.'	is geen betekenisvolle propositie
'Voor alle letters n geldt dat n een priemgetal is.'	is geen betekenisvolle propositie

1.1.2 Logische connectieven: '... of...', '... en...', 'niet...'

De propositielogica probeert de betekenis en waarheidswaarde van samengestelde proposities te bepalen op basis van de samenstellende, eenvoudigere proposities. De betekenis van samengestelde proposities kan vastgelegd of verduidelijkt worden door een **waarheidstabel**. Alle basisproposities p, q, enz. kunnen ofwel waar zijn ofwel niet waar (we zeggen ook 'onwaar' of 'vals'). Er is geen andere optie voor de waarheidswaarde van een propositie dan waar of niet waar, er is geen grijze zone. De waarheid van een samenstelling hangt dan af van de waarheidswaarden van p, q enz., zoals aangegeven in de waarheidstabel. We gebruiken hier de afspraak dat 'w' aanduidt dat de propositie waar is en 'o' dat de propositie onwaar is. Soms wordt ook de afspraak gemaakt dat het getal 1 aanduidt dat de propositie waar is en het getal 0 dat de propositie onwaar is.

Proposities kunnen worden samengesteld via conjunctie ('en'), disjunctie ('of') en negatie ('niet'):

Definitie 1.1.3 (Conjunctie, disjunctie en negatie).

Als p en q proposities zijn, dan noteren we de propositie 'p of q' met $p \vee q$ en 'p en q' met $p \wedge q$. De uitspraak dat p niet waar is, dus 'niet p' of 'p is onwaar', wordt genoteerd met $\neg p$.

De waarheidstabellen zijn als volgt:

p	q	$p \vee q$ p of q	$p \wedge q$ p en q
w	w	w	w
w	o	w	o
o	w	w	o
o	o	o	o

p	$\neg p$ niet p
w	o
o	w

Merk dus op dat in de wiskunde (en in alle wetenschappen) het gebruik van 'of' *niet exclusief* is: 'p of q' betekent per definitie dat *minstens één van de twee* waar is, maar mogelijk ook beide.

Wie wat Latijn kent, kan het symbool $\vee$ onthouden via het latijnse woordje 'vel' voor 'of'. Anderen merken op dat $\vee$ lijkt op $\cup$, en de unie $A \cup B$ bestaat uit de elementen die in A **of** B zitten, terwijl $\wedge$ lijkt op $\cap$, en $A \cap B$ zijn de elementen die in A **en** B zitten. De negatie $\neg$ komt overigens op dezelfde manier enigszins overeen met het complement.

Oefening 1.1.1. Vul volgende waarheidstabel aan:

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Propositielogica

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$p \wedge \neg p$	$p \vee \neg p$
w	w	.....	.....	.....	.....	.....
w	o	.....	.....	.....	.....	.....
o	w	.....	.....	.....	.....	.....
o	o	.....	.....	.....	.....	.....

1.1.3 Implicatie: 'als . . . , dan . . . '

Hier is de kloof tussen de betekenis in de omgangstaal en die in de wiskunde soms erg groot. We bestuderen uitspraken van het type 'als . . . , dan . . . ' dan ook wat uitgebreider.

Voorbeeld 1.1.3. Welke van volgende proposities zijn waar?

(1) 'Als het vandaag zaterdag is, dan is het morgen zondag.' Juist ✓

(2) 'Als 9 een drievoud is, dan is 9 even.' Fout ✓

(3) 'Als een mus een reptiel is, dan is $1 + 1 = 3$.' Juist ✓

(4) 'Als een mus een reptiel is, dan is $1 + 1 = 2$.' Juist ✓

Beschrijf wat een vader waarschijnlijk bedoelt als hij tegen zijn zoon zegt:

(1) 'Als jij kan slagen zonder te studeren, dan ben ik Napoleon.'
(2) 'Als je er door bent in juni, dan mag je naar Pukkelpop.'

Alle proposities in vorig voorbeeld hebben de vorm

als p, dan q,

met p en q proposities.

Formeel noteren we dit als

$$p \Rightarrow q$$

en lezen 'p impliceert q', 'als p, dan q of soms ook 'q volgt uit p'.

In het dagelijks leven suggereert 'p impliceert q' een *causaal* verband tussen p en q: meestal bedoelen we inderdaad dat q waar is *omdat* ook p waar is, of dus dat de waarheid van q *veroorzaakt* wordt door de waarheid van p. In de strikte logische zin wordt er echter *geen causaal verband* verondersteld. De logica volgt een erg strikte, eenduidige en letterlijke interpretatie: $p \Rightarrow q$ betekent 'ALS het het geval is dat p waar is, DAN moet zeker ook q waar zijn'. In het geval dat p *niet* waar is, is $p \Rightarrow q$ steeds waar, zowel in het geval dat q waar is als in het geval dat q niet waar is.

Definitie 1.1.4 (De implicatie "⇒")**.**

De **implicatie** $p \Rightarrow q$ tussen twee proposities p en q betekent dat zodra een bepaalde propositie p waar is, ook de propositie q waar is.

We lezen $p \Rightarrow q$ als 'p impliceert q', of 'als p, dan q' of ook 'q volgt uit p'.

We noemen p het **antecedens** of de **hypothese** en q het **consequens** of de **conclusie**.

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Propositielogica

De waarheidstabel voor $p \Rightarrow q$ is:

p	q	$p \Rightarrow q$
w	w	w
w	o	o
o	w	w
o	o	w

Dus de enige manier waarop $p \Rightarrow q$ *onwaar* kan zijn, is als p waar is en q onwaar.
Als p *niet waar* is, dan is de implicatie $p \Rightarrow q$ *waar*, *ongeacht* of q al dan niet waar is.

Onthoud: "Als een mus een reptiel is, dan is 1+1=3" is een *ware* uitspraak. Dit is een implicatie van de vorm $p \Rightarrow q$. Een mus is geen reptiel (p is niet waar) en bijgevolg is de implicatie *waar*.

Ook de Romeinen en de middeleeuwse logici interpreteerden de implicatie op deze manier, en gebruikten de term "Ex falso [sequitur] quod libet": uit een onware uitspraak volgt al wat je maar wil.

Voorbeeld 1.1.4 (Pukkelpop)**.** Wanneer is volgende uitspraak (of belofte) van je vader al dan niet waar:

Als je slaagt in juni, dan mag je naar Pukkelpop.

Er zijn drie proposities p, q en $(p \Rightarrow q)$:

p : je slaagt in juni
q : je mag naar Pukkelpop
$p \Rightarrow q$: Als je slaagt in juni, dan mag je naar Pukkelpop.

We krijgen de volgende waarheidstabel.

(Als)	p	(dan)	q	als p dan q $(p \Rightarrow q)$
p is waar:	je slaagt in juni	q is waar:	je mag naar Pukkelpop	waar
p is waar:	je slaagt in juni	q is onwaar:	je mag niet naar Pukkelpop	onwaar
p is **onwaar**:	je slaagt niet in juni	q is **waar**:	je mag naar Pukkelpop	**waar**
p is **onwaar**:	je slaagt niet in juni	q is **onwaar**:	je mag niet naar Pukkelpop	**waar**

Dus, enkel in het geval dat je slaagt, maar toch niet naar Pukkelpop mag, breekt je vader zijn belofte (en wordt zijn uitspraak dus onwaar). Als je niet slaagt, en je mag toch naar Pukkelpop, is er geen enkel logisch probleem. De uitspraak 'Als je slaagt in juni, dan mag je naar Pukkelpop.' is in dit geval waar (derde lijn in de waarheidstabel).

Merk wel op dat je vader allicht volgende uitspraak *bedoelde*:

Alleen als je slaagt in juni, mag je naar Pukkelpop.

en dus, als je *niet* slaagt, dan mag je ook *niet* naar Pukkelpop. In dat geval is de situatie als volgt

(*Alleen als*)	p	(dan)	q	**alleen als** p dan q
p is waar:	je slaagt in juni	q is waar:	je mag naar Pukkelpop	waar
p is waar:	je slaagt in juni	q is onwaar:	je mag niet naar Pukkelpop	onwaar
p is onwaar:	je slaagt niet in juni	q is waar:	je mag naar Pukkelpop	onwaar
p is onwaar:	je slaagt niet in juni	q is onwaar:	je mag niet naar Pukkelpop	waar

In dit geval mag je *alleen als* je geslaagd bent naar Pukkelpop. Dus, p en q moeten nu ofwel beide waar zijn, ofwel beide niet waar. Dus p is waar *als en slechts als* q waar is, en we noemen p en q *equivalent*.

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Propositielogica

Oefening 1.1.2. Vul volgende waarheidstabel aan

p	q	$p \Rightarrow q$	$(\neg p) \vee q$	$(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$
w	w	.....	.....	.....
w	o	.....	.....	.....
o	w	.....	.....	.....
o	o	.....	.....	.....

1.1.4 Equivalentie: '... als en slechts als ...'

Definitie 1.1.5 (Equivalentie "$\Leftrightarrow$").

Twee proposities zijn **equivalent** als ze elkaar impliceren, of ook als ze ofwel beide waar zijn, ofwel beide onwaar. We noteren dit met $p \Leftrightarrow q$ en we zeggen dat p en q **equivalent** zijn:

$$p \Leftrightarrow q \quad \text{betekent} \quad (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

De waarheidstabel voor $p \Leftrightarrow q$ is:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w
w	o	o
o	w	o
o	o	w

In de wiskunde wordt $p \Leftrightarrow q$ vaak gelezen als 'p **als en slechts als** q', en men schrijft soms ook 'p **asa** q'. In het Engels schrijft men dan 'iff' voor 'if and only if', en in het Frans 'ssi' voor 'si et seulement si'.

Als $p \Leftrightarrow q$ dan noemen we p ook wel **een nodige en voldoende voorwaarde** voor q, en dan is automatisch ook q een nodige en voldoende voorwaarde voor p.

Uit de waarheidstabel blijkt dus duidelijk dat $p \Leftrightarrow q$ waar is als p en q allebei waar zijn of allebei niet waar zijn. Als een van de twee waar is en de andere niet dan is $p \Leftrightarrow q$ *niet* waar.

Voorbeeld 1.1.5 (Pukkelpop bis).

De vader uit Voorbeeld **??** *bedoelde* allicht: je mag naar Pukkelpop als *en slechts als* je slaagt in juni.

Oefening 1.1.3. Met welke uitspraken is $\neg(p \Rightarrow q)$ equivalent? Probeer het antwoord eerst te vinden door te redeneren. Controleer je antwoord met een waarheidstabel.

1. $p \wedge \neg q$ ..... **4.** $\neg p \vee \neg q$ .....

2. $p \vee \neg q$ ..... **5.** $q \Rightarrow \neg p$ .....

3. $\neg p \wedge q$ ..... **6.** $\neg(\neg p \vee q)$ .....

1.1.5 Implicatie, equivalentie, nodige en voldoende voorwaarden

In verband met de implicatie gebruikt men ook de uitdrukkingen 'nodige voorwaarde' en 'voldoende voorwaarde'.

Definitie 1.1.6. Volgende uitspraken zijn allemaal equivalente formuleringen van hetzelfde:

$$p \Rightarrow q$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Propositielogica

$\neg p \vee q$

als p, dan q

p impliceert q

q is waar, of p is onwaar

p is een **voldoende voorwaarde** voor q

$\neg q \Rightarrow \neg p$

als q niet waar is , dan is ook p niet waar

q kan enkel onwaar zijn als p ook onwaar is

q is een **nodige voorwaarde** voor p

opdat p zou gelden, is het **nodig** dat q geldt

opdat q zou gelden, is het **voldoende** dat p geldt

Opmerking 1.1.1 (Te veel gemaakte redeneerfout)**.**

We benadrukken nogmaals de betekenis van $p \Rightarrow q$. Het komt immers al te vaak voor dat studenten bij $p \Rightarrow q$ *verkeerdelijk* denken dat als p niet waar is, dan ook q niet waar zal zijn.

Als je weet dat $p \Rightarrow q$ geldt, en je weet dat p *niet* geldt, dan kan je *niets* besluiten over de geldigheid van q. Dit is eigenlijk een evidentie. Toch leert de ervaring dat daar in de praktijk al te vaak tegen gezondigd wordt.

In het dagelijks taalgebruik betekent "als . . . , dan . . ." soms meer dan wat men strikt genomen zegt. Als je vader zegt 'Als je slaagt in juni, dan mag je naar Pukkelpop', dan *bedoelt* hij wellicht dat je *enkel* naar Pukkelpop mag als je slaagt. Hij bedoelt dus behalve wat hij expliciet zegt, impliciet ook: als je *niet* slaagt, dan mag je *niet* naar Pukkelpop. Als we met p de propositie "je slaagt in juni" aanduiden en met q de propositie "je mag naar Pukkelpop", dan zegt je vader "$p \Rightarrow q$" maar daar bovenop bedoelt hij stilzwijgend eigenlijk ook "$q \Rightarrow p$". Eigenlijk wil hij dus zeggen "$p \Leftrightarrow q$".

In de wetenschap en in de wiskunde in het bijzonder veroorloven we ons dergelijk slordig en dubbelzinnig taalgebruik niet, en "als ... dan .." betekent ook steeds gewoon "als ... dan ...".

1.1.6 Voorrangsregels

Definitie 1.1.7.

Bij de combinatie van connectieven gelden volgende voorrangsregels (van links naar rechts):

$$( ) \qquad \neg \qquad \wedge \qquad \vee \qquad \Rightarrow / \Leftarrow / \Leftrightarrow$$

waarbij de haakjes ( ) dus de hoogste voorrang hebben en de pijlen $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ en $\Leftrightarrow$ de laagste.

Voorbeeld 1.1.6.

$\neg p \vee q$	betekent	$(\neg p) \vee q$
$p \vee q \Rightarrow r$	betekent	$(p \vee q) \Rightarrow r$
$p \wedge q \Leftrightarrow r$	betekent	$(p \wedge q) \Leftrightarrow r$
$\neg p \Rightarrow q \vee r$	betekent	$(\neg p) \Rightarrow (q \vee r)$

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Propositielogica

1.1.7 Tautologieën en contradicties

Definitie 1.1.8.

Een **tautologie** of **logische stelling** is een (samengestelde) propositie die *altijd waar* is, onafhankelijk van de waarheidswaarden van de verschillende proposities waaruit ze bestaat.

Een **contradictie** of **tegenspraak** is een (samengestelde) propositie die *altijd onwaar* is, voor alle mogelijke waarheidswaarden van de verschillende proposities waaruit ze bestaat.

De logica telt vele tautologieën. Vooral equivalenties zijn handig omdat ze soms toelaten proposities te vervangen door equivalente maar duidelijkere proposities.
Volgende tautologieën kan je allemaal als oefening bewijzen met een waarheidstabel:

Eigenschap 1.1.1 (Tautologieën of logische stellingen)**.**

$\neg(\neg p)$	$\Leftrightarrow$	p	*dubbele negatie*
$\neg(p \wedge q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	*negatiewet van De Morgan voor* $\wedge$
$\neg(p \vee q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$	*negatiewet van De Morgan voor* $\vee$
$(p \Rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg p) \vee q)$	*definitie van* $\Rightarrow$
$\neg(p \Rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge \neg q)$	*negatie van* $\Rightarrow$
$(p \Rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg q \Rightarrow \neg p)$	*contrapositie*
$p \wedge (q \vee r)$	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	*distributiviteit van* $\wedge$ *t.o.v.* $\vee$
$p \vee (q \wedge r)$	$\Leftrightarrow$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	*distributiviteit van* $\vee$ *t.o.v.* $\wedge$
q	$\Leftrightarrow$	$(\neg q \Rightarrow (p \wedge \neg p))$	*redenering uit het ongerijmde*
$(p \vee q) \Rightarrow r$	$\Leftrightarrow$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	*gevalsonderscheid*
$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$\Rightarrow$	$(p \Rightarrow r)$	*transitiviteit van* $\Rightarrow$
p	$\vee$	$\neg p$	*de wet van de uitgesloten derde*

Verder zijn $\wedge$, $\vee$ en $\Leftrightarrow$ associatief en commutatief.

Oefening 1.1.4.

Toon aan met behulp van een waarheidstabel dat

$$p \wedge \neg p$$

een **contradictie** is.

Eigenschap 1.1.2 (Samenvatting en overzicht van connectieven met waarheidstabellen)**.**

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
w	w	o	o	w	w	w	w	w
w	o	o	w	o	w	o	w	o
o	w	w	o	o	w	w	o	o
o	o	w	w	o	o	w	w	w

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Kwantoren

De betekenis van sommige beweringen hangt af van de context: de betekenis van de zin "hij is president van Amerika"wordt bepaald door welke 'hij' precies wordt bedoeld. In de wiskunde hangt de waarheidswaarde van een bewering als 'n is even' af van welke n precies wordt bedoeld.

Een **predicaat** is een zinvolle mededelende zin met **vrije variabelen**. Deze vrije variabelen worden voorgesteld met letters (n, x, ...). Kwantoren gaan de vrije variabelen binden, de vrije variabelen worden zo **gebonden variabelen**.

Voor de predicaten

(a) $n^2 = 4$ (b) $n^2 = -4$ (c) $n^2 \geq 0$

is (a) $n^2 = 4$ enkel waar als $n = 2$ of $n = -2$, terwijl (b) $n^2 = -4$ voor geen enkel natuurlijk getal n waar is (maar wel voor de complexe getallen $\pm 2i$), en (c) $n^2 \geq 0$ is waar voor alle natuurlijke getallen n (maar niet voor bijvoorbeeld het complexe getal i, want $i^2 = -1 < 0$).

Er zijn essentieel drie verschillende manieren om een dergelijke 'vrije variabele n' te 'binden', dus vast te leggen. We kunnen bedoelen dat een predicaat al dan niet moet gelden voor

- één *concrete* waarde: $n = 2$, of $n = 6$
- *alle* mogelijke waarden van n (eventueel enkel van een bepaald type)
- *minstens één* waarde van n (eventueel van een bepaald type)

De predicaten worden pas waar of onwaar van zodra de vrije variabele niet meer vrij zijn, maar gebonden worden door kwantoren. De twee laatste gevallen kunnen we uitdrukken met "voor alle" en "er bestaat". Dit geeft aan *voor hoeveel* waarden (dus voor welke *kwantiteit* van waarden) het predicaat zou moeten gelden: voor allemaal of voor minstens één. Men noemt ze in de logica daarom **kwantoren** en men voert volgende notaties in:

Definitie 1.2.1.

Als $p(a)$ een predicaat is dat afhangt van een variabele a, en A een verzameling, dan betekent

$\forall a \in A : p(a)$ *voor elk* element a van A geldt $p(a)$

$\exists a \in A : p(a)$ *er bestaat (minstens) een* element a van A waarvoor $p(a)$ geldt

Hierbij noemen we

$\forall$ de **universele kwantor** of **alkwantor**
$\exists$ de **existentiële kwantor** of **bestaanskwantor**

Opmerking 1.2.1.

- We schrijven de kwantor in echte formules altijd vóór het predicaat, en dus niet ~~$p(a), \forall a \in A$~~. Maar, in een meer informele context schrijven we soms toch uitdrukkingen als

$$x > 0 \Rightarrow |x| = x \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

- In sommige handboeken schrijft men *altijd* haakjes rond een kwantor $(\forall x) : p(x)$, en dan laat men de dubbele punt soms weg $(\forall x)p(x)$. Sommigen gebruiken een komma: $\forall x, p(x)$
- De uitspraken $\forall a \in A : p(a)$ en $\forall x \in A : p(x)$ betekenen precies hetzelfde, dus de *naam* (letterkeuze) van de variabele heeft geen belang.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Kwantoren

Met deze notaties kunnen we nu compact schrijven

- $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = 4$ voor 'er bestaat een natuurlijk getal waarvan het kwadraat gelijk is aan 4'. (waar)
- $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 = 4$ voor 'alle natuurlijke getallen hebben als kwadraat 4'. (niet waar)
- $\forall n \in \mathbb{Z} : n^2 \geq 0$ voor 'alle gehele getallen hebben een positief kwadraat'. (waar)

Het is belangrijk dat je deze uitdrukkingen met kwantoren spontaan leert lezen als volwaardige zinnen.

1.2.1 Negatie van kwantoren

Er is een interessante wisselwerking tussen kwantoren en ontkenningen: beweren dat *niet iedereen* geslaagd is, betekent dat er *iemand is* die niet geslaagd is. En beweren dat *iedereen* iets *niet* heeft komt op hetzelfde neer als beweren dat *niemand* dat iets *wel* heeft.

Voorbeeld 1.2.1.

Als X de verzameling is van alle studenten die in deze cursus hebben gelezen en $p(x)$ is het predicaat "student x heeft blond haar", dan lezen we de uitspraak

$$\forall x \in X : p(x)$$

als "alle studenten die in deze cursus hebben gelezen zijn blond".

Deze uitspraak kan in de praktijk zowel waar als niet waar zijn, maar ze is uiteraard *niet waar* van zodra er minstens één student is die niet blond is. In symbolen uitgedrukt betekent dit

$$\neg(\forall x \in X : p(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in X : \neg p(x).$$

Op gelijkaardige manier betekent 'niemand is geslaagd' hetzelfde als 'iedereen is gebuisd'. In formules, met $q(x)$ het predicaat "x is geslaagd", wordt dit:

$$\neg(\exists x \in X : q(x)) \Leftrightarrow \forall x \in X : \neg q(x).$$

en 'niemand is gebuisd' betekent hetzelfde als 'iedereen is geslaagd':

$$\neg(\exists x \in X : \neg q(x)) \Leftrightarrow \forall x \in X : q(x).$$

Samengevat:

Eigenschap 1.2.1 (Negatie van kwantoren)**.** Voor elk predicaat $p(x)$ geldt:

(1) $\neg(\forall x \in X : p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in X : \neg p(x)$ of $\neg(\forall x)p(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x))$

(2) $\neg(\exists x \in X : p(x)) \Leftrightarrow \forall x \in X : \neg p(x)$ of $\neg(\exists x)p(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg p(x))$

In woorden: 'niet voor alle' is hetzelfde als 'er bestaat waarvoor niet',

en ook: 'niet er bestaat' is hetzelfde als 'voor alle geldt niet'.

1.2.2 Volgorde van kwantoren

Als in een wiskundige formule meerdere kwantoren voorkomen, dan is de *volgorde* soms erg belangrijk.

Oefening 1.2.1. Zij P een verzameling potjes van allemaal onderling *verschillende* formaten en D de verzameling van de bijhorende deksels. Zij $p(x, y)$ met $x \in D$ en $y \in P$ het predicaat 'x past op y'.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Kwantoren

Kies voor elk van volgende formules de overeenkomstige Nederlandse zin, en zeg of de uitspraak waar of onwaar is.

A Op elk potje past een dekseltje
B Er is een potje waar elk dekseltje op past
C Er is een potje waarop geen dekseltje past
D Er is een dekseltje dat op geen enkel potje past
E Er is een dekseltje dat op elk potje past
F Er is een dekseltje dat op een potje past
G Elk dekseltje past op elk potje
H Elk dekseltje past op een potje

1. $\forall x \in D : \forall y \in P : p(x, y)$ — G✓ Fout ✓

2. $\forall y \in P : \forall x \in D : p(x, y)$ — G✓ Fout ✓

3. $\exists x \in D : \exists y \in P : p(x, y)$ — F✓ Juist ✓

4. $\exists y \in P : \exists x \in D : p(x, y)$ — F✓ Juist ✓

5. $\exists x \in D : \forall y \in P : p(x, y)$ — E✓ Fout ✓

6. $\forall y \in P : \exists x \in D : p(x, y)$ — A✓ Juist ✓

7. $\forall x \in D : \exists y \in P : p(x, y)$ — H✓ Juist ✓

8. $\exists y \in P : \forall x \in D : p(x, y)$ — B✓ Fout ✓

9. $\exists a \in P : \forall b \in D : p(b, a)$ — B✓ Fout ✓

10. $\exists x \in P : \forall y \in D : p(y, x)$ — B✓ Fout ✓

Deze oefening kan worden veralgemeend in volgende eigenschappen:

Eigenschap 1.2.2 (Verwisselen van kwantoren)**.** Voor elk predicaat $p(x, y)$ geldt:

$$
\begin{array}{lccl}
(1) & \forall x \in X : \forall y \in Y : p(x,y) & \Leftrightarrow & \forall y \in Y : \forall x \in X : p(x,y) \\
(2) & \exists x \in X : \exists y \in Y : p(x,y) & \Leftrightarrow & \exists y \in Y : \exists x \in X : p(x,y) \\
(3) & \exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y) & \Rightarrow & \forall y \in Y : \exists x \in X : p(x,y) \\
(4) & \forall y \in Y : \exists x \in X : p(x,y) & \not\Rightarrow & \exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y)
\end{array}
$$

Dit betekent:

- Gelijksoortige kwantoren mogen altijd van plaats worden verwisseld: de uitspraak verandert niet van betekenis. Daarom mogen we ook schrijven $\forall x, y \in X$ of $\exists x, y \in Y$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Kwantoren

- Een bestaanskwantor mag achter een alkwantor worden geschoven: de uitspraak blijft waar, maar wordt zwakker.
- Een alkwantor **mag niet** achter een bestaanskwantor worden geschoven: de uitspraak wordt dan mogelijk onwaar.

  Bij $\forall y \in Y : \exists x \in X$ kan de x afhangen van y, maar bij $\exists x \in X : \forall y \in Y$ kan dat *niet*.

Opmerking 1.2.2.

- Onthoud: **als op elk potje een dekseltje past, dan betekent dat *niet* dat er een dekseltje is dat op elke potje past**. Maar, als er omgekeerd toch een dekseltje zou zijn dat op elk potje past, dan is er natuurlijk automatisch ook voor elke potje een passend dekseltje: namelijk dat 'universeel passend' dekseltje.
- Bij een uitspraak van de vorm $\forall x \in X : \exists y \in Y : p(x,y)$ volstaat het dat voor elke x een mogelijk *andere* y gevonden wordt: de y is dus mogelijk afhankelijk van x. Je zou met functie-notatie ook $y(x)$ kunnen schrijven, of met een subscript y_x:

  $$\forall x \in X : \exists y_x \in Y : p(x, y_x)$$

  Bij een uitspraak van de vorm $\exists y \in Y : \forall x \in X : p(x,y)$ moet er één vaste y bestaan die *niet* afhangt van x, maar voor alle x tegelijk werkt. Dat is een veel strengere eis.
- In deze eigenschap wordt steeds de kwantor-met-de-variabele van plaats verwisseld. De eigenschap geldt *niet* als je *enkel de kwantor* verplaatst. In dat geval krijg je een nieuwe uitspraak die in het algemeen geen logisch verband heeft met de oorspronkelijke uitspraak:

  $$\exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y) \quad \text{vs} \quad \forall x \in X : \exists y \in Y : p(x,y)$$

Oefening 1.2.2. Vergelijk de betekenis van volgende twee uitspraken en geef voor elke uitspraak aan of ze waar of onwaar is:

1. $\forall m \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} : n > m$

Uitwerking: Letterlijk staat er 'voor elke natuurlijk getal m bestaat er een natuurlijk getal n zodat n strikt groter is dan m.

Iets korter kunnen we ook zeggen: voor elke natuurlijk getal bestaat er een groter natuurlijk getal. Dit betekent natuurlijk precies hetzelfde als 'er bestaat geen grootste natuurlijk getal', en dat kan in formules worden geschreven als

$\neg(\exists m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \leq m)$

Merk op dat deze laatste formule ook direct kan bekomen worden met behulp van de regels voor negatie van kwantoren (waarbij natuurlijk $\neg(n < m) \Leftrightarrow n \geq m \Leftrightarrow m \leq n$)

De uitspraak $\forall m \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} : n > m$ is *waar*, want voor elk natuurlijk getal m is $n = m + 1$ een natuurlijk getal dat strikt groter is dan m.

2. $\exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : n > m$.

Uitwerking: Letterlijk staat er 'er bestaat een natuurlijk getal n zodat voor elk natuurlijk getal m geldt dat n strikt groter is dan m.

Iets korter kunnen we ook zeggen: er bestaat een natuurlijk getal dat groter is dan elk natuurlijk getal, of dus 'er bestaat een grootste natuurlijk getal'.

Merk op dat deze uitspraak evident onwaar is, omdat wegens de 'voor *elke* m' de ongelijkheid $n > m$ ook moet gelden voor $m = n$, en dat kan natuurlijk niet. Maar ook de wat zwakkere uitspraak

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Kwantoren

$\exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : n \geq m$

is onwaar, omdat voor elke mogelijke n geldt dat $m = n + 1$ groter is dan n.

Merk op dat deze laatste formule de *negatie* is van de formule in de vorige opgave.

Oefening 1.2.3. Onderzoek of volgende uitspraken al dan niet waar zijn. Geef ook telkens een vlotte, korte equivalente Nederlandse zin.

1. Juist ✓ $\forall n \in \mathbb{N}_0, \exists m \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

Uitwerking: Elke natuurlijk getal verschillend van nul heeft een deler.

Dit is waar, 1 en n zijn altijd delers van n.

2. Juist ✓ $\exists m \in \mathbb{N}_0, \forall n \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

Uitwerking: Er bestaat een deler van *elk* natuurlijk getal verschillend van nul.

Dit is waar, 1 is een deler van elk getal n.

3. Juist ✓ $\forall m \in \mathbb{N}_0, \exists n \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

Uitwerking: Elke natuurlijk getal verschillend van nul *is* een deler.

Dit is waar, n is altijd een deler van n (en van $2n, 3n, \ldots$)

4. Fout ✓ $\exists n \in \mathbb{N}_0, \forall m \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

Uitwerking: Er bestaat een natuurlijk getal verschillend van nul dat alle naturlijke getallen verschillend van nul als deler heeft.

Dit is niet waar, maar merk op dat het getal 0 wel zou voldoen:
de uitspraak $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n is waar.

5. Fout ✓ $\forall m, n \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

Uitwerking: Alle natuurlijke getallen verschillend van nul zijn delers (en dus veelvouden) van elkaar.

Dit is niet waar, want bijvoorbeeld 2 is geen deler van 1.

6. Juist ✓ $\exists m, n \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

Uitwerking: Er bestaat tenminste een deler (verschillend van nul).

Dit is waar, want bijvoorbeeld 1 is een deler van 2

7. Juist ✓ $\exists n \in \mathbb{N} : \big(n > 1 \wedge \forall m_1, m_2 \in \mathbb{N} : \big(m_1 > 1 \wedge m_2 > 1\big) \Rightarrow m_1 \cdot m_2 \neq n\big)$

Uitwerking: Er bestaan priemgetallen.

Inderdaad, een getal groter dan 1 dat niet kan geschreven worden als een product van twee getallen elk groter dan 1 is per definitie een priemgetal. Bijvoorbeeld $2, 3, 5$ en 7 zijn priemgetallen.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Kwantoren

Oefening 1.2.4.

Onderzoek of volgende uitspraken waar of onwaar zijn.

(a) Fout ✓ $\forall m \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(b) Juist ✓ $\exists m \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(c) Juist ✓ $\forall m \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(d) Fout ✓ $\exists m \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(e) Juist ✓ $\forall n \in \mathbb{Z} : \exists m \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(f) Fout ✓ $\exists n \in \mathbb{Z} : \forall m \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

Oefening 1.2.5.

Geef telkens een wiskundige formule met dezelfde betekenis als de zin. Zijn de uitspraken waar of onwaar? (Er zijn soms andere formuleringen dan de gegeven oplossing mogelijk.)

1. Er bestaan twee gehele getallen zodat het eerste groter is dan het tweede.

Uitwerking: $\exists m \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : m > n$ (waar)

2. Er bestaan twee gehele getallen zodat beide positief zijn.

Uitwerking: $\exists m \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : m \geq 0 \wedge n \geq 0$ (waar)

3. Voor elk geheel getal bestaat er een groter geheel getal.

Uitwerking: $\forall m \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : n > m$ (waar)

4. Voor elk natuurlijk getal bestaat er een groter natuurlijk getal.

Uitwerking: $\forall m \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} : n > m$ (waar)

5. Voor elk natuurlijk getal bestaat er een groter geheel getal.

Uitwerking: $\forall m \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{Z} : n > m$ (waar)

6. Voor elk geheel getal bestaat er een groter natuurlijk getal.

Uitwerking: $\forall m \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{N} : n > m$ (waar)

7. Voor elk natuurlijk getal bestaat er een kleiner natuurlijk getal.

Uitwerking: $\forall m \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} : n < m$ (niet waar)

8. Voor elk natuurlijk getal bestaat er een kleiner geheel getal.

Uitwerking: $\forall m \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{Z} : n < m$ (waar)

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Kwantoren

9. Er bestaat een natuurlijk getal dat groter is dan elk ander natuurlijk getal.

Uitwerking: $\exists m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \neq m \Rightarrow m > n$ (niet waar)

10. Er bestaat een geheel getal dat groter is dan elk geheel getal.

Uitwerking: $\exists m \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{Z} : m > n$ (niet waar)

11. Er bestaat een geheel getal dat kleiner is dan elk natuurlijk getal.

Uitwerking: $\exists m \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{N} : m < n$ (waar)

12. Er bestaat een positief reëel getal dat kleiner is dan elk strikt positief natuurlijk getal.

Uitwerking: $\exists m \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{N}_0 : m < n$ (waar)

13. Voor elke twee natuurlijke getallen geldt dat het eerste groter is dan het tweede of het tweede groter dan het eerste.

Uitwerking: $\forall m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : m > n \vee n > m$ (niet waar)

14. Voor elke twee verschillende natuurlijke getallen geldt dat het eerste groter is dan het tweede of het tweede groter dan het eerste.

Uitwerking: $\forall m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : m \neq n \Rightarrow (m > n \vee n > m)$ (waar)

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Verzamelingen

Een belangrijk aspect van de wiskunde is het *ontdekken* of *introduceren* van *structuur* in allerlei dingen om vervolgens die structuur verder te bestuderen. Dat werkt zo voor hoeveelheden, groottes, vormen, configuraties, uitspraken enzovoort.

De eenvoudigste vorm van structureren is gewoon dingen samennemen, dat heet 'verzamelen'. De wiskundige studie daarvan is de 'verzamelingenleer'. Het is een hoogst merkwaardig feit dat een zodanig eenvoudig idee als het 'verzamelen van verschillende dingen in één nieuw ding dat we dan een verzameling noemen' een uiterst krachtige taal oplevert om op effectieve wijze over allerlei erg complexe dingen te kunnen spreken en denken.

Definitie 1.3.1.

- Een **verzameling** is een grondbegrip in de wiskunde. We zullen hier niet ingaan op exacte definities of axioma's. Volgens een intuïtieve definitie kan je een verzameling beschouwen als een geheel van objecten zodanig dat
  - je van *elk* object ondubbelzinnig kan zeggen of het al dan niet tot dat geheel behoort, en
  - je elk object ondubbelzinnig kan identificeren. Dit betekent dat je moet kunnen nagaan wanneer twee objecten aan elkaar gelijk zijn en dus in feite hetzelfde object zijn. Als je dat niet zou kunnen, zou immers zelfs het tellen van de elementen al een probleem zijn.

  Een verzameling wordt dus *enkel* en *volledig* bepaald door de objecten die ertoe behoren.

  Meestal noteren we een verzameling met een hoofdletter zoals A, B of X. Soms krijgen verzamelingen standaard notaties, zoals de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ of de reële getallen $\mathbb{R}$.

- De **elementen** van een verzameling zijn de objecten waaruit die verzameling bestaat. Elementen worden meestal aangeduid met kleine letters $a, b, x, y \ldots$.
  Notatie: $a \in A$ betekent "object a behoort tot verzameling A" of "a is element van A".
  Notatie: $a \notin A$ betekent "object a behoort *niet* tot verzameling A".
  Notatie: $A = \{a, b, c\}$ betekent "verzameling A bestaat uit objecten a, b en c".

- Verzamelingen A en B zijn **gelijk**, genoteerd $A = B$, als A en B *dezelfde elementen* hebben.

  Hieruit volgt bijvoorbeeld dat de elementen van een verzameling geen 'volgorde' hebben en dat er ook geen 'dubbels' in een verzameling kunnen zitten. De verzamelingen $\{a, b\}$ en $\{b, a\}$ zijn dus aan elkaar gelijk want ze hebben dezelfde elementen. Om dezelfde reden zijn ook $\{a, b\}$ en $\{a, a, b\}$ aan elkaar gelijk.

- Een **lege verzameling** is een verzameling *zonder elementen*. We noteren ze als $\emptyset \overset{\text{def}}{=} \{\}$.

  Omdat verzamelingen gelijk zijn als ze gelijke elementen hebben, is er maar één lege verzameling.

- Een **deelverzameling** van een verzameling B is een verzameling A waarbij elk element van A ook tot B behoort. Zo zijn $\{a\}$ en $\{a, b\}$ deelverzamelingen van $\{a, b, c\}$, maar a en $\{a, d\}$ niet.
  Notatie: $A \subseteq B$, of ook $A \subset B$, betekent "verzameling A is deelverzameling van B".

  Voor de relatie $A \subseteq B$ gebruikt men soms ook de **inclusie** van A in B.

  Merk op dat om historische redenen de notatie hier *verschilt* van de verwante symbolen $<$ en $\leqslant$. Het symbool $<$ betekent *strikt kleiner dan*, terwijl $\leqslant$ *kleiner dan of gelijk aan* betekent. Bij verzamelingen daarentegen heeft het symbool $\subset$ precies dezelfde betekenis als $\subseteq$, en er geldt dus *wel* dat $A \subset A$.

  Notatie: $A \not\subseteq B$ of $A \not\subset B$ betekent dat A geen deelverzameling van B is.

  Notatie: $A \subsetneq B$ betekent $A \subseteq B$ maar $A \neq B$.

  Dus als $A \subsetneq B$ dan is toch $A \subseteq B$, maar als $A \not\subseteq B$ dan geldt (per definitie) dat *niet* $A \subseteq B$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Verzamelingen

Een **echte deelverzameling** van B is een deelverzameling A waarvoor $A \subsetneq B$ en $A \neq \emptyset$. Dus, elke verzameling heeft de lege verzameling en zichzelf als *onechte* deelverzamelingen. (Dat zijn dus *twee* onechte deelverzamelingen, behalve in het geval $B = \emptyset$.)

– Een **eindige verzameling** is een verzameling die slechts een eindig aantal elementen bevat. Notatie: $\#A$ is "het aantal elementen van A". Met $A = \{1, 2\}$ is $\#A = \#\{1, 2\} = 2$, en $\#\{\} = 0$.
Een **singleton** is een verzameling met *één* element en
een **paar** is een verzameling met *twee* elementen.

Voorbeeld 1.3.1 (Basisvoorbeelden)**.**

- Alle leerlingen van een school vormen een verzameling. Leerlingen An en Bart zijn elementen van die verzameling, leerkracht Carla niet. Leerkracht Carla is wel een element van de verzameling van de leerkrachten van die school. De verzameling leerlingen heeft erg veel deelverzamelingen: de leerlingen van Klas 1A vormen samen een deelverzameling, maar ook alle meisjes, alle leerlingen met een bril, alle leerlingen die met de fiets komen, en alle leerlingen die al een Nobelprijs Economie hebben behaald vormen telkens een deelverzameling. De laatste deelverzameling van leerling-Nobelprijswinnaars is op dit ogenblik voor alle Vlaamse scholen *leeg*: er zijn zo (nog) geen leerlingen.
- Alle natuurlijke getallen vormen een verzameling. De getallen 42 en 1302 zijn elementen van die verzameling. De even getallen, de priemgetallen en de delers van 24 vormen telkens een deelverzameling.

Er zijn verschillende manieren om een concrete verzameling te definiëren.

Definitie 1.3.2.

Een verzameling wordt in de praktijk gegeven door één van volgende mogelijkheden:

(a) een **opsomming**, waarbij de elementen worden *opgesomd* tussen accolades:

$A = \{1, 2, 3\}$, de verzameling met de getallen $1, 2$ en 3.

$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, de verzameling van de cijfers 0 t.e.m 9.

$C = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$, de (oneindige) verzameling van de even natuurlijke getallen, waarbij de puntjes 'enzovoorts' betekenen. Er geldt dat $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$.

(b) een **omschrijving**, waarbij de elementen aan een *voorwaarde* moeten voldoen:

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is deelbaar door } 2\}$ is dezelfde verzameling C van de even natuurlijke getallen als hierboven. Je leest dit als: 'C is de verzameling natuurlijke getallen x *waarvoor geldt dat* x deelbaar is door 2'.
Ja kan ook schrijven $C = \{x \mid x \text{ is een natuurlijk getal dat deelbaar is door } 2\}$ of $C = \{x \mid x \text{ is een even natuurlijk getal } 2\}$

Een rechte streep $\mid$ tussen accolades lees je als 'waarvoor geldt dat'.

(c) een **constructieve definitie**, waarbij elementen worden gegeven door een *formule*:

$D = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, de verzameling van alle kwadraten van natuurlijke getallen.

Je kan opmerken dat een getal dus behoort tot D als het kan geschreven worden als n^2 voor een zeker natuurlijk getal n. Dus kunnen we ook volgende omschrijvingen geven:

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is een kwadraat}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ er bestaat een getal } x \in \mathbb{N} \text{ zodat } x^2 = n\}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Verzamelingen

De verzameling C van de even natuurlijke getallen kunnen we met deze methode dus ook schrijven als

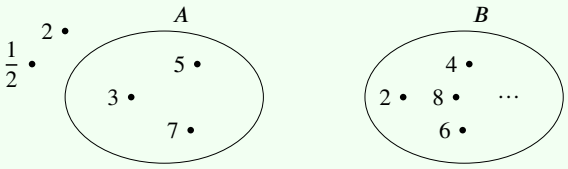
$$C = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

De naam van de variabele binnen in de accolades heeft immers geen belang.

(d) een **Venndiagram**:

Een *Venndiagram* is een gesloten kromme (de 'verzameling') waarbinnen de elementen van A door stippen worden voorgesteld. Dingen die geen elementen van A zijn krijgen een stip *buiten* de kromme. We tekenen geen stippen *op* de kromme. Niet alle elementen van A moeten worden weergegeven door een stip, maar in dat geval zetten we drie puntjes in de verzameling. De naam van de verzameling wordt meestal buiten de kromme geplaatst.

Voorbeelden: $A = \{3, 5, 7\}$ en $B = \{2, 4, 6, 8, ...\}$



Opmerking 1.3.1.

(a) We gebruiken dus accolades { en } om verzamelingen te noteren. We herhalen:

- De volgorde van elementen heeft geen belang: $\{a, b\} = \{b, a\}$.
- Eventuele dubbels hebben geen belang: $\{a, a\} = \{a\} = \{a, a, a\}$.
- Een rechte streep | tussen de accolades lees je als 'waarvoor geldt dat'.

(b) De lege verzameling is een deelverzameling van elke verzameling A. (Inderdaad, de lege verzameling bevat geen elementen, we kunnen dus geen element in de lege verzameling vinden dat niet tot A behoort, dus elk element in de lege verzameling behoort tot A.)

(c) Uit de definities volgt dat

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ en } B \subseteq A.$$

Dit betekent dat we de gelijkheid van twee verzamelingen A en B kunnen aantonen door $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$ te bewijzen. Deze techniek wordt erg dikwijls gebruikt om een gelijkheid van verzamelingen aan te tonen.

(d) Het is belangrijk om goed onderscheid te maken tussen de symbolen $\in$ en $\subseteq$. Ze hebben een verschillende betekenis, maar zijn wel nauw verwant want

$$x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subseteq A.$$

Sommige veel voorkomende verzamelingen krijgen een speciale notatie:

Definitie 1.3.3.

(a) Volgende getallenverzamelingen hebben een standaardnotatie:

- $\mathbb{N}$ is de verzameling van natuurlijke getallen $0, 1, 2, 3 \ldots$.
- $\mathbb{Z}$ is de verzameling van gehele getallen $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$.
- $\mathbb{Q}$ is de verzameling van rationale getallen (breuken).

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Verzamelingen

- $\mathbb{R}$ is de verzameling van reële getallen ("kommagetallen").
- $\mathbb{C}$ is de verzameling van complexe getallen.

Er geldt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

(b) De verzameling van de natuurlijke getallen zonder 0 wordt genoteerd als:

- $\mathbb{N}_0 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$.

Op dezelfde manier worden $\mathbb{Z}_0, \mathbb{Q}_0$ en $\mathbb{R}_0$ gedefinieerd.

Pas op: Engelstalige handboeken en websites hebben dikwijls een *omgekeerde afspraak*: $\mathbb{N}$ zijn dan de natuurlijke getallen *zonder nul*, en $\mathbb{N}_0$ zijn de natuurlijke getallen *inclusief nul*.

Sommige handboeken gebruiken notaties $\mathbb{N}_{>0}, \mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\leq 0}$, met de voor zich sprekende betekenis.

(c) De verzameling van de (strikt) positieve reële getallen wordt genoteerd als:

- $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} |\ x \geqslant 0\}$ en $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} |\ x > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^+ |\ x \neq 0\}$.

Op dezelfde manier worden $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}^+$ gedefinieerd.

(d) De *intervallen* van reële getallen:

$]2, 3[$: de reële getallen strikt groter dan 2 en strikt kleiner dan 3.

$[1, 7[$: de reële getallen groter of gelijk aan 1 en strikt kleiner dan 7.

Dus $]2, 3[= \{x \in \mathbb{R} |\ 2 < x < 3\}$ en $[1, 7[= \{x \in \mathbb{R} |\ 1 \leq x < 7\}$.

(e) De even en de oneven getallen:

$2\mathbb{N} = \{2n |\ n \in \mathbb{N}\}$ en $2\mathbb{N} + 1 = \{2n + 1 |\ n \in \mathbb{N}\}$.

Voorbeeld 1.3.2. De verzameling van de natuurlijke getallen kan geschreven worden als :

$\mathbb{N}$	$= \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	opsomming	de lijst van natuurlijke getallen
	$= \{\ x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\ \}$	omschrijving	de gehele getallen waarvoor geldt dat ze positief zijn
	$= \{\ \lvert x \rvert \mid x \in \mathbb{Z}\ \}$	constructief	de verzameling van de absolute waardes van de gehele getallen
	$= \mathbb{Z}_{\geq 0}$		een alternatieve notatie voor de positieve gehele getallen

Voorbeeld 1.3.3. De verzameling van de even getallen kan als volgt worden opgeschreven:

$\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$	opsomming
$\{n \in \mathbb{N} \mid n$ is even $\}$	omschrijving
$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m\}$	omschrijving (in formule)
$\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$	constructief

CC BY-NC-SA 4.0

1.3.A Verzamelingen

Een belangrijk aspect van de wiskunde is het *ontdekken* of *introduceren* van *structuur* in allerlei dingen. Dat werkt zo voor hoeveelheden, groottes, vormen, configuraties, uitspraken enzovoort. De eenvoudigste vorm van structureren is gewoon dingen samennemen, dat heet 'verzamelen'.

Definitie 1.3.4.

- Een **verzameling** is een grondbegrip in de wiskunde. Een verzameling wordt *enkel* en *volledig* bepaald door de objecten die ertoe behoren. We geven hier geen exacte definities of axioma's.

  Meestal noteren we een verzameling met een hoofdletter zoals A, B of X. Soms krijgen verzamelingen standaard notaties, zoals de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ of de reële getallen $\mathbb{R}$.

- De **elementen** van een verzameling zijn de objecten waaruit die verzameling bestaat. Elementen worden meestal aangeduid met kleine letters $a, b, x, y \ldots$.
  Notatie: $a \in A$ betekent "a behoort tot A" of "a is een element van A".
  Notatie: $a \notin A$ betekent "a behoort *niet* tot A" of "a is *geen* element van A".
  Notatie: $A = \{a, b, c\}$ betekent "verzameling A bestaat uit de elementen a, b en c".

- Twee verzamelingen A en B zijn **gelijk**, genoteerd $A = B$, als A en B dezelfde elementen bevatten. Hieruit volgt bijvoorbeeld dat de elementen van een verzameling geen 'volgorde' hebben en dat er ook geen 'dubbels' in een verzameling kunnen zitten. De verzamelingen $\{a, b\}$ en $\{b, a\}$ zijn dus aan elkaar gelijk want ze bestaan beide uit de elementen a en b. Ook de verzamelingen $\{a, b\}$ en $\{a, a, b\}$ zijn aan elkaar gelijk.

- Een **lege verzameling** is een verzameling *zonder elementen*. We noteren ze als $\emptyset \overset{\text{def}}{=} \{\}$.

- Een **deelverzameling** van een verzameling B is elke verzameling die enkel elementen van B bevat. Dus A is een deelverzameling van B als en slechts als elk element van A ook tot B behoort. Zo zijn $\{a\}$ en $\{a, b\}$ deelverzamelingen van $\{a, b, c\}$, maar a en $\{a, d\}$ niet.
  Notatie: $A \subseteq B$, of ook $A \subset B$, betekent "A is een deelverzameling van B".

  Merk op dat $A \subseteq B$ benadrukt dat de verzamelingen ook gelijk mogen zijn. In deze cursus heeft het symbool $\subset$ precies dezelfde betekenis als $\subseteq$.
  Voor elke verzameling A geldt dus dat $A \subseteq A$, maar *ook* $A \subset A$. Ook geldt steeds $\emptyset \subseteq A$ en $\emptyset \subset A$.

  Om historische redenen verschilt deze afspraak bij de verwante symbolen $<$ en $\leqslant$:
  het symbool $<$ betekent *strikt kleiner dan*, terwijl $\leqslant$ *kleiner dan of gelijk aan* betekent.

- Een **eindige verzameling** is een verzameling die slechts een eindig aantal elementen bevat.
  Notatie: $\#A$ betekent "het aantal elementen van A".
  Dus als $A = \{1, 2\}$ dan is $\#A = \#\{1, 2\} = 2$.
  Een **singleton** is een verzameling met *één* element en
  een **paar** is een verzameling met *twee* elementen.

Voorbeeld 1.3.4.

Alle natuurlijke getallen vormen een verzameling. De getallen 42 en 1302 zijn elementen van die verzameling. De even getallen, de priemgetallen en de delers van 24 vormen telkens een deelverzameling.

Opmerking 1.3.2. Het is belangrijk om goed onderscheid te maken tussen de symbolen $\in$ en $\subseteq$. Ze hebben een verschillende betekenis, maar zijn wel nauw verwant want

$$x \in A \;\Leftrightarrow\; \{x\} \subseteq A.$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.3.A Verzamelingen

Definitie 1.3.5 (Notatie en definitie voor concrete verzamelingen)**.**

Een verzameling wordt in de praktijk gegeven door één van volgende mogelijkheden:

(a) een **opsomming**, waarbij de elementen worden *opgesomd* tussen accolades:

- $A = \{1, 2, 3\}$, de verzameling met de getallen $1, 2$ en 3.
- $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, de verzameling van de cijfers 0 t.e.m 9.
- $C = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$, de (oneindige) verzameling van de even natuurlijke getallen.

Er geldt dat $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$.

(b) een **omschrijving**, waarbij de elementen aan een *voorwaarde* moeten voldoen:

- $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is deelbaar door } 2\}$ is dezelfde verzameling C van de even natuurlijke getallen als hierboven. Je leest dit als: 'C is de verzameling natuurlijke getallen x *waarvoor geldt dat* x deelbaar is door 2'.

Een rechte streep | tussen accolades lees je als 'waarvoor geldt dat'.

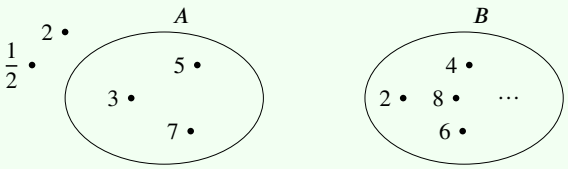
(c) een **constructieve definitie**, waarbij elementen worden gegeven door een *formule*:

- $D = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, de verzameling van alle kwadraten van natuurlijke getallen.

(d) een **Venndiagram**:

Een *Venndiagram* is een gesloten kromme (de 'verzameling') waarbinnen de elementen van A door stippen worden voorgesteld. Dingen die geen elementen van A zijn krijgen een stip *buiten* de kromme. We tekenen geen stippen *op* de kromme. Niet alle elementen van A moeten worden weergegeven door een stip, maar in dat geval zetten we drie puntjes in de verzameling. De naam van de verzameling wordt meestal buiten de kromme geplaatst.

Voorbeelden: $A = \{3, 5, 7\}$ en $B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$



Sommige veel voorkomende verzamelingen krijgen een speciale notatie:

Definitie 1.3.6.

(a) Volgende getallenverzamelingen hebben een standaardnotatie:

- $\mathbb{N}$ is de verzameling van natuurlijke getallen $0, 1, 2, 3, \ldots$.
- $\mathbb{Z}$ is de verzameling van gehele getallen $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$.
- $\mathbb{Q}$ is de verzameling van rationale getallen (breuken).
- $\mathbb{R}$ is de verzameling van reële getallen (kommagetallen).
- $\mathbb{C}$ is de verzameling van complexe getallen.

Er geldt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

(b) De verzameling van de natuurlijke getallen zonder 0 wordt genoteerd als:

CC BY-NC-SA 4.0

1.3.A Verzamelingen

– $\boxed{\mathbb{N}_0} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\}$.

Op dezelfde manier worden $\mathbb{Z}_0, \mathbb{Q}_0$ en $\mathbb{R}_0$ gedefinieerd.

(c) De verzameling van de (strikt) positieve reële getallen wordt genoteerd als:

– $\boxed{\mathbb{R}^+} = \{x \in \mathbb{R} | \ x \geqslant 0\}$ en $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} | \ x > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^+ | \ x \neq 0\}$.

Op dezelfde manier worden $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}^+$ gedefinieerd.

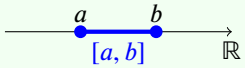
Pas op: Engelstalige handboeken en websites hebben dikwijls een *omgekeerde afspraak*: $\mathbb{N}$ zijn dan de natuurlijke getallen *zonder nul*, en $\mathbb{N}_0$ zijn de natuurlijke getallen *inclusief nul*.
Sommige handboeken gebruiken notaties als $\mathbb{N}_{>0}, \mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\leq 0}$, met de voor zich sprekende betekenis.

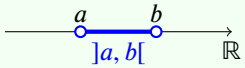
Andere belangrijke voorbeelden van verzamelingen zijn de intervallen:

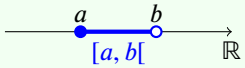
Definitie 1.3.7 (Intervallen)**.** Voor reële getallen a en b, met $a < b$, definiëren we

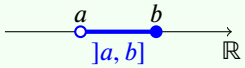
het **gesloten interval** $[a, b]$: de getallen tussen a en b met a en b inbegrepen.
het **open interval** $]a, b[$: de getallen tussen a en b, met a en b *niet* inbegrepen.
het **half-open interval** $[a, b[$: de getallen tussen a en b, met a inbegrepen en b *niet*.
het **half-open interval** $]a, b]$: de getallen tussen a en b, met a *niet* inbegrepen en b wel.

In formules wordt dat:

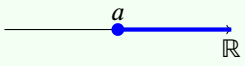
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ het gesloten interval $[a, b]$ 

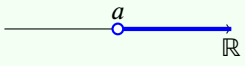
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ het open interval $]a, b[$ 

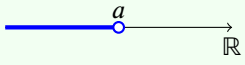
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ het half-open interval $[a, b[$ 

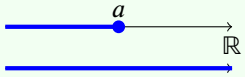
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ het half-open interval $]a, b]$ 

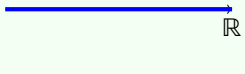
We breiden de notatie ook uit voor halfrechten of 'oneindige intervallen':

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ 

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ 

$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ 

$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ 

$]-\infty, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ 

Merk op dat $+\infty$ en $-\infty$ zelf nooit tot het interval behoren, want $+\infty$ en $-\infty$ zijn geen reële getallen.

In Engelstalige handboeken wordt voor het 'open teken' soms een rond haakje gebruikt.
De notatie (a, b) komt dan overeen met $]a, b[$.

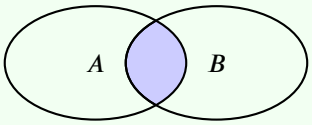
CC BY-NC-SA 4.0

1.3.B Bewerkingen met verzamelingen: unie en doorsnede

Je kan in zekere zin 'rekenen' met verzamelingen door volgende bewerkingen uit te voeren:

Definitie 1.3.8. Met twee verzamelingen A en B associëren we:

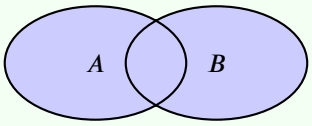
- $A \cap B$ = de **doorsnede** van A en B.
  $A \cap B$ is de verzameling van alle elementen die behoren tot A **en** tot B.



$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$

We noemen twee verzamelingen A en B **disjunct** als $A \cap B = \emptyset$.

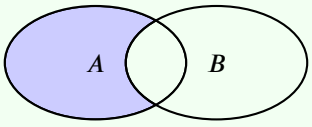
- $A \cup B$ = de **unie** of **vereniging** van A en B.
  $A \cup B$ is de verzameling van alle elementen die behoren tot A **of** tot B.



$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}$

Als $C = A \cup B$ waarbij $A \cap B = \emptyset$, dan noemt men C de **disjuncte unie** van A en B.

- $A \setminus B$ = het **verschil** van A en B.
  $A \setminus B$ is de verzameling van alle elementen die behoren tot A maar niet tot B.



$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\}$

Merk op dat in het algemeen $A \setminus B \neq B \setminus A$ en dat
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\} = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

Voorbeeld 1.3.5. Bepaal volgende verzamelingen.

(a) $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$

(b) $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$

(c) $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$

(d) $\{2,3,4\} \setminus \{1,2,3\} = \{4\}$

Voorbeeld 1.3.6. Bepaal volgende unies, doorsnedes en verschillen van intervallen:

(a) $[2,4[\cap]3,5[=]3,4[$

(b) $[2,4[\cup]3,5[= [2,5[$

(c) $[2,4[\setminus]3,5[= [2,3]$

(d) $]3,5[\setminus [2,4[= [4,5[$

(e) $[2,4[\cap [5,6] = \emptyset$

(f) $[2,4[\cup [5,6]$ is geen interval. Zo zit bijvoorbeeld 4.5 niet in deze verzameling.

Opmerking 1.3.3.

De doorsnede $A \cap B$ van twee verzamelingen is de *grootste* verzameling die zowel een deelverzameling is van A als van B. De unie is de *kleinste* verzameling waarvan zowel A als B deelverzamelingen zijn.

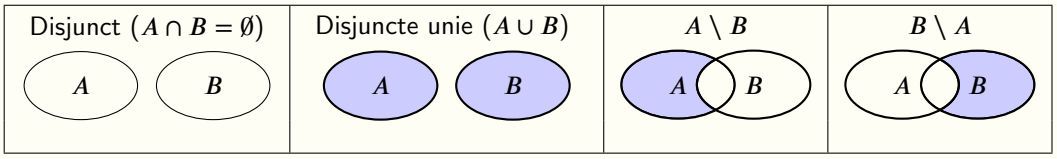
CC BY-NC-SA 4.0

1.3.B Bewerkingen met verzamelingen: unie en doorsnede

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \qquad A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$$

Opmerking 1.3.4.

Disjuncte verzamelingen, de disjuncte unie, $A \setminus B$ en $B \setminus A$ stel je als volgt voor met Venndiagrammen:

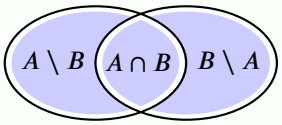


Er zijn enkele voor de hand liggende eigenschappen voor doorsnedes, unies en verschillen met zichzelf of de lege verzameling. Er is ook een handigheid om indien nodig elke unie te schrijven als een *disjuncte* unie:

Eigenschap 1.3.1. Voor elke verzameling A geldt:

$$A \cap A = A \qquad A \cup \emptyset = A \qquad A \setminus A = \emptyset$$
$$A \cup A = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \setminus \emptyset = A$$

Elke unie kan geschreven worden als een disjuncte unie:

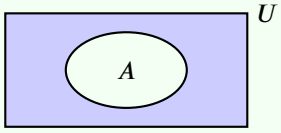


$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Dikwijls zijn alle relevante verzamelingen in een bepaalde context *deelverzamelingen van een vaste verzameling*, bijvoorbeeld de reële getallen in de context van het bestuderen van reële functies. We noemen die vaste verzameling dan een **universele verzameling** (of **universum**) U en tekenen haar Venndiagram met een rechthoek in plaats van een ovaal. Als er een universum is, dan bestaat er niets 'buiten' dat universum. We kunnen dan het *complement* van een verzameling A definiëren als alles wat *niet* in A zit:

Definitie 1.3.9.

Het **complement** A^c van een deelverzameling A in een universum U is de verzameling van de elementen van U die *niet* tot A behoren. A^c is dus gelijk aan het verschil van U en A:



$$A^c = U \setminus A = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

Volgende eigenschappen kan je aflezen op Venndiagrammen, zoals in de oefeningen wordt besproken.

Eigenschap 1.3.2. Voor A, B en C deelverzamelingen van een universele verzameling U geldt:

CC BY-NC-SA 4.0

1.3.B Bewerkingen met verzamelingen: unie en doorsnede

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	en	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	(associativiteit)
$A \cup B = B \cup A$	en	$A \cap B = B \cap A$	(commutativiteit)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	en	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(distributiviteit)
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	en	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	(wetten van De Morgan)
$A \cup A^c = U$	en	$A \cap A^c = \emptyset$	(complementering)
$(A^c)^c = A$			(dubbel complement)

CC BY-NC-SA 4.0

1.3.C Verzamelingen en logica

Opmerking 1.3.5. Enkel ONTWERP: verband tussen logische bewerkingen en/of/niet/implies en verzamelingsbewerkingen unie/doorsnede/complement/deelverzameling.

Nog verder uit te werken, of eventueel behandelen in oefeninge(en) ...?

Doorsnede, unie en complement van verzamelingen komen overeen met de logische wetten voor 'en', 'of' en 'niet':

Eigenschap 1.3.3. Als A, B en C deelverzamelingen zijn van een universele verzameling U, dan geldt:

(a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ en $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativiteit).

(b) $A \cup B = B \cup A$ en $A \cap B = B \cap A$ (commutativiteit).

(c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ en $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributiviteit).

(d) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ en $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (de wetten van De Morgan) .

(e) $A \cup A^c = U$ en $A \cap A^c = \emptyset$ (complementering).

(f) $(A^c)^c = A$ (dubbel complement) .

Opmerking 1.3.6. Beschouw voor een element x uit een universele verzameling U de beweringen

$$p : x \in A \quad \text{en} \quad q : x \in B \quad \text{en} \quad r : x \in C.$$

Dan kan je bovenstaande eigenschappen vertalen door logische stellingen.

Hoe vertaal je de beweringen $x \in A^c$, $x \in B^c$, $x \in (A \cup B)^c$ en $x \in (A \cap B)^c$?

Begrijp je waarom de eigenschap **??**(d) de naam van De Morgan meekrijgt? Zie je hier een verband met een gelijknamige stelling uit de logica?

CC BY-NC-SA 4.0

1.3.D Oefeningen verzamelingen

Oefening 1.3.1. Zijn volgende uitspraken waar?

1. Juist ✓ $\{1,2,3\} \stackrel{?}{\subseteq} \mathbb{N}$
2. Juist ✓ $\{1\} \stackrel{?}{\subseteq} \mathbb{N}$
3. Fout ✓ $1 \stackrel{?}{\subseteq} \mathbb{N}$
4. Juist ✓ $\{5,7\} \stackrel{?}{\subseteq} \{n \in \mathbb{N} | n \text{ priemgetal}\}$

Oefening 1.3.2. Bepaal volgende verzamelingen.

1. $\{1,2,3,4\} \cap \{2,3,4\} =$ $\{2,3,4\}$✓
2. $\{1,2,3,4\} \cup \{2,3,4\} =$ $\{1,2,3,4\}$✓
3. $\{1,2,3,4\} \backslash \{2,3,4\} =$ $\{1\}$✓
4. $\{2,3,4\} \backslash \{1,2,3,4\} =$ $\emptyset$✓

Oefening 1.3.3. Zijn volgende uitspraken waar of onwaar? Verbeter de foute uitspraken.

1. Juist ✓ $\mathbb{N} \backslash \{0\} = \mathbb{N}_0$
2. Juist ✓ $\{1,2,3\} \backslash \{2\} = \{1,3\}$
3. Fout ✓ $\mathbb{R} \backslash \,]\,2,5\,[=]-\infty, 2\,[\cup [\,5, +\infty[$
4. Juist ✓ $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ is de verzameling van de irrationale getallen.
5. Fout ✓ $\{1,\{1,2\}\} \backslash \{1\} = \{1,2\}$

Uitwerking: De opgave is van de vorm $A \backslash B$, waarbij A twee elementen bevat, namelijk 1 en $\{1,2\}$. Als je de elementen van B – dus 1 – verwijdert, houd je een verzameling over met één element, namelijk het element $\{1,2\}$. De verzameling met één element $\{1,2\}$ wordt genoteerd $\{\{1,2\}\}$.

Het antwoord kan ook onmogelijk $\{1,2\}$ zijn, want dan zou $2 \in A \backslash B$, terwijl $2 \notin A$ en natuurlijk ook $A \backslash B \subseteq A$.

6. Fout ✓ $\{1,\{1\}\} \backslash \{1\} = \{1\}$

Uitwerking: Inderdaad, $\{1,\{1\}\} \backslash \{1\} = \{\{1\}\}$, want van de elementen 1 en $\{1\}$ wordt 1 verwijderd, en dus blijft enkel $\{1\}$ over. De verzameling met het element $\{1\}$ schrijven we als $\{\{1\}\}$.

Oefening 1.3.4. Supportersclub 'de Sortie' gaat regelmatig kijken naar de thuiswedstrijden van OHL. Er is echter onzekerheid over het aantal leden. Uit de archieven blijkt het volgende:

- de vorige drie wedstrijden waren tegen AA Gent, KV Kortrijk en KV Mechelen.
- er gingen 14 supporters kijken naar de wedstrijd tegen AA Gent, 11 naar de wedstrijd tegen KV Kortrijk en 8 naar de wedstrijd tegen KV Mechelen.
- een aantal van die supporters gingen naar minstens 2 matchen: 5 naar zowel AA Gent als KV Kortrijk, 3 gingen naar de wedstrijd tegen KV Kortrijk en KV Mechelen, en 3 gingen naar AA Gent en KV Mechelen kijken.

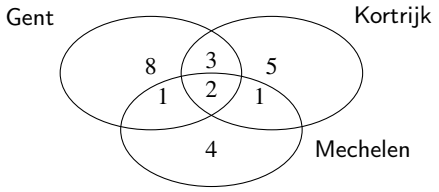
CC BY-NC-SA 4.0

1.3.D Oefeningen verzamelingen

- er waren 2 supporters die de drie wedstrijden bijwoonden.

Als we er van uitgaan dat alle leden van 'de Sortie' minstens 1 keer gingen supporteren, hoeveel leden telt 'de Sortie' dan? 24✓

Uitwerking: Je start bij het invullen best met de 2 supporters die de drie wedstrijden hebben bijgewoond. Daarna vul je in de doorsnedes de overblijvende supporters in die precies twee wedstrijden volgden.

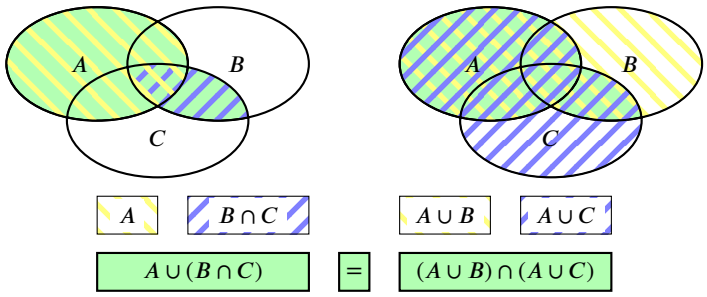


Oefening 1.3.5. In een klas beoefent elke leerling(e) minstens een van de volgende drie sporten: zwemmen, atletiek en tennis. De atleten en zij die tennissen zijn samen met 15. 14 leerlingen tennissen niet. 5 leerlingen doen zowel aan zwemmen als aan atletiek, 4 zowel aan tennis als aan zwemmen. Onder de 3 leerlingen die zowel tennissen als atletiek doen, zijn er 2 die bovendien zwemmen. De atleten zijn samen met 11.

Hoeveel leerlingen doen alleen aan zwemmen? 6✓

Oefening 1.3.6. Toon de gelijkheid $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ aan op een Venndiagram.

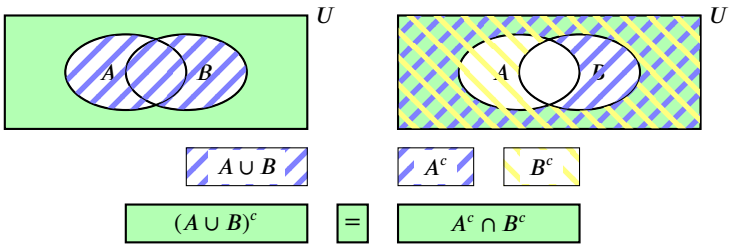
Uitwerking:



Oefening 1.3.7. Illustreer met een Venndiagram volgende uitspraken. A, B zijn willekeurige verzamelingen.

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Uitwerking:

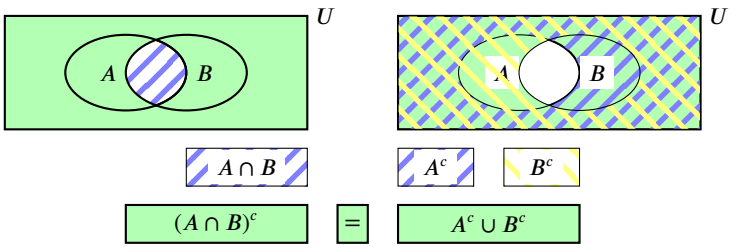


2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

CC BY-NC-SA 4.0

1.3.D Oefeningen verzamelingen

Uitwerking:



CC BY-NC-SA 4.0

1.3.E Extra oefeningen verzamelingen

Oefening 1.3.8. Zijn volgende uitspraken waar?

1. Juist ✓ $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is veelvoud van } 12\} \overset{?}{\subseteq} \{n \in \mathbb{N} | n \text{ is veelvoud van } 6\}$
2. Fout ✓ $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is veelvoud van } 6\} \overset{?}{\subseteq} \{n \in \mathbb{N} | n \text{ is veelvoud van } 12\}$
3. Juist ✓ $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is een oneven priemgetal} < 10\} \overset{?}{\subseteq} \{n \in \mathbb{N} | n - 5 \in \{-2, 0, 2\}\}$
4. Juist ✓ $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is een oneven priemgetal} < 10\} \overset{?}{=} \{n \in \mathbb{N} | n - 5 \in \{-2, 0, 2\}\}$

Oefening 1.3.9. Het **symmetrisch verschil** van twee verzamelingen A en B wordt gedefinieerd als:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Duid deze verzameling aan op een Venndiagram.

Oefening 1.3.10.

De **karakteristieke functie** $k_A : U \to \{0, 1\}$ van een deelverzameling A van een verzameling U is gedefinieerd door

$$\begin{cases} k_A(x) = 1 & \text{als } x \in A, \\ k_A(x) = 0 & \text{als } x \in U \setminus A. \end{cases}$$

In woorden gezegd: elk element van A wordt op 1 afgebeeld en elk element dat niet tot A behoort, wordt op 0 afgebeeld. Welke van volgende uitspraken zijn waar voor willekeurige $A, B \subset U$?

1. Juist ✓ $k_A \cdot k_B$ is de karakteristieke functie van $A \cap B$.
2. Fout ✓ $k_A + k_B$ is de karakteristieke functie van $A \cup B$.
3. Juist ✓ Als A en B disjunct zijn (of lege doorsnede hebben), dan is $k_A + k_B$ de karakteristieke functie van $A \cup B$.
4. Juist ✓ $k_A - k_{A \cap B}$ is de karakteristieke functie van $A \setminus B$.

Extra: Verbeter de foute uitspraken.

Merk op: de karakteristieke functie van een deelverzameling van U is dus een *functie* $k_A : U \to \{0, 1\}$ op U waarmee we de verzameling A kunnen reconstrueren: $A = \{x \in U \mid k_A(x) = 1\}$. Met dergelijke functies kan dus een probleem van *deelverzamelingen* worden omgezet naar een probleem van *functies*.

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Hoe oplossingen opschrijven?

Wiskunde wordt dikwijls geassocieerd met 'formules' en 'rekenen', maar eigenlijk is 'redeneren op basis van structuren' een veel belangrijker aspect. Dergelijke *redeneringen* worden typisch weergegeven in gewoon Nederlands. Daarbij worden weliswaar regelmatig formules en berekeningen gebruikt, en sommige uitdrukkingen krijgen een specifieke technische betekenis, maar de redenering zelf bestaat bijna altijd uit Nederlandse zinnen. Wie wiskunde leert moet eerst vertrouwd worden met dit taalgebruik, en moet het vervolgens ook zelf leren toepassen bij het oplossen van oefeningen.

Enkele belangrijke principes bij het *opschrijven* van wiskunde zijn:

Axioma 1.4.1. Een wiskundige tekst moet voldoen aan volgende voorwaarden:

(a) **Duidelijk**: wat er staat moet een betekenis hebben, die voor de lezer zo makkelijk mogelijk begrijpbaar is, zonder dubbelzinnigheden of onvolledigheden.

(b) **Exact**: wat er staat moet juist zijn.

(c) **Beknopt**: wat er staat is enkel wat ook echt nodig is, in korte zinnen zonder overtollige uitweidingen.

(d) **Voorleesbaar**: wat er staat kan je luidop voorlezen. Dat *klinkt* dan minstens als een normale betekenisvolle tekst.

Opmerking 1.4.1.

- Gebruik deze richtlijnen bij toetsen en examens, maar ook bij opdrachten, tijdens oefenzittingen en als je zelf oefeningen oplost.
- Een duidelijk, exact en beknopt taalgebruik heeft onmiddellijk volgende voordelen:
  - je kan zelf makkelijker je oplossing *onthouden* en *nakijken*
  - je kan zelf makkelijker de oplossing *vinden* met duidelijke, exacte en beknopte tussenstappen
  - het *verhoogt je punten* bij examens
  - gedachten en redeneringen duidelijk, exact en beknopt kunnen weergeven is ook *buiten het domein van de wiskunde* belangrijk, bijvoorbeeld bij sollicatie- of evaluatiegesprekken.

Wie het eens van iemand anders wil horen kan terecht bij volgende video:

YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=p8LIJVmPj6g

Eigenschap 1.4.1. De **oplossing van een oefening** heeft meestal volgende globale structuur, die je kent van de lessen Nederlands:

(a) **Inleiding**: definitie van de termen, variabelen of eigenschappen die je zal gebruiken. Indien nodig geef je een kort overzicht van de structuur van je oplossingsmethode.

(b) **Hoofdtekst**: volledige uitwerking van de oplossing, met een duidelijke logische structuur, volledige Nederlandse zinnen en zo nodig duidelijke en correcte formules, diagrammen en tekeningen.

(c) **Conclusie**: een bondige samenvatting van je oplossing, met het duidelijke *eindantwoord*.

Voor de meeste oefeningen volstaat zowel voor de inleiding als voor de conclusie één (korte) zin.

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Hoe oplossingen opschrijven?

Voorbeeld 1.4.1. Enkele goede voorbeelden van mogelijke inleidingen.

- Noem n het aantal konijnen op tijd $t = 0$. Dan is ...
- Zij $\vec{v} = (x, y)$ een willekeurige vector in het vlak. Dan is ...
- Noem de beginsnelheid van de bal v_b en de eindsnelheid v_e. Dan is ...

De inleiding hangt af van de precieze formulering van de vraag. Je moet de vraag *niet* herhalen. Als in de vraag zelf al letters zoals f, n of x worden gebruikt moet je die definitie *niet* noodzakelijk herhalen. Maar als in de vraag geen n of x voorkomt is gebruik van x of n zonder verdere uitleg *fout*. Je mag natuurlijk wel zonder meer de *algemeen gekende* symbolen gebruiken zoals $\mathbb{N}$ of $\sqrt{2}$.

Voorbeeld 1.4.2. Enkele slechte voorbeelden van inleidingen.

- $n(t) + n(0) = 7 \implies 5$
- $|\vec{v}| = 2$ dus $x^2 + y^2 = 4$ ....
- Eerst hebben we snelheid x en uiteindelijk nog snelheid s.

Voorbeeld 1.4.3. Voorbeelden van het gebruik van Nederlandse zinnen.

- Een zin begint met een hoofdletter, en eindigt met een punt. Dat geldt ook als de zin eindigt met een formule zoals
$$a^2 + b^2 = c^2.$$
- Splits je redenering in verschillende puntjes. Laat voldoende witruimte. Maak duidelijke ~~correkties~~ correcties indien nodig. Gebruik kleur of kaders, maar best geen rood. Gebruik eventueel potlood.
- Formules zijn meestal een deel van een zin via bindwoorden als *dus, daarom, maar, welnu, ...*
- Voorbeelden:
  - Als $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de priemgetallen zijn kleiner dan N, dan definiëren we $K = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$.
  - Hieruit volgt dus dat
$$\begin{aligned}(a+b)^2 - (a-b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)\\ &= 4ab\end{aligned}$$
    en deze uitdrukking is positief omdat zowel a als b positief zijn.

Voorbeeld 1.4.4. Voorbeelden van conclusies.

- Geef duidelijk aan wat je eindoplossing is:
$$\text{en dus } x = \frac{3}{2} + \frac{7}{5} = \frac{21+10}{14} = \frac{31}{14}.$$
- Zorg dat je antwoord inderdaad ook een oplossing is op de gestelde vraag. Duidelijk, exact en beknopt antwoorden dat er in totaal $n = 1438$ konijnen zijn op tijd $t = 7$ helpt niet als gevraagd werd naar het *aantal mannelijke* konijnen of naar het *gewicht* van de konijnen.
- Wees eerlijk en correct als je de oplossing niet vindt. Vermeld eventueel wel een deeloplossing

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Hoe oplossingen opschrijven?

of een strategie. Bijvoorbeeld: Ik kan deze vergelijking niet exact oplossen naar x, omdat ik de precieze formule met de discriminant niet meer ken. In ieder geval zal $x \geq 0$, en dus zal het aantal konijnen op tijd $t = 7$ zeker groter zijn dan 1000.

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Bewijstechnieken

1.5.1 Verschillende types eigenschappen

Wiskundige eigenschappen en stellingen worden op allerlei verschillende manieren geformuleerd. We sommen hier enkele mogelijkheden op, telkens met een kort voorbeeld.

(a) **Een *universele* uitspraak**: $\forall a \in A : p(a)$

Voorbeeld 1.5.1. 'Voor elk reëel getal x is x^2 positief. '

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$$

In een universele uitspraak $\forall a \in A : p(a)$ kan het predicaat $p(a)$ ook de vorm aannemen van een implicatie of een equivalentie.

Voorbeeld 1.5.2.

1. 'Voor elk natuurlijk getal n geldt dat als n een viervoud is, dan is n even.'

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \text{ is een viervoud} \Rightarrow n \text{ is even}$$

2. 'Voor elk reëel getal x geldt dat x positief is als en slechts als x gelijk is aan zijn absolute waarde. '

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$$

(b) **Een *existentiële* uitspraak**: $\exists a \in A : p(a)$

Voorbeeld 1.5.3. 'Er bestaan strikt positieve natuurlijke getallen zodat de som van hun kwadraten terug een kwadraat is.'

$$\exists x, y, z \in \mathbb{N}_0 : x^2 + y^2 = z^2$$

(c) **De negatie van een existentiële uitspraak**: $\neg(\exists a \in A : p(a))$:

Voorbeeld 1.5.4. 'Er bestaan geen gehele getallen n en m zodat $8n - 6m = 101$. '

$$\neg(\exists n, m \in \mathbb{Z} : 8n - 6m = 101)$$

(d) **De negatie van een universele uitspraak**: $\neg(\forall a \in A : p(a))$:

Voorbeeld 1.5.5. 'Niet alle priemgetallen zijn oneven.'

Merk op dat deze uitspraak niet equivalent is met 'Alle priemgetallen zijn even. '

1.5.2 Soorten bewijzen

Een wiskundig bewijs is een logische redenering die de waarheid van een uitspraak aantoont. Een bewijs is niet uniek, uitspraken kunnen op meerdere manieren aangetoond worden. Naast de verschillende types eigenschappen, zijn er ook verschillende types bewijzen. We bespreken er enkele.

We veronderstellen dat volgende basiseigenschappen gekend zijn zodat we deze kunnen gebruiken in de voorbeeld-bewijzen:

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Bewijstechnieken

Eigenschap 1.5.1 (De orde $\leq$ in $\mathbb{R}$)**.**

(o1) Voor alle reële getallen a, b en c geldt

$$a < b \Rightarrow (a + c < b + c)$$

(o2) Voor alle reële getallen a, b en c geldt

$$(a < b \wedge c > 0) \Rightarrow ac < bc$$

$$(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow ac > bc$$

(o3) Voor alle reële getallen a, b en c geldt

$$(a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c.$$

Deze laatste eigenschap heet de **transitiviteit** van de ordening.

1.5.2.1 Bewijs per generiek element

Dit type bewijs wordt gebruikt om een universele uitspraak $\forall a \in A : p(a)$ te bewijzen. Om te bewijzen dat iets geldt *voor alle elementen* van een verzameling, volstaat het te bewijzen dat het geldt voor *elk willekeurig element* van die verzameling.

Om een universele uitspraak te bewijzen beginnen we het bewijs met de uitdrukking "Kies a in A *willekeurig*." en daarna volgt een redenering die $p(a)$ aantoont. Het is belangrijk dat in die redenering de beschouwde a ook willekeurig blijft, wat betekent dat we over a geen veronderstellingen maken. Als wie iets moeten bewijzen $\forall a \in \mathbb{R}$, mogen we (natuurlijk) niet aannemen dat a positief is, of $a > 1$. Je mag wel gebruikmaken van gevalsonderscheid, waarbij je het bewijs geeft voor verschillende gevallen: bijvoorbeeld eerst voor $a > 0$ en daarna voor $a \leq 0$. Als de uitspraak in beide gevallen bewezen kan worden, is de volledige uitspraak bewezen.

Voorbeeld 1.5.6. Bewijs dat $\forall a \in \mathbb{R}_0 : a^2 > 0$

Bewijs Kies $a \in \mathbb{R}_0$ willekeurig, dus $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$. Dan geldt dat ofwel $a < 0$ ofwel $a > 0$.

In het geval dat $a > 0$ volgt door beide leden van de ongelijkheid $a > 0$ met het strikt positieve getal a te vermenigvuldigen dat $a^2 > 0$ (eig (o2)).

In het geval dat $a < 0$ volgt ook door beide leden van de ongelijkheid $a < 0$ met het strikt negatieve getal a te vermenigvuldigen dat $a^2 > 0$ (eig (o2)).

In beide gevallen volgt dus dat $a^2 > 0$. Omdat $a \in \mathbb{R}_0$ willekeurig gekozen was, bewijst dit de eigenschap. ■

Opmerking 1.5.1. Wegens de equivalentie $\neg(\exists x \in X : p(x)) \iff \forall x \in X : \neg p(x)$ kan je ook voor de negatie van een existentiële uitspraak een bewijs geven per generiek element.

1.5.2.2 Bewijs per voorbeeld

Om een existentiële uitspraak $\exists a \in A : p(a)$ te bewijzen, moeten we een $a \in A$ geven waarvoor $p(a)$ geldt.

Als je moet bewijzen dat er zwarte zwanen bestaan, volstaat het een zwarte zwaan te vinden. Inderdaad, als je één zwarte zwaan effectief kan vinden, dan is het zeker dat er bestaan.

CC BY-NC-SA 4.0

Voorbeeld 1.5.7.

1. Bewijs dat $\exists n \in \mathbb{Z} : n^2 = 9$.

Bewijs Merk op dat $3 \in \mathbb{Z}$ en $3^2 = 9$. Dus (minstens) voor $n = 3$ geldt dat $n^2 = 9$. ■

Het gegeven voorbeeld is niet noodzakelijk uniek. Hier kan je ook -3 kiezen natuurlijk.

2. Bewijs dat $\exists x, y, z \in \mathbb{N}_0 : x^2 + y^2 = z^2$

Bewijs Neem $x = 3$ en $y = 4$, dan is $x^2 + y^2 = 9 + 16 = 25$. Als we $z = 5$ nemen geldt dus dat $x^2 + y^2 = z^2$. ■

Merk wel op dat je soms ook kan aantonen dat iets moet bestaan *zonder* het ook effectief te construeren of te vinden.

1.5.2.3 Bewijs per tegenvoorbeeld

Wegens de equivalentie $\neg(\forall x \in X : p(x)) \iff \exists x \in X : \neg p(x)$, kan je voor de negatie van een universele uitspraak een bewijs geven per voorbeeld, het volstaat immers om een voorbeeld te geven waarvoor $p(x)$ niet opgaat. In dit geval wordt zo'n voorbeeld een **tegenvoorbeeld** genoemd.

Voorbeeld 1.5.8. Bewijs dat niet alle priemgetallen oneven zijn.

Bewijs We moeten dus bewijzen dat er een priemgetal bestaat dat even is. Het getal 2 is een tegenvoorbeeld, want 2 is een priemgetal en 2 is even. ■

Oefening 1.5.1. Zijn volgende uitspraken waar of onwaar? Geef een bewijs.

1. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 = 0$.

Uitwerking: De uitspraak is waar, omdat (bewijs per voorbeeld) 2 een reëel getal is waarvoor $x^2 - 4 = 0$.

2. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 = 0$.

Uitwerking: De uitspraak is niet waar, omdat (bewijs per tegenvoorbeeld) $x = 1$ een reëel getal is waarvoor $x^2 - 4 \neq 0$.

3. $\neg(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 = 0)$.

Uitwerking: De uitspraak is waar, omdat (bewijs per generiek element) voor elk reëel getal x het kwadraat x^2 positief is, en je dus nooit 0 kan bekomen door bij het positieve getal x^2 nog eens 4 op te tellen.

4. $\exists x \in \mathbb{C} : x^2 + 4 = 0$.

Uitwerking: De uitspraak is waar, omdat (bewijs per voorbeeld) voor $x = 2i$ geldt dat $x^2 + 4 = (2i)^2 + 4 = -4 + 4 = 0$.

1.5.2.4 Bewijs uit het ongerijmde

Bij een **bewijs uit het ongerijmde** nemen we aan dat het te bewijzen *niet* waar is, en leiden daaruit een contradictie af. Een uitspraak is ofwel waar ofwel niet waar. Als de aanname dat ze niet waar is leidt tot een contradictie, dan moet de uitspraak dus noodzakelijk *waar* zijn. Een typische contradictie is $p \wedge \neg p$,

CC BY-NC-SA 4.0

namelijk dat zowel p als $\neg p$ waar zijn.

Voorbeeld 1.5.9. Bewijs dat er geen gehele getallen n en m bestaan zodat $8n - 6m = 101$.

Om $\neg(\exists n, m \in \mathbb{Z} : 8n - 6m = 101)$ te bewijzen nemen we dus aan dat dit te bewijzen niet waar is, we nemen dus aan dat er wel gehele getallen n en m bestaan zodat $8n - 6m = 101$ en leiden daar een contradictie uit af.

Bewijs Bewijs uit het ongerijmde: Veronderstel dat n en m gehele getallen zijn waarvoor geldt dat $8n - 6m = 101$. Omdat $8n - 6m = 2(4n - 3m)$ is $8n - 6m$ een veelvoud van 2, dus even. We hebben verondersteld dat $8n - 6m = 101$ dus is 101 ook even. Maar 101 is duidelijk oneven, zodat we een tegenspraak hebben. Uit deze tegenspraak volgt dat er geen gehele getallen n en m bestaan met $8n - 6m = 101$. ■

Om deze uitspraak te bewijzen hoef je geen bewijs uit het ongerijmde te gebruiken, je kan het bewijs ook anders formuleren. We moeten hier de negatie van een existentiële uitspraak bewijzen, dus we kunnen ook een bewijs geven per generiek element. We gebruiken dat

$$\neg(\exists n, m \in \mathbb{Z} : 8n - 6m = 101) \Leftrightarrow \forall n, m \in \mathbb{Z} : 8n - 6m \neq 101.$$

Bewijs Kies n en m twee willekeurige gehele getallen. Dan is $8n - 6m = 2(4n - 3m)$ een veelvoud van 2, dus even. Omdat 101 oneven is, kan $8n - 6m$ niet gelijk zijn aan 101. ■

1.5.2.5 Het bewijzen van implicaties

Om een uitspraak van de vorm $\forall a \in A : p(a) \Rightarrow q(a)$ te bewijzen beginnen we met "Kies a in A willekeurig." Daarna moeten we voor deze a de implicatie $p(a) \Rightarrow q(a)$ bewijzen. We overlopen hiervoor enkele mogelijkheden:

- **Direct bewijs**

  Om een implicatie $p \Rightarrow q$ te bewijzen vertrekken we van het gegeven p, en redeneren of rekenen we tot we bij het te bewijzen q uitkomen.

  Voorbeeld 1.5.10. Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat als n een viervoud is, dan is n even.

  Bewijs Kies n een willekeurig natuurlijk getal en veronderstel dat n een viervoud is. Dan bestaat er een $m \in \mathbb{N}$ zodat $n = 4m$. Bijgevolg is $n = 2 \cdot 2m$. Stel $k = 2m$. Dan is $n = 2k$, wat betekent dat n even is. ■

- **Bewijs door contrapositie**

  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ is een tautologie. De implicatie $p \Rightarrow q$ is dus equivalent met haar *contrapositie* $\neg q \Rightarrow \neg p$. In plaats van $p \Rightarrow q$ te bewijzen, kunnen we dus evengoed de implicatie $\neg q \Rightarrow \neg p$ bewijzen. Soms is dat eenvoudiger.

  Voorbeeld 1.5.11. Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat als n^2 even is, dan is n ook even.

  Bewijs We tonen deze eigenschap aan door middel van contrapositie. We tonen dus aan dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat als n oneven is, dan n^2 ook oneven is. Neem een willekeurig natuurlijk getal n dat oneven is. Dan bestaat er een $m \in \mathbb{N}$ zodat $n = 2m + 1$. Bijgevolg is $n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$. Stel $k = 2m^2 + 2m$, dan is $n^2 = 2k + 1$ en bijgevolg is n^2 oneven. ■

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Bewijstechnieken

Door middel van contrapositie is dit een eenvoudig bewijs, de eigenschap bewijzen met een direct bewijs zou dit een hele uitdaging zijn.

- **Bewijs uit het ongerijmde**

  Om een uitspraak van de vorm

  $$\forall a \in A : p(a) \Rightarrow q(a)$$

  uit het ongerijmde te bewijzen nemen we aan dat de negatie hiervan, namelijk

  $$\exists a \in A : \neg(p(a) \Rightarrow q(a))$$

  waar is en leiden hieruit een contradictie af. Omdat $\neg(p(a) \Rightarrow q(a))$ equivalent is met $p(a) \wedge \neg q(a)$, nemen we in het bewijs dus aan dat er een $a \in A$ bestaat waarvoor $p(a)$ waar is en $q(a)$ niet waar is en leiden hieruit een contradictie af.

Voorbeeld 1.5.12. Bewijs dat voor alle reële getallen x, y en a geldt: als $x > y$ en $ax \leq ay$ dan is $a \leq 0$.

Merk op dat we hier iets moeten bewijzen over 3 elementen uit $\mathbb{R}$.

Bewijs Bewijs uit het ongerijmde: Veronderstel dat x, y en a reële getallen zijn waarvoor geldt dat $x > y$ en $ax \leq ay$ (p waar) en $a > 0$ (q niet waar). Dan volgt uit $x > y$ en het feit dat a strikt positief is dat $ax > ay$, hetgeen in tegenspraak is met de onderstelling dat $ax \leq ay$. We vinden dus een contradictie. ■

Als laatste voorbeeld geven we nog een voorbeeld van een direct bewijs. We schrijven het bewijs niet meteen op, maar maken het proces van het zoeken naar welke stappen gezet moeten worden in het bewijs om die daarna met een leesbare redenering op te schrijven expliciet.

Voorbeeld 1.5.13. Bewijs dat voor alle strikt positieve reële getallen a en b geldt: $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$.

Uitwerking: We kiezen twee willekeurige strikt positieve getallen a en b, zodat $a < b$.

Omdat we iets willen weten over a^2 en b^2, lijkt een mogelijkheid om de gegeven ongelijkheid $a < b$ met a of b te vermenigvuldigen. Omdat a en b strikt positief zijn blijven de ongelijkheden behouden wegens eigenschap (o2) over de orde in $\mathbb{R}$ zodat

$$a < b \Rightarrow a^2 < ab \tag{1}$$

en

$$a < b \Rightarrow ab < b^2. \tag{2}$$

Omdat gegeven is dat $a < b$ volgt dus dat $a^2 < ab$ en $ab < b^2$. Deze twee ongelijkheden bevatten beide ab zodat uit eigenschap (o3) volgt

$$(a^2 < ab) \text{ en } (ab < b^2) \;\Rightarrow\; a^2 < b^2. \tag{3}$$

Op deze manier hebben we een correcte *redenering gevonden*, nu moeten we die redenering ook nog duidelijke en correct *opschrijven*. Een enigszins dubieuze poging gaat als volgt:

Bewijs

$$\begin{array}{c} a < b \\ \Downarrow\ a > 0 \;\; b > 0 \qquad \text{eig. (o2)} \\ a^2 < ab \quad \text{en} \quad ab < b^2 \\ \Downarrow \text{ transitiviteit eig. (o3)} \\ (a^2 < ab) \wedge (ab < b^2) \;\Rightarrow\; a^2 < b^2 \end{array}$$

■

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Bewijstechnieken

Dit is geen goed geschreven bewijs! Enkel voor wie het bewijs al kent, is duidelijk wat er wordt bedoeld. Deze versie is hoogstens bruikbaar als schets om het bewijs te visualiseren.

Nog dubieuzer is volgend 'bewijs':

Bewijs $a < b \Rightarrow (a^2 < ab \wedge ab < b^2) \Rightarrow a^2 < b^2$. ■

Een correct en volledig bewijs is een leesbare opeenvolging van Nederlandse zinnen, met woorden zoals 'hieruit volgt', 'dus' en 'omdat' die aangeven hoe de verschillende zinnen met elkaar samenhangen. Er mogen natuurlijk wiskundige symbolen worden gebruikt, maar het geheel is een leesbaar verhaal.

Een beter bewijs van de eigenschap ziet er bijvoorbeeld zo uit:

Bewijs Kies twee willekeurige strikt positieve reële getallen zodat $a < b$. We moeten bewijzen dat $a^2 < b^2$.

Omdat a strikt positief is, kunnen we in $a < b$ linkerlid en rechterlid vermenigvuldigen met a en geldt wegens eigenschap (o2) dat $a^2 < ab$.

Omdat b strikt positief is, kunnen we $a < b$ vermenigvuldigen met b en geldt opnieuw wegens eigenschap (o2) dat $ab < b^2$

Wegens de transitiviteit van de ordening (eigenschap (o3)) volgt uit $a^2 < ab$ en $ab < b^2$ dat inderdaad $a^2 < b^2$. ■

1.5.2.6 Het bewijzen van equivalenties

Omdat $p \Leftrightarrow q$ equivalent is met $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$ kunnen we een equivalentie bewijzen door beide implicaties te bewijzen.

Voorbeeld 1.5.14. Bewijs dat $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$

Bewijs Kies $x \in \mathbb{R}$ willekeurig.

- We tonen aan dat $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$:

  Dit volgt rechtstreeks uit de definitie van absolute waarde.

- We tonen aan dat $|x| = x \Rightarrow x \geq 0$:

  We tonen deze implicatie aan door middel van contrapositie. Uit $x < 0$ volgt per definitie dat $|x| = -x$ en ook dat $-x \neq x$. Uit $x < 0$ volgt dus dat $|x|$ niet gelijk is aan x.

■

1.5.2.7 Het bewijzen van de gelijkheid tussen verzamelingen

Zij A en B verzamelingen. Er geldt

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ en } B \subset A$$

Een gelijkheid $A = B$ van verzamelingen bewijzen we door zowel $A \subset B$ als $B \subset A$ aan te tonen. Om bijvoorbeeld $A \subset B$ aan te tonen nemen we een willekeurig element uit A en tonen we aan dat dit element ook in B zit.

Voorbeeld 1.5.15. Bewijs dat voor elke verzameling A geldt $(A^c)^c = A$.

Bewijs

Kies een willekeurige verzameling A.

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Bewijstechnieken

We bewijzen eerst dat $(A^c)^c \subset A$:

Neem een $x \in (A^c)^c$ willekeurig. Dan is $x \notin A^c$. Hieruit volgt dat $x \in A$.

We bewijzen nu dat $A \subset (A^c)^c$:

Neem een $x \in A$. Noteer $B = A^c$. Dan is $x \notin A^c$, of nog $x \notin B$. Dus is $x \in B^c = (A^c)^c$.

Uit $(A^c)^c \subset A$ en $A \subset (A^c)^c$ volgt dat $(A^c)^c = A$. ■

CC BY-NC-SA 4.0

1.5.A Bewijstechnieken: volledige inductie

De natuurlijke getallen hebben een opvallende gelijkenis met dominostenen. Iedereen kent recordpogingen om door één rechtopstaande dominosteen om te duwen een zo lang mogelijke keten van aansluitende dominostenen te laten omvallen. De dominostenen vallen zodra de eerste steen valt omdat de vorige dominosteen telkens de val veroorzaakt van minstens één volgende steen. In het eenvoudige geval van één lange keten zonder vertakkingen, kan het 'Principe van de Vallende Dominostenen' als volgt worden samengevat:

Stelling 1.5.1 (Principe van de Vallende Dominostenen)**.**

Een rij dominostenen, opgesteld zonder vertakkingen en genummerd met getallen $k = 1, 2, 3, \ldots$ zal volledig neervallen zodra

(Startzet) de eerste steen met nummer $k = 1$ wordt omgegooid.

(Automatische vervolgzetten) de stenen zó staan dat voor elke k geldt dat als de k-de steen valt, ook de $(k+1)$-ste steen omvalt.

Met natuurlijke getallen kan men een gelijkaardig spel spelen, maar dan niet door een zo lang mogelijke keten van getallen te laten omvallen, maar door een *oneindige keten* van uitspraken over natuurlijke getallen in één klap te bewijzen. De natuurlijke getallen kan je immers beschouwen als een oneindige keten getallen die begint bij 0 en waar elk natuurlijk getal k een unieke opvolger $k+1$ heeft. Het equivalent van het Principe van de Vallende Dominostenen is het wiskundige Principe van Volledige Inductie:

Stelling 1.5.2 (Het principe van volledige inductie)**.**

Een bewering $P(n)$ die afhangt van n is waar voor elk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}_0$ zodra

(Basisstap) de uitspraak geldt voor het eerste getal: $P(1)$ is waar

(Inductiestap) de uitspraak zodanig is dat voor elke $k \in \mathbb{N}_0$ geldt: als $P(k)$ waar is, dan is ook $P(k+1)$ waar.

Het is eenvoudig in te zien waarom het Principe van Volledige Inductie werkt: we weten uit de basisstap dat $P(1)$ waar is. We passen dan de inductiestap toe voor $k = 1$, en vinden dat uit $P(1)$ volgt dat $P(1+1) = P(2)$ ook waar is. Maar dan is, opnieuw wegens de inductiestap ook $P(2+1) = P(3)$ waar, en dus ook $P(3+1) = P(4)$, en dus ook $P(4+1) = P(5)$ en zo verder. De uitspraak $P(n)$ is dus zeker waar voor *elk* natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}_0$.

Een formeel wiskundig *bewijs* van het Principe van Volledige Inductie geven we hier niet, al was het maar omdat we ook geen formeel wiskundige definitie hebben gegeven van de natuurlijke getallen. In meer gevorderde cursussen wiskunde zal blijken dat je de natuurlijke getallen eigenlijk kan *definiëren* als die getallen die het getal 1 bevatten en waarvoor het Principe van Volledige Inductie geldt.

Het belang van het Principe is dat het een erg krachtige manier oplevert om een aantal wiskundige formules en eigenschappen te bewijzen. Dus we zullen het Principe van Volledige Inductie (dat we jammer genoeg hier niet formeel bewezen hebben) gebruiken om zelf interessante verdere eigenschappen te bewijzen.

Een **bewijs met volledige inductie** valt typisch uiteen in drie delen.

- De **basisstap**: je bewijst dat $P(1)$ inderdaad waar is. In vele gevallen is dat eerder eenvoudig, maar het is erg belangrijk dat het gebeurt. Vergelijk het met het omgooien van de eerste dominosteen: het is erg eenvoudig, maar zolang het niet gedaan wordt, gebeurt er niets.
- De **inductiestap**: je bewijst dat de implicatie $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ waar is voor elke $k \in \mathbb{N}_0$. In het bewijs van de inductiestap neem je dus aan dat $P(k)$ waar is (deze aanname heet de **inductiehypothese**), en *met behulp van* die inductiehypothese $P(k)$ bewijs je dan dat ook $P(k+1)$ waar is.

CC BY-NC-SA 4.0

1.5.A Bewijstechnieken: volledige inductie

- De **conclusie**: je roept het Principe van Volledige Inductie aan om te concluderen dat $P(n)$ waar is voor elke $n \in \mathbb{N}_0$. Merk op dat deze stap in elk bewijs precies hetzelfde is, maar het is toch erg belangrijk steeds duidelijk te vermelden dat het inderdaad dankzij dit Principe is dat je bewijs nu volledig is!

Hier is een eenvoudig voorbeeld:

Voorbeeld 1.5.16. Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n het getal $n^2 + n$ even is.

Bewijs

- **Basisstap**: Voor $n = 0$ is $n^2 + n = 0^2 + 0 = 0$ en dit is even.
- **Inductiestap**: Neem aan (inductiehypothese) dat voor een natuurlijk getal k geldt $k^2 + k$ even is. We bewijzen dan dat ook voor $k + 1$ geldt dat $(k + 1)^2 + (k + 1)$ even is. We berekenen

$$(k + 1)^2 + (k + 1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = (k^2 + k) + 2(k + 1).$$

  Duidelijk is dat $2(k + 1)$ even is. Wegens de inductiehypothese is ook $k^2 + k$ even, en dus is ook hun som $(k^2 + k) + 2(k + 1)$ even. Hiermee is de inductiestap bewezen.
- **Conclusie**: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, volgt met het principe van volledige inductie dat $n^2 + n$ een even getal is voor elke $n \in \mathbb{N}$.

■

Opmerking 1.5.2.

- deze eigenschap kan natuurlijk ook op andere manieren bewezen worden. Zo is $n^2 + n = n(n+1)$ het product van 2 opeenvolgende getallen en dus moet 1 van deze getallen even zijn. Bijgevolg is $n^2 + n$ even. Een alternatief eenvoudig bewijs maakt gebruik van gevalsonderscheid: elk getal n is even of n is oneven. Als n even is, dan is ook n^2 even, en dus ook $n^2 + n$ als som van twee even getallen. Als n oneven is, dan is ook n^2 oneven, en dus is $n^2 + n$ ook *even* als som van twee *oneven* getallen!
- dikwijls wordt ook in de inductiestap de letter n gebruikt. Dan zegt de inductiestap dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat $P(n)$ impliceert dat $P(n + 1)$. Dit dubbel gebruik van het symbool n leidt soms tot verwarring en is pas aan te raden als je voldoende vertrouwd bent met het principe van volledige inductie.
- als de eigenschap $P(n)$ enkel geldt voor alle $n \in \mathbb{N}_0$, dan wordt de basisstap: $P(1)$ is waar.
  Als de eigenschap $P(n)$ enkel geldt voor alle natuurlijke getallen strikt groter dan 5, dan wordt de basisstap: $P(6)$ is waar. De inductiestap kan dan ook telkens worden beperkt tot getallen groter dan de basisstap.

CC BY-NC-SA 4.0

1.5.B Bewijstechnieken: voorbeeld van volledige inductie

Bewijs volgende formule voor de som van de producten van telkens drie opeenvolgende getallen ($n \in \mathbb{N}_0$):

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

Bewijs Het bewijs gebruikt het principe van volledige inductie op n, het aantal termen in de som:

- **Basisstap**: We bewijzen de formule voor de kleinste n (in dit geval $n = 1$).

  Voor $n = 1$ wordt de formule $1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) = \frac{1}{4}(1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) \cdot (1+3))$.

  Deze formule is waar, want zowel linkerlid als het rechterlid zijn gelijk aan 6:

  $$1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$
  $$\frac{1}{4}(1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) \cdot 1 + 3) = \frac{1}{4}(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 6$$

- **Inductiestap**: We bewijzen dat zodra de formule geldt voor $n = p$, ze ook geldt voor $n = p+1$.

  Inductiehypothese: Neem aan dat de formule geldt voor een (willekeurig) getal $p \in \mathbb{N}_0$, dus dat

  $$\sum_{k=1}^{p} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}p(p+1)(p+2)(p+3)$$

  Te bewijzen in de inductiestap: We tonen aan dat de formule dan ook geldt voor $p+1$, dus dat

  $$\sum_{k=1}^{p+1} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)$$

  Bewijs van de inductiestap: We herschrijven het linkerlid tot we het rechterlid bekomen:

  $$\begin{aligned}
  \sum_{k=1}^{p+1} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^{p} k(k+1)(k+2) + (p+1)(p+2)(p+3) && \text{(laatste term afzonderen)} \\
  &= \frac{1}{4}p(p+1)(p+2)(p+3) + (p+1)(p+2)(p+3) && \text{(inductiehypothese)} \\
  &= (\frac{1}{4}p+1)(p+1)(p+2)(p+3) && \text{(gemeenschappelijke factoren)} \\
  &= \frac{1}{4}(p+4)(p+1)(p+2)(p+3) && \text{(factor } \tfrac{1}{4} \text{ buitenbrengen)} \\
  &= \frac{1}{4}(p+1)(p+2)(p+3)(p+4) && \text{(commutativiteit)}
  \end{aligned}$$

  Dit bewijst de inductiestap.

- **Conclusie**: Omdat hiermee zowel de basisstap als de inductiestap bewezen zijn, geldt de te bewijzen uitspraak voor elk strikt positief natuurlijk getal wegens het principe van volledige inductie.

■

Merk op: om vertrouwd te worden met de formule, kan je ze opschrijven voor enkele waarden van n:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 30$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 90$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 6 = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.5.C Bewijstechnieken: voorbeeld van volledige inductie

Bewijs volgende formule voor de som van kwadraten ($n \in \mathbb{N}$):

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Bewijs Het bewijs gebruikt het principe van volledige inductie op n, het aantal termen in de som:

- **Basisstap**: We bewijzen de formule voor de kleinste n (in dit geval $n = 0$).
  Voor $n = 0$ wordt het linkerlid van de formule 0 en is het rechterlid ook 0, de formule is dus zeker waar is voor $n = 0$.
- **Inductiestap**: We bewijzen dat zodra de formule geldt voor $n = p$, ze ook geldt voor $n = p + 1$.
  Inductiehypothese: Neem aan dat de formule geldt voor een (willekeurig) getal $p \in \mathbb{N}_0$, dus dat

  $$\sum_{k=0}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

  Te bewijzen in de inductiestap: We tonen aan dat de formule dan ook geldt voor $p + 1$, dus dat

  $$\sum_{k=0}^{p+1} k^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2(p+1)+1)}{6}$$

  Bewijs van de inductiestap: We herschrijven het linkerlid tot we het rechterlid bekomen:

  $$\begin{aligned}
  \sum_{k=0}^{p+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{p} k^2 + (p+1)^2 && \text{(laatste term afzonderen)} \\
  &= \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2 && \text{(inductiehypothese)} \\
  &= \frac{p(p+1)(2p+1) + 6(p+1)^2}{6} && \text{(gemeenschappelijke noemer)} \\
  &= \frac{(p+1)(2p^2+7p+6)}{6} \\
  &= \frac{(p+1)2(p+2)\left(p+\frac{3}{2}\right)}{6} && \text{(ontbinden)} \\
  &= \frac{(p+1)(p+2)(2(p+1)+1)}{6} && \text{(herschrijven)}
  \end{aligned}$$

  Dit bewijst de inductiestap.
- **Conclusie**: Omdat hiermee zowel de basisstap als de inductiestap bewezen zijn, geldt de te bewijzen uitspraak voor elk positief natuurlijk getal wegens het principe van volledige inductie.

■

Opmerking 1.5.3. Omdat de term voor $k = 0$ toch gelijk is aan 0, kan je de formule ook schrijven als

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.5.C Bewijstechnieken: voorbeeld van volledige inductie

De formule $\sum_{k=1}^{n} k^2$ heeft echter geen betekenis voor $n = 0$, en hier moet n dus strikt positief zijn (dus $n \in \mathbb{N}_0$).

Oefening 1.5.2. Bewijs volgende eigenschappen telkens door volledige inductie.

1. Voor elk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ geldt $0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Voor elk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ is $n(n^2 + 5)$ deelbaar door 6.

CC BY-NC-SA 4.0

1.5.D Het binomium van Newton

Stelling 1.5.3 (Het binomium van Newton)**.**

Voor reële getallen x en y en een strikt positief natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}_0$ geldt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Bewijs We bewijzen het binomium via inductie op n.

- **Basisstap**: We bewijzen de formule voor de kleinste n (in dit geval $n = 1$).
  Voor $n = 1$ wordt het linkerlid $(x+y)^1$, en dus $x+y$ en dat is inderdaad gelijk aan het rechterlid

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^k y^{1-k} = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^{1-1} = 1 \cdot y + 1 \cdot x = x + y$$

- **Inductiestap**: We bewijzen dat zodra de formule geldt voor $n = p$, ze ook geldt voor $n = p+1$.
  Inductiehypothese: Neem aan dat de formule geldt voor een (willekeurig) getal $p \in \mathbb{N}_0$, dus dat

$$(x+y)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k y^{p-k}$$

  Te bewijzen in de inductiestap: We tonen aan dat de formule dan ook geldt voor $p+1$, dus dat

$$(x+y)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} x^k y^{p+1-k}$$

  Bewijs van de inductiestap: We herschrijven het linkerlid tot we het rechterlid bekomen, en gebruiken daarbij één belangrijke eigenschap van de binomiaalcoëfficënten.

  (De kleuren proberen aan te geven welke termen of factoren er telkens wijzigen of bij elkaar horen.)

CC BY-NC-SA 4.0

1.5.D Het binomium van Newton

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{p+1} &= (x+y)(x+y)^p && \text{(rekenregel } a^{r+1} = a \cdot a^r\text{)}\\
&= x(x+y)^p + y(x+y)^p && \text{(distributiviteit)}\\
&= x\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^k y^{p-k} + y\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^k y^{p-k} && \text{(inductiehypothese)}\\
&= x\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^k y^{p-k} + y\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^k y^{p-k} && \text{(voorbereiden distributiviteit)}\\
&= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^{k+1} y^{p-k} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^{k+1} y^{p+1-k} && \text{(distributiviteit)}\\
&= \binom{p}{p}x^{p+1}y^0 + \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}x^{k+1}y^{p-k} + \\
&\qquad \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}x^k y^{p+1-k} + \binom{p}{0}x^0 y^{p+1} && \text{(uiterste termen afzonderen)}\\
&= x^{p+1} + \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}x^{k+1}y^{p-k} + \\
&\qquad \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}x^k y^{p+1-k} + y^{p+1} && \left(\binom{p}{p} = \binom{p}{0} = 1\right)\\
&= x^{p+1} + \sum_{l=1}^{p}\binom{p}{l-1}x^l y^{p+1-l} + && (k \text{ wordt } l-1)\\
&\qquad \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}x^k y^{p+1-k} + y^{p+1}\\
&= x^{p+1} + \sum_{l=1}^{p}\binom{p}{l-1}x^l y^{p+1-l} + \\
&\qquad \sum_{l=1}^{p}\binom{p}{l}x^l y^{p+1-l} + y^{p+1} && (k \text{ wordt } l)\\
&= x^{p+1} + \sum_{l=1}^{p}\binom{p}{l-1}x^l y^{p+1-l} + \\
&\qquad \sum_{l=1}^{p}\binom{p}{l}x^l y^{p+1-l} + y^{p+1} && \text{(voorbereiden één sommatie)}\\
&= x^{p+1} + \sum_{l=1}^{p}\left(\binom{p}{l-1} + \binom{p}{l}\right)x^l y^{p+1-l} + y^{p+1} && \text{(termen in één sommatie)}\\
&= 1x^{p+1} + \sum_{l=1}^{p}\binom{p+1}{l}x^l y^{p+1-l} + 1y^{p+1} && \left(\binom{p}{l-1} + \binom{p}{l} = \binom{p+1}{l}\right)\\
&= \binom{p+1}{p+1}x^{p+1}y^0 + \sum_{l=1}^{p}\binom{p+1}{l}x^l y^{p+1-l} + \\
&\qquad \binom{p+1}{0}x^0 y^{p+1} && \left(1 = \binom{p+1}{p+1} = \binom{p+1}{0}\right)\\
&= \sum_{l=0}^{p+1}\binom{p+1}{l}x^l y^{p+1-l} && \text{(uiterste termen in sommatie)}
\end{aligned}
$$

Dit bewijst de inductiestap.

- **Conclusie**: Omdat hiermee zowel de basisstap als de inductiestap bewezen zijn, geldt de te bewijzen uitspraak voor elk positief natuurlijk getal wegens het principe van volledige inductie.

■

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.7)

1.5.D Het binomium van Newton

We maakten in dit bewijs gebruik van enkele van volgende eigenschappen van binomiaalcoëfficiënten:

Eigenschap 1.5.2. Voor natuurlijke getallen p en l waarbij $l \leq p$ geldt dat

$$\binom{p}{0} = \binom{p}{p} = 1$$

$$\binom{p}{1} = \binom{p}{p-1} = p$$

$$\binom{p}{l} = \binom{p}{p-l}$$

$$\binom{p}{l-1} + \binom{p}{l} = \binom{p+1}{l}$$

Bewijs Het bewijs volgt telkens uit de definitie van de binomiaalcoëfficiënt, eigenschappen van de faculteit en het herschrijven van formules:

$$\binom{p}{0} = \frac{p!}{0! \cdot (p-0)!} = 1 \text{ en } \binom{p}{p} = \frac{p!}{p! \cdot (p-p)!} = 1$$

$$\binom{p}{1} = \frac{p!}{1! \cdot (p-1)!} = p \text{ en } \binom{p}{p-1} = \frac{p!}{(p-1)! \cdot (p-(p-1))!} = p$$

$$\binom{p}{l} = \frac{p!}{l!(p-l)!} = \binom{p}{p-l}$$

$$\binom{p}{l-1} + \binom{p}{l} = \frac{p!}{(l-1)!(p-l+1)!} + \frac{p!}{l!(p-l)!} = \frac{l \cdot p! + (p-l+1)p!}{l!(p-l+1)!} = \frac{(p+1)!}{l!((p+1)+l)!} = \binom{p+1}{l}$$

■

Opmerking 1.5.4. Het binomium van Newton is een veralgemening van het merkwaardig product $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ voor hogere machten.

CC BY-NC-SA 4.0

1.5.E Oefeningen inductie

Oefening 1.5.3. Welke van volgende eigenschappen lijken geschikt om te bewijzen door volledige inductie? Argumenteer. Als je denkt dat een bewijs door inductie mogelijk is, formuleer dan (zonder bewijs) de basis van de inductie, de inductiehypothese en de te bewijzen inductiestap.

1. Zij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de rij reële getallen met $a_1 = 1$ en $a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n}$ voor $n \in \mathbb{N}_0$. Dan geldt:

$$\text{voor alle } n \in \mathbb{N}_0 : \qquad a_n \leqslant a_{n+1}.$$

Uitwerking: Deze opgave lijkt geschikt voor een bewijs per inductie via
Basisstap: $a_1 \leqslant a_2$
Inductiestap: stel dat voor $k \in \mathbb{N}_0$ geldt dat $a_k \leqslant a_{k+1}$ (inductiehypothese), dan is te bewijzen dat $a_{k+1} \leqslant a_{k+2}$.

2. Voor alle reële getallen a, b, r geldt: als $r < 0$ en $a < b$ dan is $ra > rb$.

Uitwerking: Deze opgave lijkt niet geschikt voor een bewijs per inductie, want er komen geen natuurlijke getallen voor in de opgave, en het is ook niet onmiddellijk duidelijk hoe we natuurlijke getallen zouden kunnen introduceren. En voor *reële* getallen bestaat er *geen* gelijkaardig 'principe van volledige inductie'.

3. Elke eindige niet lege verzameling reële getallen heeft een minimum.

Uitwerking: Op het eerste zicht lijkt deze eigenschap over reële getallen te gaan, en zou een bewijs per inductie dus niet mogelijk zijn. In dit geval zijn er toch een natuurlijke getallen verstopt in de opgave: omdat de eigenschap gaat over *eindige* verzamelingen, kunnen we het aantal elementen n noemen, en dan is inductie op n toch mogelijk (en erg handig):
Basisstap: Een verzameling met slechts één element heeft een minimum.
Inductiestap: stel dat voor een zekere $k \in \mathbb{N}_0$ (de eigenschap geldt voor niet-lege verzamelingen!) geldt dat *elke* verzameling met k elementen een minimum heeft (inductiehypothese), dan heeft ook elke verzameling met $k+1$ elementen een minimum.

4. Een eindige verzameling met n elementen heeft 2^n deelverzamelingen.

Uitwerking: Hier ligt inductie op het aantal elementen n van de eindige verzameling voor de hand:
Basisstap: de lege verzameling heeft één deelverzameling (een verzameling met $n = 0$ elementen is leeg, en een lege verzameling heeft inderdaad één deelverzameling, namelijk de lege verzameling zelf!).
Inductiestap: stel dat voor $k \in \mathbb{N}$ geldt dat elke verzameling van k elementen precies 2^k deelverzamelingen heeft (inductiehypothese), dan is te bewijzen dat elke verzameling met $k+1$ elementen 2^{k+1} deelverzamelingen heeft.

5. (Enkel voor wie vertrouwd is met het begrip supremum) Het supremum van $\left\{ 4 - \frac{1}{x} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}_0^+ \right\}$ is 4.

Uitwerking: Dit lijkt niet meteen geschikt voor volledige inductie: het is een eigenschap over reële getallen en er is geen duidelijk verband met natuurlijke getallen. (Slimmerikken zouden kunnen proberen de eigenschap te veralgemenen tot 'het supremum van $\left\{ n - \frac{1}{x} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}_0^+ \right\}$ is n', en dan lijkt inductie op n wel mogelijk. Ze zouden echter vaststellen dat dit niet echt productief is om een bewijs te vinden.)

Oefening 1.5.4. Bewijs volgende eigenschappen telkens door volledige inductie.

1. Voor elk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ geldt $0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Voor elk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ is $n(n^2 + 5)$ deelbaar door 6.

CC BY-NC-SA 4.0

1.5.E Oefeningen inductie

3. Zoek een formule voor de n-de afgeleide van de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ en bewijs deze per inductie.

4. Stel $x \in \mathbb{R}$ en $x > -1$ dan geldt voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ $(1+x)^n \geqslant (1+nx)$

5. Voor elk natuurlijk getal $n \geq 4$ geldt $n^2 \leq 2^n$.

Uitwerking: We gebruiken volledige inductie.

- Basisstap: Voor $n = 4$ is $n^2 = 16$ en $2^n = 2^4 = 16$. Dus voor $n = 4$ geldt zeker $n^2 \leqslant 2^n$.
- Inductiestap: Neem aan dat $k^2 \leqslant 2^k$ voor een willekeurige $k \in \mathbb{N}$ met $k \geqslant 4$. Dan is $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geqslant 2k^2$ vanwege de inductiehypothese.
  Om te bewijzen dat $(k+1)^2 \leqslant 2^{k+1}$ volstaat het dus om te bewijzen dat $(k+1)^2 \leqslant 2k^2$. Nu komt $(k+1)^2 \leqslant 2k^2$ overeen met $2k^2 - (k+1)^2 \geqslant 0$ of dus $k^2 - 2k - 1 \geqslant 0$. Omdat $k \geqslant 4$ is $k^2 \geqslant 4k$. Dan is $k^2 - 2k \geqslant 2k$. Omdat $k \geqslant 4$ geldt $2k \geqslant 8$. Dus
  $$k^2 - 2k - 1 \geqslant 2k - 1 \geqslant 7 \geqslant 0.$$
  Hieruit volgt dat $(k+1)^2 \geqslant 2^{k+1}$ en dit bewijst de inductiestap.
- Conclusie: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, volgt met het principe van volledige inductie dat $n^2 \leqslant 2^n$ voor elke $n \geqslant 4$.

6. Voor elk natuurlijk getal $n \geq 5$ geldt $n^2 < 2^n$.

Uitwerking: We gebruiken volledige inductie op n.

- Basisstap: Voor $n = 5$ is $n^2 = 25$ en $2^n = 2^5 = 32$. Dus voor $n = 5$ geldt zeker $n^2 < 2^n$.
- Inductiestap: Neem aan dat $k^2 < 2^k$ voor een willekeurige $k \in \mathbb{N}$ met $k \geqslant 5$. Dan is $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2$ vanwege de inductiehypothese.
  Om te bewijzen dat $(k+1)^2 < 2^{k+1}$ volstaat het dus om te bewijzen dat $(k+1)^2 \leqslant 2k^2$. Nu komt $(k+1)^2 \leqslant 2k^2$ overeen met $2k^2 - (k+1)^2 \geqslant 0$ of dus $k^2 - 2k - 1 \geqslant 0$. Omdat $k \geqslant 4$ is $k^2 \geqslant 4k$. Dan is $k^2 - 2k \geqslant 2k$. Omdat $k \geqslant 5$ geldt $2k \geqslant 10$. Dus
  $$k^2 - 2k - 1 \geqslant 2k - 1 \geqslant 9 > 0.$$
  Hieruit volgt dat $(k+1)^2 > 2^{k+1}$ en dit bewijst de inductiestap.
- Conclusie: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, volgt met het principe van volledige inductie dat $n^2 < 2^n$ voor elke $n \geq 5$.

Oefening 1.5.5. Bewijzen per inductie vereisen de nodige voorzichtigheid, zoals uit volgende opgaven blijkt.

1. Toon aan dat de *basisstap* in een bewijs per inductie erg belangrijk is, door de inductiestap te bewijzen voor de duidelijk foutieve eigenschap

$$\text{voor elk natuurlijk getal } n : n = n + 1$$

2. Vind de fout in volgend bewijs (als er een fout is) van volgende belangwekkende eigenschap die het belang van goede vriendschappen aantoont:

Als in een groepje eerste bachelorstudenten minstens één student slaagt,
dan slaagt iedereen van dat groepje.

We bewijzen de stelling via inductie op het aantal studenten in het groepje.

- Basisstap: De eigenschap geldt duidelijk voor een groepje met één student.

CC BY-NC-SA 4.0

1.5.E Oefeningen inductie

- Inductiestap: We veronderstellen dat de eigenschap bewezen is voor elk groepje van $k \in \mathbb{N}_0$ studenten en tonen de eigenschap nu aan voor een groep met $k+1$ studenten.

  Zij A een groepje van $k+1$ studenten waarvan minsten één student geslaagd is. We verwijderen uit die groep één student (en niet diegene waarvan geweten is dat hij geslaagd is). De overblijvende groep A' telt k studenten, waarvan dus nog steeds minstens één geslaagd is. We passen de inductiehypothese toe op deze groep A' van k studenten en mogen dus besluiten dat elke student uit A' geslaagd is.

  Blijft natuurlijk nog aan te tonen dat ook de verwijderde student geslaagd is. Dit is echter eenvoudig: beschouw een nieuwe groep A'' van k studenten die je maakt door de verwijderde student samen te nemen met $k-1$ (geslaagde) studenten uit groep A'. A'' bevat k studenten waarvan er minstens één geslaagd is (er zijn er immers wel zeker $k-1$ geslaagd!).

  A'' voldoet aan de voorwaarden van de inductiehypothese, we mogen dus besluiten dat alle studenten uit groep A'' geslaagd zijn. M.a.w alle studenten uit de oorspronkelijke groep A zijn geslaagd. Hiermee is de inductiestap bewezen.

- Conclusie: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, volgt met het principe van volledige inductie dat als in een groep eerste bachelorstudenten minstens één student slaagt, ze allemaal slagen in dat groepje.

Extra opgave voor wie geen fout vindt: bewijs op volledig gelijkaardige wijze volgende even spectaculaire stellingen:

- Als in een groep eerste bachelorstudenten minstens één student niet slaagt, dan slaagt niemand in dat groepje.
- Als in een Westvlaamse wei minstens één paard zwart is, dan zijn automatisch alle paarden in die wei zwart.
- Als in een klas minstens één jongen zit, bestaat de klas volledig uit jongens.
- Als in een klas minstens één meisje zit, bestaat de klas volledig uit meisjes.

CC BY-NC-SA 4.0