KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Xoverzicht: Limieten

(Versie 2026/10/26.3)

Inhoudsopgave

1.1 Definitie limieten

Functies zoals $x \mapsto \frac{1}{x}$ of $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ zijn niet gedefinieerd in $x = 0$ maar bestaan wel *in de buurt* van $x = 0$.

Met het begrip *limiet van een functie* $x \mapsto f(x)$ *als* x *naar* 0 *gaat* kan in goede gevallen het gedrag van f rond 0 worden weergegeven. We geven hier enkel een eerder informele definitie, bepalen dan enkele basislimieten en beschrijven daarna hoe met rekenregels vanaf die basislimieten ingewikkeldere limieten kunnen worden bepaald. Limieten worden gebruikt bij integralen en afgeleiden, maar ook bij asymptoten en het bestuderen van het verloop van functies.

Voorbeeld 1.1.1. De functie $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ heeft volgende grafiek en functietabel:



$y = \frac{1}{x^2}$	0	$\downarrow$	0.01	1	100	$\uparrow$	$+\infty$	$\uparrow$	100	1	0.01	$\downarrow$	0
x	$-\infty$	$\leftarrow$	-10	-1	-0.1	$\rightarrow$	0	$\leftarrow$	0.1	1	10	$\rightarrow$	$+\infty$

Voor $x = 0$ is de functiewaarde $1/x^2$ niet gedefinieerd, maar zowel uit de grafiek als uit de tabel blijkt dat *in de buurt van* $x = 0$ *de functiewaarden steeds groter* worden.

Dat *alle* functiewaarden *onbeperkt groter* worden naarmate x dichter bij $x = 0$ komt noteren we als

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \text{of} \quad \frac{1}{x^2} \to +\infty \text{ als } x \to 0$$

en we zeggen:

- de **limiet** van de functie $x \mapsto 1/x^2$ als x naar 0 gaat is **plus oneindig** of
- de functie $x \mapsto 1/x^2$ **gaat naar** plus oneindig als x naar nul **gaat**, of
- de functie $x \mapsto 1/x^2$ **wordt** plus oneindig als x nul **wordt**.

We voeren daarbij dus zowel het begrip 'limiet' als het begrip 'plus oneindig' $(+\infty)$ in.

Als x steeds *groter* wordt, dan komen de functiewaarden $1/x^2$ willekeurig dicht bij nul te liggen. Dat alle functiewaarden willekeurig dicht bij nul komen naarmate x groter wordt noteren we als

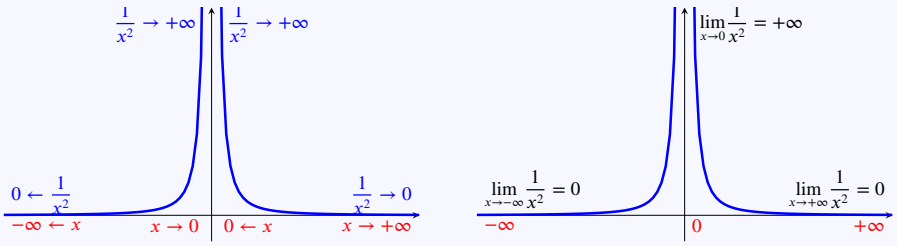
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{of} \quad \frac{1}{x^2} \to 0 \text{ als } x \to +\infty$$

en we zeggen:

- de **limiet** van de functie $x \mapsto 1/x^2$ als x naar $+\infty$ gaat is 0.

Hetzelfde gebeurt als x erg negatief wordt: $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

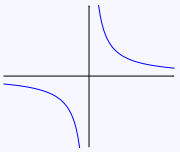
De situatie wordt verduidelijkt op volgende tekening:



CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Definitie limieten

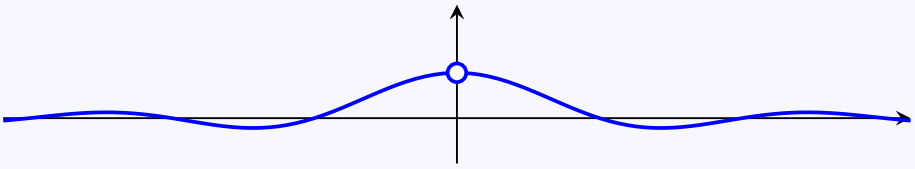
Voorbeeld 1.1.2. De functie $x \mapsto \frac{1}{x}$ heeft volgende grafiek en functietabel:



$y = \frac{1}{x}$	0	↓	−0.1	1	−10	↓	$-\infty \neq +\infty$	↑	10	1	0.1	↓	0
x	$-\infty$	←	−10	−1	−0.1	→	0	←	0.1	1	10	→	$+\infty$

Voor $x = 0$ is de functiewaarde $1/x$ niet gedefinieerd, en zowel uit de grafiek als uit de tabel blijkt dat *in de buurt van* $x = 0$ de functiewaarden steeds *groter* worden voor positieve x, maar dat ze steeds *kleiner* worden voor negatieve x. We zeggen in dat geval dat de limiet van de functie $x \mapsto \frac{1}{x}$ als $x \to 0$ *niet bestaat*. In dit geval kunnen de begrippen *linkerlimiet* en *rechterlimiet* voor 'naderen langs links' of 'naderen langs rechts' de situatie beschrijven.

Voorbeeld 1.1.3. De functie $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ heeft volgende grafiek en functietabel:



x	$\frac{\sin x}{x}$
0	niet gedefinieerd
0.01	0.999983
0.1	0.998334
1	0.841470
10	−0.054402
100	−0.005063

Voor $x = 0$ is de functiewaarde $\frac{\sin x}{x}$ niet gedefinieerd, maar zowel uit de grafiek als uit de tabel blijkt dat in de buurt van $x = 0$ de functiewaarden *willekeurig dicht* bij 1 komen te liggen.

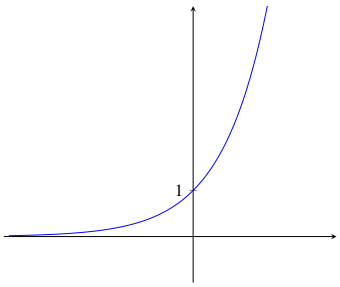
Dat alle functiewaarden willekeurig dicht bij één komen naarmate x dichter bij nul ligt noteren we als

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

en we zeggen: de *limiet* van de functie $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ als x naar 0 gaat is 1.

Op dezelfde manier blijkt dat $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ en ook $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Oefening 1.1.1. Lees de volgende limieten af op de grafiek.



CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Definitie limieten

1. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Feedback: $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ want als x groter wordt, wordt ook e^x steeds groter.

2. $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

Feedback: $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ want als x kleiner wordt, ligt e^x steeds dichter bij 0.

3. $\lim_{x\to0} e^x = 1$

Feedback: $e^0 = 1$, je kan hier de waarde $x = 0$ gewoon invullen in het functievoorschrift e^x.

Limieten zijn vooral nuttig om het gedrag van functies te bestuderen op de grens (of de 'limiet') van hun domein. Dat kunnen bijvoorbeeld geïsoleerde punten zijn waar de functie niet gedefinieerd is zoals nulpunten van de noemer, maar dankzij de begrippen $+\infty$ en $-\infty$ werkt het ook voor 'heel erg grote waarden' van x. Het blijkt dat het begrip ook werkt voor punten die tot het domein zelf behoren.

Een formele wiskundige definitie van het begrip limiet is enigszins ingewikkeld, en we beperken ons hier tot volgende pseudo-definitie:

Definitie 1.1.1 (Intuïtieve pseudo-definitie van limiet)**.** Voor een reële functie f en voor L en c telkens ofwel een reëel getal ofwel één van de symbolen $+\infty$ of $-\infty$, zeggen en schrijven we dat

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} f(x) = L \quad &\iff \text{de } \textbf{limiet} \text{ van } f \text{ in } c \text{ is gelijk aan } L \\
&\iff \text{de limiet van } f \text{ als } x \text{ naar } c \text{ gaat is gelijk aan } L \\
&\iff \text{als } x \text{ naar } c \text{ gaat, dan gaat } f(x) \text{ naar } L \\
&\iff \text{als } x \to c, \text{ dan } f(x) \to L \\
&\iff \text{voor alle } x\text{-waarden erg dicht bij } c \text{ liggen de functiewaarden } f(x) \text{ zeer dicht bij } L.
\end{aligned}$$

Niet voor alle functies f en alle getallen c bestaat de limiet $\lim_{x\to c} f(x)$.

In eenvoudige gevallen zijn limieten dus uitdrukkingen zoals $\lim_{x\to2}(x+3) = 5$. Door ook de symbolen $+\infty$ en $-\infty$ toe te laten kunnen we echter ineens ook beschrijven wat er gebeurt als de variabele x groot wordt, zoals bij $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ of als de functiewaarden groot worden, zoals bij $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Als de functiewaarden niet naar één vaste waarde gaan, dan bestaat de limiet niet. Voor $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}$ worden de functiewaarden erg groot voor grote positieve x, maar ze zijn negatief voor negatieve x.
Als een functie niet gedefinieerd is in de buurt van c is het onmogelijk functiewaarden te berekenen als x naar c gaat. Dan bestaat de limiet niet, zoals bijvoorbeeld voor $\lim_{x\to-5} \sqrt{x}$, $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x}$ of $\lim_{x\to-\infty} \ln x$.

Opmerking 1.1.1.

- In de definitie van $\lim_{x\to c} f(x)$ heeft de waarde $f(c)$ van f in c – als die al bestaat – geen enkel belang : enkel de waarden van f *in de buurt van* c bepalen de limiet.
  We zullen verder wel zien dat zodra f *continu* is in c geldt dat $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.
- In de uitdrukking $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ligt c op de x-as (het domein van f), en de limiet L op de y-as.
- Het symbool ∞ voor 'oneindig' is voorlopig enkel een notatie voor 'wordt willekeurig groot'.

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Definitie limieten

Verder zal met rekenregels de betekenis van $+\infty$ en $-\infty$ concreter worden vastgelegd.

- Let op: $x < c$ is hetzelfde als $c > x$. *Zowel* de tekens $<$ en $>$ *als* de volgorde zijn belangrijk.
- Het lezen van $x \to c$ als 'x gaat naar c' geeft een zeker dynamisch aspect: x wordt verondersteld te 'bewegen' naar iets. Het is belangrijk te beseffen dat het resultaat of de 'uitkomst' van zo'n limiet, dus datgene wat met het symbool $\lim_{x\to c} f(x)$ wordt aangeduid, gewoon een bepaald getal is of het symbool $\pm\infty$.
- De uitdrukking 'de limiet $\lim_{x\to c} f(x)$ bestaat' wordt in de wiskunde in twee mogelijke betekenissen gebruikt: soms bedoelt men 'de limiet bestaat en is eindig', maar soms bedoelt men ook 'de limiet bestaat maar is eventueel $\pm\infty$'. In deze cursus gebruiken we de tweede optie.
- De limiet van f als x gaat naar c is enkel bepaald als f gedefinieerd is in de buurt van c, zoals meestal het geval is bij punten of randpunten van het domein van f. Zo kunnen we spreken van de limiet van $f(x) = \sqrt{x}$ in de punten 1 en π en 81 (punten van het domein), of in 0 of $+\infty$ (punten 'op de rand van het domein'), maar de limiet in de punten -1 en -314 heeft *geen* betekenis want het is niet mogelijk om $\sqrt{x}$ te bepalen als x gaat naar -1. Ook de limieten $\lim_{x\to-\infty} \ln x$ en $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x}$ bestaan niet.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Definitie limieten

Met het begrip *limiet* introduceren we een wiskundige techniek om in bepaalde gevallen 'over oneindig veel tussenstapjes' te kunnen springen, recht op het doel. Als we de rij getallen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ bekijken, zullen we zeggen dat die rij'in de limiet' nul wordt.

We geven enkele voorbeelden en een intuïtieve definitie van limieten van *functies*. Daarmee bepalen we limieten van enkele eenvoudige functies, en daarna leren we om met wiskundig exacte rekenregels vanaf die basislimieten ingewikkeldere limieten te berekenen.

Limieten worden in de wiskunde gebruikt bij integralen en afgeleiden, maar ook bij asymptoten en het bestuderen van het verloop van functies. Een belangrijke uitdaging bij het studeren van limieten bestaat er in een correcte intuïtie te ontwikkelen voor het begrip, dat veel subtieler is dan op het eerste zicht lijkt. Die intuïtie wordt geleid en ondersteund door enkele wiskundige technieken en rekenregels.

inline] limieten: epsilon-delta definitie ? inline] limieten: goed voorbeeldje vinden 'interesse net op de rand'

Voorbeeld 1.2.1 (Inleidend voorbeeld: hoeveel is $0{,}999\ldots$)**.**

Iedereen weet dat $1 - 1 = 0$. Maar hoeveel is

$$1 - 0,999\ldots = ?$$

Dat moet waarschijnlijk erg dicht in de buurt van 0 liggen. Om het verschil uit te rekenen proberen we zo goed mogelijk te begrijpen wat het reële getal $0,999\ldots$ precies is.

We beschouwen daarvoor de rij rationale getallen

$$0,9 \quad 0,99 \quad 0,999 \quad 0,9999 \quad 0,99999 \quad \ldots$$

Het (reële) getal $0,999\ldots$ is 'de limiet' van die rij rationale getallen.

Sommigen denken dat er een 'oneindig klein' verschil is tussen 1 en $0,9999\ldots$. De verschillen zijn

$$0,1 \quad 0,01 \quad 0,001 \quad 0,0001 \quad \ldots$$

We kunnen deze rij ook schrijven als

$$1/10 \quad 1/100 \quad 1/1000 \quad 1/10000 \quad \ldots$$

of

$$1/10 \quad 1/10^2 \quad 1/10^3 \quad 1/10^4 \quad \ldots$$

of nog

$$(1/10^n) \quad \text{met } n = 1, 2, 3\ldots$$

We *noteren* de limiet van die rij met

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n}$$

Het lijkt intuïtief aannemelijk dat de getallen $1/10^n$ 'in de limiet' gelijk worden aan 0: de termen worden willekeurig klein, of – hetzelfde anders gezegd – ze komen willekeurig dicht bij 0 te liggen.

We zullen verder zien dat die limiet inderdaad 0 is. Daaruit volgt dan redelijkerwijze dat

$$0,999\ldots = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{10^n}) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 1 - 0 = 1$$

en dus dat

$$0,999\ldots = 1$$

Dit kan sommigen terecht verwonderen. Het is ook enigszins verdacht, want het impliceert dat de schrijfwijze van reële getallen *niet* uniek is. Inderdaad, we kunnen het getal 1 blijkbaar op twee erg verschillende manieren schrijven, namelijk als 1 en als $0,999\ldots$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Definitie limieten

Het is ieder geval ook zonder limieten makkelijk te bewijzen dat inderdaad $0,999\ldots = 1$:

Bewijs 1:

$$\begin{aligned} \text{We weten dat} \quad & 1/3 = 0,333\ldots \\ \text{en dus} \quad & 3 \cdot 1/3 = 3 \cdot 0,333 \quad \text{(gelijkheid vermenigvuldigen met 3)} \\ \text{en dus} \quad & 1 = 0,999\ldots \end{aligned}$$

Bewijs 2: Stel $a = 0,999\ldots$. Dan volstaat het te bewijzen dat (ook) geldt dat $a = 1$.

$$\begin{aligned} 0,999\ldots &= a \\ 9,999\ldots &= 10a && \text{(vermenigvuldigen met 10)} \\ 9,999\ldots - 0,999\ldots &= 10a - a && \text{(rij 2 min rij 1)} \\ 9 &= 9a && \text{(rekenen)} \\ 1 &= a && \text{(delen door 9)} \end{aligned}$$

We beperken ons tot volgende notatie en (pseudo-)definitie in verband met het begrip limiet:

Definitie 1.2.1 (Intuïtieve pseudo-definitie van limiet)**.** Zij f een reële functie, en a en c telkens ofwel een reëel getal, ofwel één van de symbolen $+\infty$ of $-\infty$. Dan zeggen en schrijven we dat

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c} f(x) = a \quad &\iff \text{de limiet van } f \text{ als } x \text{ naar } c \text{ gaat is gelijk aan } a \\ &\iff \text{als } x \to c, \text{ dan } f(x) \to a \end{aligned}$$

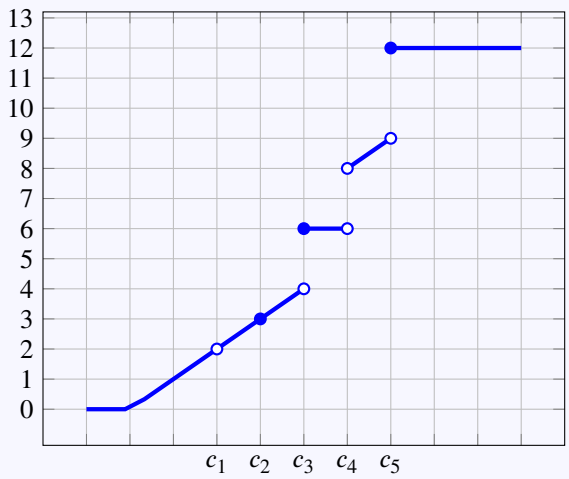
$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to c \\ <}} f(x) = a \quad &\iff \text{de linkerlimiet van } f \text{ als } x \text{ naar } c \text{ gaat is gelijk aan } a \\ &\iff \text{de limiet van } f \text{ als } x \text{ langs links naar } c \text{ gaat is gelijk aan } a \\ &\iff \text{als } x \to c \textbf{ langs links } (\text{dus } x < c), \text{ dan } f(x) \to a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to c \\ >}} f(x) = a \quad &\iff \text{de rechterlimiet van } f \text{ als } x \text{ naar } c \text{ gaat is gelijk aan } a \\ &\iff \text{de limiet van } f \text{ als } x \text{ langs rechts naar } c \text{ gaat is gelijk aan } a \\ &\iff \text{als } x \to c \textbf{ langs rechts } (\text{dus } x > c), \text{ dan } f(x) \to a \end{aligned}$$

Voorbeeld 1.2.2 (Basisvoorbeelden)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Definitie limieten



Deze functie is niet gedefinieerd in de punten c_1 en c_4, en is niet continue in c_3, c_4 en c_5.

We hebben volgende limieten in de punten c_i:

c_1	$\lim\limits_{\substack{x\to c_1\\<}} f(x) = 2$	$\lim\limits_{\substack{x\to c_1\\>}} f(x) = 2$	$\lim\limits_{x\to c_1} f(x) = 2$
c_2	$\lim\limits_{\substack{x\to c_2\\<}} f(x) = 3$	$\lim\limits_{\substack{x\to c_2\\>}} f(x) = 3$	$\lim\limits_{x\to c_2} f(x) = 3$
c_3	$\lim\limits_{\substack{x\to c_3\\<}} f(x) = 4$	$\lim\limits_{\substack{x\to c_3\\>}} f(x) = 5$	$\lim\limits_{x\to c_3} f(x)$ bestaat niet
c_4	$\lim\limits_{\substack{x\to c_4\\<}} f(x) = 6$	$\lim\limits_{\substack{x\to c_4\\>}} f(x) = 8$	$\lim\limits_{x\to c_4} f(x)$ bestaat niet
c_5	$\lim\limits_{\substack{x\to c_5\\<}} f(x) = 9$	$\lim\limits_{\substack{x\to c_5\\>}} f(x) = 12$	$\lim\limits_{x\to c_5} f(x)$ bestaat niet

Opmerking 1.2.1.

- Als we de uitdrukking $a = \lim\limits_{x\to c} f(x)$ samen met de grafiek van f bekijken, dan bevindt c zich op de x-as (het domein van f), en bevindt a (en dus de limiet zelf) zich op de y-as (het codomein van f).
- Afhankelijk of a en/of c eindig of oneindig zijn doen zich verschillende gevallen voor:
  - c eindig, a eindig: er is hoogstens een opening in de grafiek van f boven c
  - c eindig, a oneindig: f heeft een vertikale asymptoot in c
  - c oneindig, a eindig: f heeft een horizontale asymptoot
  - c oneindig, a oneindig: f heeft mogelijk een schuine asymptoot
- Uit deze definitie volgt dat de limiet bestaat als en slechts als zowel de linker- als de rechterlimiet bestaan en beide aan elkaar gelijk zijn. Dus:

$$\lim_{x\to c} f(x) = a \iff \lim_{\substack{x\to c\\<}} f(x) = a \text{ en } \lim_{\substack{x\to c\\>}} f(x) = a$$

- Het symbool ∞ betekent voorlopig dus enkel 'wordt willekeurig groot', en $-\infty$ betekent 'wordt willekeurig klein'. We lezen die symbolen als 'plus oneindig' en 'min oneindig', en geven verder enkele rekenregels die de betekenis van de beide symbolen verder zullen vastleggen.
- Let op: $x < c$ is hetzelfde als $c > x$. *Zowel* de tekens $<, >$ *als* de volgorde is belangrijk!

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Definitie limieten

- Als we $x \to c$ lezen als 'x gaat naar c' of 'x ligt (erg) dicht bij c', dan heeft dat een zeker dynamisch aspect: x wordt verondersteld te 'bewegen' naar iets. Het is belangrijk te beseffen dat het resultaat, of de 'uitkomst' van zo'n limiet, dus datgene wat met het symbool $\lim_{x\to c} f(x)$ wordt aangeduid, gewoon een bepaald getal is of het symbool $\pm\infty$. Daar is dus niets 'bewegends' of 'mysterieus' aan! Zo verandert het feit dat $1 = 0,999\ldots$ de betekenis van het getal 1 zelf natuurlijk niet.
- De uitdrukking 'de limiet $\lim_{x\to c} f(x)$ bestaat' wordt in de literatuur in twee mogelijke betekenissen gebruikt: soms bedoelt men 'de limiet bestaat en is eindig', maar soms bedoelt men ook 'de limiet bestaat maar is eventueel $\pm\infty$'. In deze cursus gebruiken we de tweede optie.
- Uitweiding: De pseudo-definitie is bewust enigszins vaag over welke waarden c precies mag aannemen. In deze cursus beperken we ons tot 'punten of randpunten van het domein van f. Dus, we kunnen spreken van de limiet van $f(x) = \sqrt{x}$ in de punten 1 en π en 81 (punten van het domein), of in 0 of $+\infty$ (punten 'op de rand van het domein'), maar de limiet in de punten -1, -314 en $-\infty$ heeft *geen* betekenis. Merk ook op dat de waarde van $f(c)$ (als die bestaat) geen belang heeft bij het bepalen van $\lim_{x\to c} f(x)$: enkel de waarden van f *in de buurt van* c bepalen de limiet! Het is een eigenschap (of zelfs een definitie!) van continue functies dat hun functiewaarden overal gelijk zijn aan hun limieten.
- Uitbreiding: in de vlakke meetkunde gebruiken we ook het symbool ∞, maar daar maken we typisch geen onderscheid tussen $+\infty$ en $-\infty$. Zie aldaar voor een bijzonder fascinerende uitleg daarover.

In deze cursus berekenen we limieten op volgende manieren:

Eigenschap 1.2.1 (Berekeningswijze limieten)**.** Limieten kunnen op volgende wijze worden bepaald:

(a) enkele basislimieten lezen we af op een *grafiek*

(b) voor ingewikkeldere functies gebruiken we betrouwbare *rekenregels*

Volgende *basislimieten* van de functies $x \mapsto x, x \mapsto \frac{1}{x}, x \mapsto e^x$ en $x \mapsto \ln x$ lezen we op hun grafieken:

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

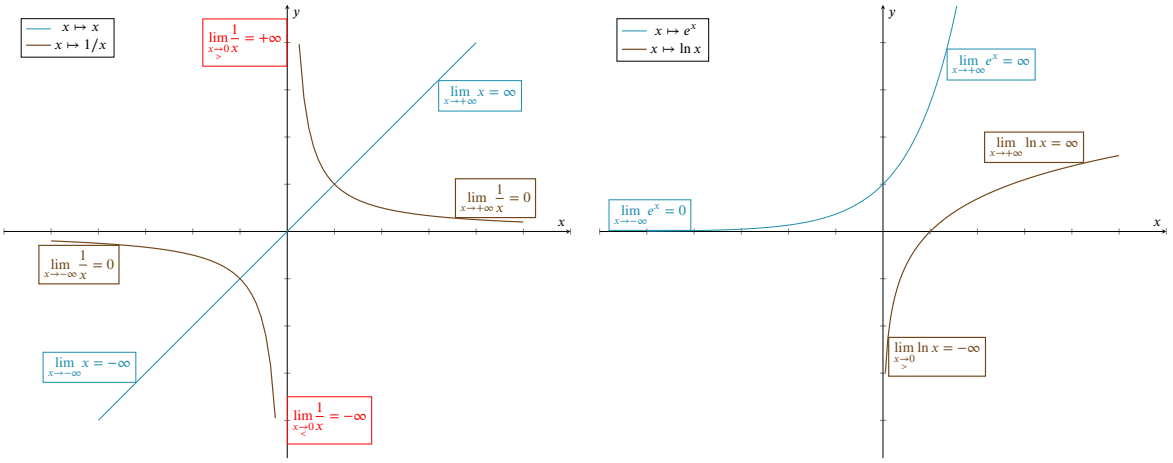
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \ln x \text{ bestaat niet} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \ln x \text{ bestaat niet}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Definitie limieten



Opmerking 1.2.2.

(a) Let op: het *berekenen* van een limiet op basis van een grafiek werkt enkel als de grafiek betrouwbaar is. In deze cursus gebruiken we de methode *enkel* voor bovenstaande basislimieten. In die gevallen kan men ook bewijzen dat de limieten wiskundig exact zijn.

(b) Let op: het *aflezen* van een limiet op een (betrouwbare) grafiek is een belangrijke vaardigheid. *Als* je een betrouwbare grafiek krijgt, moet je snel de relevante limieten kunnen aflezen.

(c) Let op: je kan dikwijls ook een limiet bepalen door enkele waarden te berekenen 'in de buurt', zoals bijvoorbeeld voor $\frac{\sin(0,01)}{0,01} = 0,999983\ldots$ waaruit zou kunnen blijken dat dus allicht $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Maar soms zijn berekeningen erg misleidend of volledig foutief. Zie bijvoorbeeld hieronder voor $\lim_{x \to 0} \sin(1/x)$.

(d) Let op: als een functie niet gedefinieerd is in een bepaalde omgeving, kunnen we daar ook geen zinvolle definitie geven van een *limiet* van die functie. Zo zijn bijvoorbeeld de limieten $\lim_{x \to -\infty} \ln x$ en $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x}$ duidelijk niet te bepalen. Maar, om technische redenen spreken we af dat strict wiskundig ook de limieten $\lim_{x \to 0} \ln x$ en $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$ niet bestaan (want enkel de *rechter*limiet in 0 heeft een betekenis voor deze functies).

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.3)

1.3 Rekenregels voor plus en min oneindig

Het concept *oneindig* heeft altijd al mensen gefascineerd, maar dikwijls ook misleid en afgeschrikt. Dat was zo bij de oude Grieken, en dat is nu nog steeds zo in wiskundelessen in België.

Hoewel de wiskunde nog lang niet alle problemen rond het begrip oneindig heeft opgelost, is men er toch in geslaagd om in de context van bijvoorbeeld continu veranderende processen enkele eenvoudige maar erg krachtige rekenregels op te stellen waardoor we –weliswaar met enkele belangrijke beperkingen– kunnen rekenen met oneindig zoals we rekenen met gewone getallen.

Voor ∞ gelden *bijna alle* vertrouwde rekenregels. Volgende eigenschappen van het symbool ∞ zijn volledig natuurlijk, en de moeite van het onthouden niet waard. Je moet alleen erg goed opletten voor de enkele regels die ontbreken. Men heeft aangetoond dat je niet in contradicties of andere logische problemen kan komen zolang je de ontbrekende regels niet gebruikt:

Eigenschap 1.3.1. Met het symbool ∞ voor **oneindig** kan en mag je rekenen als volgt, met $a \in \mathbb{R}$:

Teken is optioneel:		$\infty = +\infty$
Tegengestelde:		$-(+\infty) = -\infty$ $-(-\infty) = +\infty$
Orde :		$-\infty < a < +\infty$
Som :		$\infty + a = \infty$ $-\infty + a = -\infty$
		$\infty + \infty = \infty$
Product :	$a > 0$ $a < 0$	$a \cdot \infty = \infty$ $a \cdot \infty = -\infty$
		$\infty \cdot \infty = \infty$
Quotiënt :		$\frac{a}{\infty} = 0$

Merk op dat de uitdrukkingen $\infty - \infty$ en $0 \cdot \infty$ *niet* voorkomen in bovenstaande lijst.

Het allerbelangrijkste in bovenstaande eigenschap is wat er *niet* staat, dus de enkele gevallen waarvoor de regels *niet gelden*. Dat zijn de zogenaamde *onbepaalde vormen* die je nooit zomaar kan uitrekenen. Maar bij het bestuderen van limieten zal je leren in vele concrete gevallen toch een waarde te bepalen voor de onbepaalde vormen.

Omwille van het grote belang herhalen we ze hier. Het is belangrijk de onbepaalde vormen onmiddellijk te herkennen. Je leert ze dus vanbuiten.

Eigenschap 1.3.2. Volgende **onbepaalde vormen** of **onbepaaldheden** hebben *geen betekenis*:

$\infty - \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$0 \cdot \infty$
oneindig min oneindig	oneindig gedeeld door oneindig	nul gedeeld door nul	nul maal oneindig

Ook $\frac{a}{0}$, delen door nul, blijft verboden.

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Rekenregels voor plus en min oneindig

En ook 0^0, ∞^0 en 1^∞ zijn onbepaald, omdat ze via de gelijkheid $x = e^{\ln x}$ neerkomen op $\infty - \infty$.

Opmerking 1.3.1.

De verzameling $\overline{\mathbb{R}}$ van de **uitgebreide reële getallen** bevat alle reële getallen en de twee symbolen $+\infty$ en $-\infty$, dus $\overline{\mathbb{R}} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. De notatie $\overline{\mathbb{R}}$ wordt verder niet gebruikt in deze cursus.

Voorbeeld 1.3.1.

1. $1000 + \infty = +\infty$
2. $2\infty + 10 + \infty = +\infty$
3. $2\infty - \infty =$ onbepaald
4. $\infty \cdot (-2) = -\infty$
5. $\dfrac{1}{\infty} = 0$
6. $\dfrac{\infty}{2} = +\infty$

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Rekenregels limieten

In de praktijk worden limieten berekend met volgende rekenregels:

de limiet van een	som	is de	som	van de limieten tenzij je een onbepaalde vorm krijgt,
de limiet van een	verschil	is het	verschil	van de limieten tenzij je een onbepaalde vorm krijgt,
de limiet van een	product	is het	product	van de limieten tenzij je een onbepaalde vorm krijgt,
de limiet van een	quotiënt	is het	quotiënt	van de limieten tenzij je een onbepaalde vorm krijgt.

De beperking in verband met onbepaalde vormen is erg belangrijk, zoals blijkt uit volgend voorbeeld.

Voorbeeld 1.4.1 (Is de limiet van de som altijd gelijk aan de som van de limieten?)**.**

Beschouw de functies $f : x \mapsto x$ en $g : x \mapsto a - x$, met $a \in \mathbb{R}$. Dan is $f(x) + g(x) = x + (a - x) = a$ en kennen we volgende limieten op basis van de grafieken van deze eenvoudige functies:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (a - x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \big(g(x) + f(x)\big) = \lim_{x\to+\infty} a = a$$

Stel dat volgende regel zou gelden

$$\lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to c} \big(f(x) + g(x)\big).$$

Omdat $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ en $\lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} a = a$ zou dan

$$(+\infty) + (-\infty) \stackrel{?}{=} a$$

Maar a kan hierbij *willekeurig* gekozen worden: voor a kan je even goed 0 kiezen als 2 of $2\pi/3$ .... We noemen daarom $(+\infty) + (-\infty)$ een onbepaaldheid of een onbepaalde vorm.

De regel dat de limiet van een som de som is van de limieten, $\lim_{x\to c} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$, geldt enkel wanneer $\lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$ *geen onbepaaldheid oplevert*.

De rekenregels voor $\pm\infty$ zijn zodanig opgesteld dat volgende rekenregels voor limieten zouden gelden. Ook als een limiet $+\infty$ of $-\infty$ is zeggen we dat deze limiet **bestaat**.

Eigenschap 1.4.1 (Rekenregels limieten)**.**

Voor continue functies f, g waarvoor de limieten $\lim_{x\to c} f(x)$ en $\lim_{x\to c} g(x)$ bestaan,

gelden volgende (reken-)regels **tenzij ze een onbepaaldheid geven**:

$$\lim_{x\to c} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) \qquad \lim(\text{som}) = \text{som}(\lim s)$$
$$\lim_{x\to c} \big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) \qquad \lim(\text{verschil}) = \text{verschil}(\lim s))$$
$$\lim_{x\to c} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) \qquad \lim(\text{product}) = \text{product}(\lim s)$$
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} \qquad \lim(\text{quotient}) = \text{quotient}(\lim s)$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Rekenregels limieten

Voorbeeld 1.4.2.

1. $\lim_{x\to 1}(x^2+x) = \lim_{x\to 1}x^2 + \lim_{x\to 1}x = 1+1 = 2$
2. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-3\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} - \lim_{x\to+\infty}3 = 0-3 = -3$
3. $\lim_{x\to 1}\left((x^2+x)\cdot\left(\frac{1}{x}-3\right)\right) = \lim_{x\to 1}(x^2+x)\cdot\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}-3\right) = 2\cdot(-2) = -4$
4. $\lim_{x\to 2}\dfrac{\frac{2}{x}-3}{x^2+x} = \dfrac{\lim_{x\to 2}\left(\frac{2}{x}-3\right)}{\lim_{x\to 2}(x^2+x)} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3}$

In volgende voorbeelden leidt de toepassing van dezelfde rekenregels echter tot onbepaaldheden:

Voorbeeld 1.4.3.

1. $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x) \overset{?}{=} \lim_{x\to+\infty}x^2 - \lim_{x\to+\infty}x = \infty-\infty$
2. $\lim_{x\to 0}\left((x^3-x)\cdot\frac{1}{x^3}\right) \overset{?}{=} \lim_{x\to 0}(x^3-x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3} = 0\cdot(+\infty)$
3. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1} \overset{?}{=} \dfrac{\lim_{x\to 1}(x-1)}{\lim_{x\to 1}(x^2-1)} = \dfrac{0}{0}$
4. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x+2} \overset{?}{=} \dfrac{\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)}{\lim_{x\to+\infty}(x+2)} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$

Als je een onbepaalde vorm uitkomt, betekent dat niet dat de limiet niet bestaat. Het betekent enkel dat je die bepaalde rekenregel niet mag toepassen om de limiet te berekenen. Bovenstaande limieten kunnen als volgt toch worden berekend:

Voorbeeld 1.4.4.

1. $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x) = \lim_{x\to+\infty}x(x-1) \overset{?}{=} \lim_{x\to+\infty}x\cdot\lim_{x\to+\infty}(x-1) = \infty\cdot\infty = \infty$
2. $\lim_{x\to 0}\left((x^3-x)\cdot\frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 1-\infty = -\infty$
3. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

   Merk op dat het wegdelen van de gemeenschappelijk factor $x-1$ niet toegelaten is als $x-1$ nul is, of dus als $x=1$. Maar voor het bepalen van de limiet als x gaat naar 1 moet enkel rekening gehouden worden met waarden voor x in de buurt van 1 en niet voor $x=1$.
4. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \dfrac{\lim_{x\to+\infty}(x+\frac{1}{x})}{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \dfrac{+\infty}{1} = +\infty$

Voorbeeld 1.4.5. Deze rekenregels mogen niet gebruikt worden als ze een onbepaaldheid geven:

CC BY-NC-SA 4.0

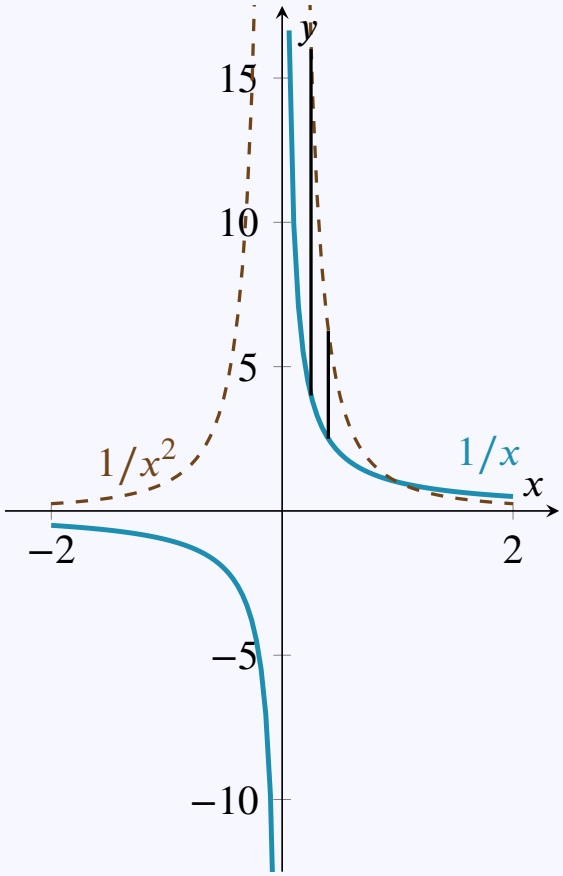
1.4 Rekenregels limieten

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} + \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x^2} = (+\infty)+(+\infty) = +\infty$$

maar $$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} - \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x^2} = (+\infty)-(+\infty) \text{ (onbepaald!)}$$

terwijl $$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x-1}{x^2} = \frac{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(x-1)}{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^2} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

Als x nadert tot 0 langs rechts, wordt het verschil tussens $1/x$ en $1/x^2$ inderdaad willekeurig groot.



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.3)

1.5 Limieten in $\pm\infty$

Voorbeeld 1.5.1. Bereken $\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2)$.

Als we proberen de regel 'limiet van de som is som van de limieten' te gebruiken, krijgen we

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2) &= \lim_{x\to+\infty}3x^2-\lim_{x\to+\infty}4x+\lim_{x\to+\infty}2\\ &= 3\cdot(+\infty)-4\cdot(+\infty)+2\\ &= \infty-\infty, \text{ en dus ONBEPAALD}\end{aligned}$$

Conclusie: we mogen de rekenregel *niet* toepassen. We hebben een fout gemaakt. De eerste gelijkheid geldt niet:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2)\neq\lim_{x\to+\infty}3x^2-\lim_{x\to+\infty}4x+\lim_{x\to+\infty}2$$

Er is echter een manier om de onbepaaldheid te omzeilen, en de limiet *toch* te berekenen met behulp van de rekenregels. We kunnen namelijk *de hoogstegraadsterm buiten haakjes te brengen*, en daardoor de limiet van een som omzetten in de limiet van een product. Verder gebruiken we dan de rekenregel voor limieten van een product. We beginnen de berekening met:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2)=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})$$

We weten dat

$$\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})=\lim_{x\to+\infty}(3)-\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=3+0+0=3$$

dus als we de limiet van dit product van functies schrijven als het product van de limieten krijgen we geen onbepaalde vorm:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2) &= \lim_{x\to+\infty}x^2\cdot(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})\\ &= \lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\lim_{x\to+\infty}(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})\\ &= (+\infty)\cdot 3=+\infty, \text{ en dus GEEN onbepaaldheid}\end{aligned}$$

Als de rekenregels voor limieten een onbepaaldheid opleveren, probeer je de onbepaaldheid te *omzeilen*. Een mogelijke oplossing bij de limiet in $c=\pm\infty$ van een som is om de term die het snelst naar oneindig gaat buiten haakjes te brengen en zo een som om te zetten in een product. Bij de limiet van een veelterm is dit de hoogstegraadsterm. We zetten enkel de macht van x buiten haakjes, de coëfficiënt laten we binnen haakjes staan. Dit idee beperkt zich echter niet tot veeltermen. We geven nog enkele voorbeelden:

Voorbeeld 1.5.2. Bereken $\lim_{x\to+\infty}(2e^{3x}-5e^{2x})$.

$$\lim_{x\to+\infty}(2e^{3x}-5e^{2x})=\lim_{x\to+\infty}e^{3x}(2-\frac{5}{e^x})=(+\infty).2=+\infty$$

Voorbeeld 1.5.3. Bereken $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-6x+1}{2x^2+11x-8}$.

Dit is de limiet van een quotiënt, maar het quotiënt van de limieten geeft $\frac{+\infty}{+\infty}$, en dus kunnen we de gewone rekenregel niet toepassen. We zetten nu zowel in teller als in noemer de hoogstegraadsterm

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Limieten in $\pm\infty$

buiten haken:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-6x+1}{2x^2+11x-8}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(3-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(2+\frac{11}{x}-\frac{8}{x^2})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{11}{x}-\frac{8}{x^2}}=\frac{3}{2}$$

Opmerking 1.5.1.

- Door het toepassen van de rekenregels zie je dat de limiet voor $x\to\pm\infty$ gelijk is aan de limiet van de hoogstegraadsterm voor een veeltermfunctie, en gelijk is aan het quotiënt van de hoogstegraadstermen in teller en noemer voor een rationale functie. In de oefeningen wordt echter verwacht dat je niet gewoon het eindresultaat opschrijft, maar dat je telkens met de rekenregels uitwerkt hoe je hier aan komt.
- Het heeft geen zin om de termen die het snelst naar oneindig gaan buiten haken te brengen bij een limiet in een nulpunt van de noemer zoals bijvoorbeeld:

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{x^2+x-1}{x-1}$$

Ook bij irrationale functies zetten we de term die het snelst naar oneindig gaat buiten haken:

Voorbeeld 1.5.4. Bereken $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x}+3x\right)$.

Dit is de limiet van een som, maar de som van de limieten geeft $\infty-\infty$, en dus kunnen we deze rekenregel niet toepassen. We zetten stap voor stap de hoogste macht van x buiten haken:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x}+3x\right)&=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{7}{x}\right)}+3x\right)\\
&=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3x\right)\\
&=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3x\right)\\
&=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3\right)\\
&=\left(\lim_{x\to-\infty}x\right)\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3\right)\right)\\
&=(-\infty)\cdot\left(-\sqrt{4}+3\right)\\
&=-\infty
\end{aligned}$$

Merk op: we hebben $|x|$ vervangen door $-x$ omdat we de limiet in $-\infty$ moeten berekenen, en voor negatieve x is inderdaad $|x|=-x$.

Opmerking 1.5.2.

Let op bij het berekenen van limieten met vierkantswortels:

$\sqrt{x^2}=|x|$ dus

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Limieten in $\pm\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to+\infty} |x| = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to-\infty} |x| = \lim_{x\to-\infty} -x = -(-\infty) = +\infty$

Deze techniek werkt echter niet altijd. We nemen een voorbeeld dat erg lijkt op het vorige voorbeeld, maar toch op een heel andere manier uitgerekend moet worden:

Voorbeeld 1.5.5. Bereken $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right) &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{7}{x}\right)}+2x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(|x|\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(-x\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2\right) \\
&= \left(\lim_{x\to-\infty} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2\right)\right) \\
&= (-\infty)\cdot\left(-\sqrt{4}+2\right) \\
&= (-\infty)\cdot 0
\end{aligned}$$

Met deze berekeningen krijgen we een onbepaaldheid, dus moeten we een andere techniek gebruiken om deze limiet te kunnen uitrekenen. We vermenigvuldigen teller en noemer met de toegevoegde tweeterm. De toegevoegde tweeterm nemen wil zeggen dat we het plusteken tussen de twee termen vervangen door een minteken, of omgekeerd.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{4x^2+7x}+2x)(\sqrt{4x^2+7x}-2x)}{\sqrt{4x^2+7x}-2x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+7x-4x^2}{\sqrt{4x^2+7x}-2x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{7x}{|x|\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{7x}{-x\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{7}{-\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2} \\
&= \frac{7}{-\sqrt{4}-2} = -\frac{7}{4}
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.6 Limieten in nulpunten van de noemer

1. Limieten van de vorm $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ met $f(c)=0$

We hebben in het inleidend voorbeeld gezien dat $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{1}{x}=-\infty$ en dat $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ niet bestaat.

Analoog kunnen we volgende situaties tegenkomen bij het berekenen van $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ met $f(c)=0$, $c\in\mathbb{R}$:

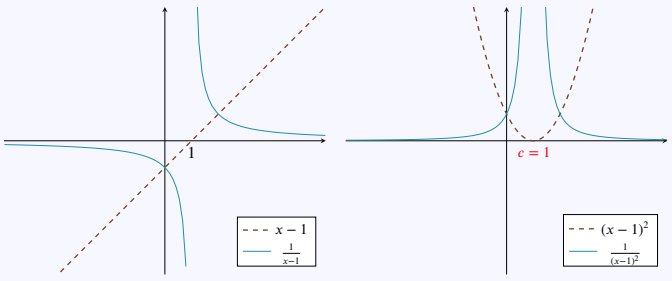
- Als $f(x)>0$ in een omgeving van c dan is $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=+\infty$.
- Als $f(x)<0$ in een omgeving van c dan is $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.
- Als $f(x)>0$ voor $x>c$ en $f(x)<0$ voor $x<c$ dan is $\lim_{\substack{x\to c\\ >}}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ en $\lim_{\substack{x\to c\\ <}}\frac{1}{f(x)}=-\infty$
- Als $f(x)<0$ voor $x>c$ en $f(x)>0$ voor $x<c$ dan is $\lim_{\substack{x\to c\\ >}}\frac{1}{f(x)}=-\infty$ en $\lim_{\substack{x\to c\\ <}}\frac{1}{f(x)}=+\infty$

Om deze limieten te berekenen moet je dus het tekenverloop van de noemer $f(x)$ zoeken in de buurt van c. Je hoeft hiervoor niet het gehele tekenverloop van $f(x)$ op te stellen, in de buurt van c volstaat.

Voorbeeld 1.6.1.

1. $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{1}{x-1}=+\infty$ want de noemer $x-1$ is positief voor $x>1$.
2. $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{1}{x-1}=-\infty$ want de noemer $x-1$ is negatief voor $x<1$.
3. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$ bestaat niet, want de noemer $x-1$ verandert van teken rond $x=1$.
4. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$, want de noemer $x-1$ is positief rond $x=1$.

Ter illustratie geven we bij deze eenvoudige voorbeelden ook de grafieken van $\frac{1}{f(x)}$ en van $f(x)$. In het algemeen echter hebben functies met nulpunten in de noemer geen eenvoudige grafieken en gebruik je niet de grafiek om de limiet af te lezen maar bereken je juist de limieten in deze nulpunten van de noemer om meer te weten te komen over de grafiek van de functie.



Opmerking 1.6.1.

1.6 Limieten in nulpunten van de noemer

Merk op dat $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ met $f(c)=0$ steeds $+\infty$ of $-\infty$ is als de limiet bestaat.

Als de linker- en rechterlimiet verschillen, dan bestaat $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ niet.

2. Limieten van de vorm $\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}$ met $f(c)=0$

(a) **c is geen nulpunt van de teller**

In dit geval is c dus een nulpunt van de noemer maar geen nulpunt van de teller.
Dan kunnen we de limiet als volgt herschrijven:

$$\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to c}g(x)\cdot\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=g(c)\cdot\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}.$$

Dit is geen onbepaalde vorm vermits $g(c)\neq 0$. Om de limiet verder uit te rekenen moeten we het teken van $g(c)$ kennen en de limiet $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ berekenen. Het tekenverloop van de *teller* moet je niet zoeken, enkel het *teken* van $g(c)$ heeft belang.

Voorbeeld 1.6.2.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{x^2+x-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}(x^2+x+1)\cdot\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{1}{x-1}=(1^2+1-1)\cdot(+\infty)=+\infty$$

(b) **c is een nulpunt van teller en noemer**

Dit geval leidt tot de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$.

Bij **rationale functies** kunnen we in dit geval teller en noemer ontbinden in factoren en de factor $x-c$ wegdelen in teller en noemer.

Voorbeeld 1.6.3.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

Bij sommige **irrationale functies** kunnen we teller en noemer vermenigvuldigen met de toegevoegde uitdrukking van teller of noemer.

Voorbeeld 1.6.4.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}&=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Opmerking 1.6.2. Men kan limieten die de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$ geven ook berekenen met de regel van de l'Hôpital.

CC BY-NC-SA 4.0

1.6 Limieten in nulpunten van de noemer

Samengevat wordt dit:

Eigenschap 1.6.1. De limiet in een nulpunt van de noemer bereken je als volgt:

1.	$\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)}$	met $f(c) = 0$:	**tekenverloop** van $f(x)$ in de buurt van c
1.a	als	$f(x) > 0$ rond c	limiet is $+\infty$
1.b		$f(x) < 0$ rond c	limiet is $-\infty$
1.c		$f(x)$ verandert van teken in c	linker- en rechterlimiet zijn verschillend
2.	$\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)}$	met $f(c) = 0$:	
2.a	als	$g(c) \neq 0$:	**reduceer tot geval 1** want $\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to c} g(x) \cdot \lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = g(c) \cdot \lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)}$.
2.b	als	$g(c) = 0$:	onbepaaldheid $\frac{0}{0}$ wegwerken via
		met f en g veeltermen	**gemeenschappelijke factor** $x - c$ wegdelen
		met f *of* g som van wortels	vermenigvuldigen met **toegevoegde tweeterm**
		met f en g afleidbaar	**l'Hôpital** toepassen

CC BY-NC-SA 4.0

1.6.A Oefeningen limieten

Bij de oefeningen op limieten is het niet enkel van belang de uitkomst te vinden, maar ook om correct te kunnen uitleggen **hoe** je deze uitkomst vindt.

Oefening 1.6.1. Bereken volgende limieten in $\pm\infty$ met behulp van de rekenregels:

1. $\lim_{x\to+\infty}(-4x^5+7x^4-11)=$ $-\infty$

Uitwerking: De rekenregel 'limiet van som is som van limieten' levert een onbepaaldheid:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-4x^5+7x^4-11\right)=-4\cdot(+\infty)^5+7\cdot(+\infty)^4-11=-4\cdot(+\infty)+7\cdot(+\infty)-11=\text{onbepaald},$$

We kunnen de hoogste macht van x buiten haken brengen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}x^5\left(-4+\frac{7}{x}-\frac{11}{x^5}\right)&=\left(\lim_{x\to+\infty}x^5\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\left(-4+\frac{7}{x}-\frac{11}{x^5}\right)\right)\\&=(+\infty)\cdot(-4)\\&=-\infty\end{aligned}$$

2. $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=$ 0

Uitwerking: We berekenen eerst $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\\&=\frac{1}{1+0}\\&=1\end{aligned}$$

Omdat $\ln 1=0$ is $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=0$.

3. $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+3x-2}{3x-7}=$ $+\infty$

Uitwerking: We brengen de hoogste macht van x buiten haken in teller en noemer:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+3x-2}{3x-7}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{3-\frac{7}{x}}\\&=\frac{(-\infty)\cdot(-1)}{3}\\&=+\infty\end{aligned}$$

4. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3}{x^3-x+2}=$ 0

CC BY-NC-SA 4.0

1.6.A Oefeningen limieten

Uitwerking: We brengen de hoogste macht van x buiten haken in teller en noemer:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3}{x^3-x+2} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}}{x\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}\\ &= \frac{2}{(+\infty)\cdot 1}\\ &= 0\end{aligned}$$

5. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x-1} =$ $+\infty$

Uitwerking: We brengen de hoogste macht van x buiten haken in teller en noemer:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x-1} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{1-\frac{1}{x}}\\ &= \frac{(+\infty)\cdot 1}{1}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

6. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6+5x^2+1}{x^4-x^6} = -1$

Uitwerking: We brengen de hoogste macht van x buiten haken in teller en noemer (let op: in de noemer heeft de tweede term de hoogste macht)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6+5x^2+1}{x^4-x^6} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^6\left(1+\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x^6}\right)}{x^6\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x^6}}{-1+\frac{1}{x^2}} = -1\end{aligned}$$

7. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2-7x}+3x) =$ $+\infty$

Uitwerking: We zonderen de x^2 af in de wortel en brengen de hoogste macht van x buiten haken:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2-7x}+3x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4-\frac{7}{x}\right)}+3x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{4-\frac{7}{x}}+3x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{4-\frac{7}{x}}+3x\right)\\ &= \left(\lim_{x\to+\infty}x\right)\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4-\frac{7}{x}}+3\right)\\ &= (+\infty)(\sqrt{4}+3) = +\infty\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.6.A Oefeningen limieten

8. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+3}-x)=$ $+\infty$

Uitwerking: We zonderen de x^2 af in de wortel en brengen de hoogste macht van x buiten haken:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+3}-x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}-x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-x\right)\\ &= \left(\lim_{x\to+\infty}x\right)\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-1\right)\\ &= (+\infty)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right),\end{aligned}$$

en aangezien $\sqrt{2}>1$, is het resultaat $+\infty$.

9. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+3}-x)=$ $+\infty$

Uitwerking: We zonderen de x^2 af in de wortel en brengen de hoogste macht van x buiten haken:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+3}-x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}-x\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-x\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-x\right)\\ &= \left(\lim_{x\to-\infty}x\right)\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-1\right)\\ &= (-\infty)\cdot\left(-\sqrt{2}-1\right),1\end{aligned}$$

en aangezien $-\sqrt{2}-1<0$, is het resultaat $+\infty$.

10. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+2x}{3x-1}=$ 1

Uitwerking: We zonderen eerst de x^2 af in de wortel:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}+2x}{3x-1} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}+2x}{3x-1}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2x}{3x-1}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2x}{3x-1}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2\right)}{3x-1}\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.6.A Oefeningen limieten

Nu kunnen we in de noemer ook de hoogste macht van x buiten haken brengen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2\right)}{3x-1} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2\right)}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2}{3-\frac{1}{x}}\\ &= \frac{\sqrt{1}+2}{3}=1\end{aligned}$$

11. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+2x}{3x-1}=\dfrac{1}{3}$

Uitwerking: We zonderen allereerst de x^2 af in de wortel:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}+2x}{3x-1} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}+2x}{3x-1}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2x}{3x-1}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2x}{3x-1}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2\right)}{3x-1}\end{aligned}$$

Nu kunnen we in de noemer ook de hoogste macht van x buiten haken brengen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2\right)}{3x-1} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2\right)}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2}{3-\frac{1}{x}}\\ &= \frac{-\sqrt{1}+2}{3}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

12. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{16x^2+9x}+4x)=-\dfrac{9}{8}$

CC BY-NC-SA 4.0

1.6.A Oefeningen limieten

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{16x^2+9x}+4x\right) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{16x^2+9x}+4x\right)\left(\sqrt{16x^2+9x}-4x\right)}{\sqrt{16x^2+9x}-4x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{16x^2+9x-16x^2}{\left(|x|\sqrt{16+\frac{9}{x}}-4x\right)}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{9x}{\left(-x\sqrt{16+\frac{9}{x}}-4x\right)}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{9}{-\sqrt{16+\frac{9}{x}}-4}\\ &= \frac{9}{-4-4}=-\frac{9}{8}\end{aligned}$$

13. $\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right) =$ 0

Uitwerking: We zouden kunnen schrijven dat

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right) = \left(\lim_{x\to+\infty} x\right)\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right),$$

maar dit levert een onbepaaldheid van de vorm $(+\infty)\cdot 0$ op. We herschrijven de uitdrukking waarvan we de limiet zullen nemen, door teller en noemer te vermenigvuldigen met $\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}$ en de rekenregel $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ te gebruiken in de teller:

$$\begin{aligned}x\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right) &= \frac{x\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right)\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right)}{\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}}\\ &= \frac{x\left(2+\frac{3}{x^2}-\left(2-\frac{3}{x^2}\right)\right)}{\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}}\\ &= \frac{x\cdot\frac{6}{x^2}}{\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}}\end{aligned}$$

En dus is

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{6}{x}}{\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right)}\\ &= 0\end{aligned}$$

Oefening 1.6.2. Bereken de volgende limieten in een nulpunt van de noemer dat geen nulpunten is van de teller:

CC BY-NC-SA 4.0

1.6.A Oefeningen limieten

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}} \dfrac{1}{x-2} =$ $-\infty$

Uitwerking: We nemen de limiet naar een nulpunt van de noemer dat geen nulpunt is van de teller, en aangezien $x-2$ negatief is voor $x<2$, zal de limiet $-\infty$ zijn.

2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} =$ $+\infty$

Uitwerking: We nemen de limiet naar een nulpunt van de noemer dat geen nulpunt is van de teller, en aangezien $(x-2)^2$ positief is overal in een omgeving rond 2, zal de limiet $+\infty$ zijn.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\>}} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} =$ $+\infty$

Uitwerking: Let op dat er enkel een rechterlimiet genomen kan worden, en geen linkerlimiet, omdat deze functie niet is gedefinieerd voor $x\leq 2$: we zouden delen door nul voor $x=2$, en voor $x<2$ zou de wortel niet gedefinieerd zijn. We nemen de limiet naar een nulpunt van de noemer dat geen nulpunt is van de teller, en aangezien de vierkantswortel positief is, zal deze limiet $+\infty$ zijn.

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}} \dfrac{4x-20}{2x-6} =$ $+\infty$

Uitwerking: We nemen de limiet naar een nulpunt van de noemer, dat geen nulpunt is van de teller. We schrijven eerst als een product van limieten:

$$\lim_{\substack{x\to 3\\<}} \frac{4x-20}{2x-6} = \lim_{\substack{x\to 3\\<}} (4x-20)\cdot \lim_{\substack{x\to 3\\<}} \frac{1}{2x-6} = (-8)\cdot \lim_{\substack{x\to 3\\<}} \frac{1}{2x-6}$$

Om te weten te komen of de overblijvende limiet $+\infty$ dan wel $-\infty$ is, moeten we het tekenverloop van noemer bepalen. De noemer is negatief voor $x<3$. Omdat we de limiet voor x gaande naar 3 van links nemen, is $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}} \dfrac{1}{2x-6} = -\infty$ Het resultaat is dan $+\infty$.

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) =$ $-\infty$

Uitwerking: Rechtstreeks invullen gaat niet: dan komen we op de onbepaaldheid $(+\infty)-(+\infty)$ uit. We zetten beide termen op dezelfde noemer om één grote breuk te vormen:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{2x-1}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\>}} (2x-1)\cdot \lim_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{1}{x^2} = (-1)(+\infty) = -\infty$$

6. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} \dfrac{x-3}{x^2-1} =$ $-\infty$

7. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} \dfrac{x-3}{x^2-1} =$ $+\infty$

8. $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\<}} \dfrac{x}{\sin x} =$ $+\infty$

Oefening 1.6.3. Bereken de volgende limieten in een nulpunt van teller en noemer:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^3} =$ $+\infty$

CC BY-NC-SA 4.0

1.6.A Oefeningen limieten

Uitwerking: $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=$ bestaat niet

Uitwerking: $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ en die limiet bestaat niet.

3. $\lim_{\substack{x\to 3\\<}}\frac{x-3}{|x-3|}=-1$

Uitwerking: We gebruiken de definitie van de absolute waarde: deze functie is gelijk aan de constante functie 1 voor $x>3$, en gelijk aan de constante functie -1 voor $x<3$, en in 3 is de functie niet gedefinieerd. Daarom is de linkerlimiet voor x gaande naar 3 gelijk aan -1.

4. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}=3$

Uitwerking: We nemen de limiet naar een nulpunt van teller en noemer. We moeten dus zowel teller en noemer ontbinden in factoren: hiervoor zoeken we de nulpunten van teller en noemer, aan de hand van de discriminantmethode, aangezien teller en noemer tweedegraadsvergelijkingen zijn van de vorm $ax^2+bx+c=0$.

Voor de teller: $a=1$, $b=1$ en $c=-2$. Dan is $D=b^2-4ac=9$ en dus

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=1, x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-2$$

Voor de noemer: $a=1$, $b=3$ en $c=2$. Dan is $D=b^2-4ac=1$ en dus

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=-1, x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-2$$

Dus kunnen we schrijven dat

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-1}{x+1}=3$$

5. $\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{x^3-1}{x-1}=3$

Uitwerking: We gebruiken de identiteit $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\left(x^2+x+1\right)=3$$

6. $\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^3}=-\infty$

Uitwerking: Door in te vullen vinden we dat 1 een nulpunt is van zowel de teller als de noemer. Met behulp van de Euclidische deling of Horner vinden we $x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$. Door ook nog de tweedegraadsterm te ontbinden in factoren (bijvoorbeeld met de discriminantmethode), vinden we $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$. De limiet kan nu berekend worden:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^3}=\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^3}=\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{x+2}{x-1}$$

Dit is de limiet in een nulpunt van de noemer dat geen nulpunt is van de teller.

CC BY-NC-SA 4.0

1.6.A Oefeningen limieten

7. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \dfrac{1}{4}$

Uitwerking: Bij invullen van 3 in het functievoorschrift krijgen we de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$. We vermenigvuldigen daarom teller en noemer met de toegevoegde tweeterm van de teller, om vervolgens de identiteit $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ te gebruiken:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} &= \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} \\ &= \frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\end{aligned}$$

Van deze uitdrukking kan de limiet rechtstreeks bepaald worden:

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{\sqrt{3+1}+2} = \frac{1}{4}$$

8. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9} = \dfrac{1}{18}$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9} &= \lim_{x\to 3} \frac{\left(\sqrt{2x+3}-3\right)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}{(x^2-9)(\sqrt{2x+3}+3)} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{2x+3-9}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{2}{(x+3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}\end{aligned}$$

Oefening 1.6.4. Bereken volgende limieten met behulp van de rekenregels:

1. $\lim_{x\to-\infty} \left(12x^{503} + 7x^{404} + 25x^{200}\right) =$ $-\infty$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \left(12x^{503} + 7x^{404} - 25x^{200}\right) &= \lim_{x\to-\infty} x^{503}\left(12 + 7x^{404-503} + 25x^{200-503}\right) \\ &= (-\infty)\cdot(12+0+0) = -\infty\end{aligned}$$

2. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+42x-12}{2x^2-17} =$ 1

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.3)

1.6.A Oefeningen limieten

Uitwerking:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+42x-12}{2x^2-17}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{42}{x}-\frac{12}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{17}{x}\right)}$$
$$=\frac{2}{2}=1$$

3. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{6x^2-7x}+20x)=$ $-\infty$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{6x^2-7x}+20x)&=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(6-\frac{7}{x}\right)}+20x\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{6-\frac{7}{x}}+20x\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{6-\frac{7}{x}}+20x\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{6-\frac{7}{x}}+20\right)\\&=(-\infty)\cdot(-\sqrt{6}+20)\\&=-\infty\end{aligned}$$

4. $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=$ andere oplossing

Uitwerking: We vereenvoudigen de teller door de rekenregel $x^2-4=(x-2)(x+2)$ en vervolgens $x-2$ te schrappen in teller en noemer. $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)=4$

5. $\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x-2}=$ 0

Uitwerking: We kunnen -2 gewoon invullen in het functievoorschrift. $\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{-4}=0$

Oefening 1.6.5. Bereken volgende limieten met parameters $a,b\in\mathbb{R}$.

1. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+ax}{\sqrt{x^2+2}}=1-a$

CC BY-NC-SA 4.0

1.6.A Oefeningen limieten

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+ax}{\sqrt{x^2+2}} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+ax}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+ax}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+ax}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+a\right)}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+a}{-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}\\
&= \frac{-\sqrt{1}+a}{-\sqrt{1}} = 1-a
\end{aligned}$$

2. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+ax}{\sqrt{x^2+2}} = 1+a$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+ax}{\sqrt{x^2+2}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+ax}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+ax}{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+a}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+a}{1} = 1+a
\end{aligned}$$

3. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{ax+b}{7x-\sqrt{x^2+10}} = \dfrac{a}{8}$

CC BY-NC-SA 4.0

1.6.A Oefeningen limieten

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+b}{7x-\sqrt{x^2+10}} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{ax+b}{7x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{10}{x^2}\right)}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{ax+b}{7x-|x|\sqrt{1+\frac{10}{x^2}}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{ax+b}{7x+x\sqrt{1+\frac{10}{x^2}}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(a+\frac{b}{x}\right)}{x\left(7+\sqrt{1+\frac{10}{x^2}}\right)}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{7+\sqrt{1+\frac{10}{x^2}}}\\
&= \frac{a}{8}
\end{aligned}$$

4. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+ax)$ = gevalsonderscheiding: zie uitwerking

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+ax) &= \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}+ax)\\
&= \lim_{x\to-\infty}(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+ax)\\
&= \lim_{x\to-\infty}(-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+ax)\\
&= \lim_{x\to-\infty}x(-\sqrt{1+\frac{1}{x}}+a) = (-\infty).(-1+a)
\end{aligned}$$

voor $a<1$ is $-1+a<0$ en is deze limiet $+\infty$

voor $a>1$ is $-1+a>0$ en is deze limiet $-\infty$

voor $a=1$ krijgen we met deze berekeningen de onbepaaldheid $(-\infty).0$. We moeten dus een andere techniek gebruiken om deze limiet te kunnen uitrekenen in het geval $a=1$. We vermenigvuldigen teller en noemer met de toegevoegde uitdrukking:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{\sqrt{x^2+x}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x(-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

5. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+7x}+ax)$ = gevalsonderscheiding: zie uitwerking

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.3)

1.6.A Oefeningen limieten

Uitwerking: We zonderen eerst x^2 af in de wortel:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+7x}+ax) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{7}{x}\right)}+ax\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{4+\frac{7}{x}}+ax\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{4+\frac{7}{x}}+ax\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+a\right)\\
&= \left(\lim_{x\to-\infty} x\right)\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+a\right)\\
&= (-\infty)\cdot(-2+a)
\end{aligned}$$

Dit levert een onbepaaldheid op voor $a=2$ van de vorm $(-\infty)\cdot 0$: voor deze waarde van a levert de berekening dus geen antwoord op, en moeten we een andere berekening maken om dit op te lossen. Voor $a\neq 2$ is de laatste uitdrukking een reëel getal, verschillend van nul, en is er dus geen onbepaaldheid. Voor $a>2$, zal het antwoord $-\infty$ zijn, voor $a<2$ zal het antwoord $+\infty$ zijn.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+7x}+2x)(\sqrt{4x^2+7x}-2x)}{\sqrt{4x^2+7x}-2x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+7x-4x^2}{\sqrt{4x^2+7x}-2x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{7x}{|x|\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{7x}{-x\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{7}{-\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2}\\
&= \frac{7}{-\sqrt{4}-2}=-\frac{7}{4}
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.6.B Oefeningen rekenregels limieten

Bij de oefeningen op limieten is het niet enkel van belang de uitkomst te vinden, maar ook om correct te kunnen uitleggen **hoe** je deze uitkomst vindt.

Oefening 1.6.6. Bereken volgende limieten in $\pm\infty$ met behulp van de rekenregels:

1. $\lim_{x\to+\infty}(-4x^5+7x^4-11)=$ $-\infty$

Uitwerking: De rekenregel 'limiet van som is som van limieten' levert een onbepaaldheid:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-4x^5+7x^4-11\right)=-4\cdot(+\infty)^5+7\cdot(+\infty)^4-11=-4\cdot(+\infty)+7\cdot(+\infty)-11=\text{onbepaald},$$

We kunnen de hoogste macht van x buiten haken brengen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}x^5\left(-4+\frac{7}{x}-\frac{11}{x^5}\right)&=\left(\lim_{x\to+\infty}x^5\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\left(-4+\frac{7}{x}-\frac{11}{x^5}\right)\right)\\&=(+\infty)\cdot(-4)\\&=-\infty\end{aligned}$$

2. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2+3x-2}{3x-7}=$ $+\infty$

Uitwerking: We brengen de hoogste macht van x buiten haken in teller en noemer:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+3x-2}{3x-7}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{3-\frac{7}{x}}\\&=\frac{(-\infty)\cdot(-1)}{3}\\&=+\infty\end{aligned}$$

3. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3}{x^3-x+2}=$ 0

Uitwerking: We brengen de hoogste macht van x buiten haken in teller en noemer:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3}{x^3-x+2}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}}{x\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}\\&=\frac{2}{(+\infty)\cdot 1}\\&=0\end{aligned}$$

4. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-1}{x-1}=$ $+\infty$

CC BY-NC-SA 4.0

1.6.B Oefeningen rekenregels limieten

Uitwerking: We brengen de hoogste macht van x buiten haken in teller en noemer:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{1-\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{(+\infty)\cdot 1}{1}$$
$$=+\infty$$

5. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6+5x^2+1}{x^4-x^6}=$ 0

Uitwerking: We brengen de hoogste macht van x buiten haken in teller en noemer (let op: in de noemer heeft de tweede term de hoogste macht)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6+5x^2+1}{x^4-x^6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6\left(1+\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x^6}\right)}{x^6\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x^6}}{-1+\frac{1}{x^2}}=-1$$

Oefening 1.6.7. Bereken de volgende limieten in een nulpunt van de noemer dat geen nulpunt is van de teller:

1. $\lim_{\substack{x\to 2\\ <}}\frac{1}{x-2}=$ $-\infty$

Uitwerking: We nemen de limiet naar een nulpunt van de noemer dat geen nulpunt is van de teller, en aangezien $x-2$ negatief is voor $x<2$, zal de limiet $-\infty$ zijn.

2. $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=$ $+\infty$

Uitwerking: We nemen de limiet naar een nulpunt van de noemer dat geen nulpunt is van de teller, en aangezien $(x-2)^2$ positief is overal in een omgeving rond 2, zal de limiet $+\infty$ zijn.

3. $\lim_{\substack{x\to 2\\ >}}\frac{1}{\sqrt{x-2}}=$ $+\infty$

Uitwerking: Let op dat er enkel een rechterlimiet genomen kan worden, en geen linkerlimiet, omdat deze functie niet is gedefinieerd voor $x\leq 2$: we zouden delen door nul voor $x=2$, en voor $x<2$ zou de wortel niet gedefinieerd zijn. We nemen de limiet naar een nulpunt van de noemer dat geen nulpunt is van de teller, en aangezien de vierkantswortel positief is, zal deze limiet $+\infty$ zijn.

4. $\lim_{\substack{x\to 3\\ <}}\frac{4x-20}{2x-6}=$ $+\infty$

Uitwerking: We nemen de limiet naar een nulpunt van de noemer, dat geen nulpunt is van de teller. We schrijven eerst als een product van limieten:

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ <}}\frac{4x-20}{2x-6}=\lim_{\substack{x\to 3\\ <}}(4x-20)\cdot\lim_{\substack{x\to 3\\ <}}\frac{1}{2x-6}=(-8)\cdot\lim_{\substack{x\to 3\\ <}}\frac{1}{2x-6}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.6.B Oefeningen rekenregels limieten

Om te weten te komen of de overblijvende limiet $+\infty$ dan wel $-\infty$ is, moeten we het tekenverloop van noemer bepalen. De noemer is negatief voor $x < 3$. Omdat we de limiet voor x gaande naar 3 van links nemen, is $\lim_{\substack{x\to 3\\<}} \frac{1}{2x-6} = -\infty$ Het resultaat is dan $+\infty$.

5. $\lim_{\substack{x\to 0\\>}} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) =$ $-\infty$

Uitwerking: Rechtstreeks invullen gaat niet: dan komen we op de onbepaaldheid $(+\infty) - (+\infty)$ uit. We zetten beide termen op dezelfde noemer om één grote breuk te vormen:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{2x-1}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\>}} (2x-1) \cdot \lim_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{1}{x^2} = (-1)(+\infty) = -\infty$$

6. $\lim_{\substack{x\to 1\\>}} \frac{x-3}{x^2-1} =$ $-\infty$

7. $\lim_{\substack{x\to 1\\<}} \frac{x-3}{x^2-1} =$ $+\infty$

8. $\lim_{\substack{x\to \pi\\<}} \frac{x}{\sin x} =$ $+\infty$

Oefening 1.6.8. Bereken de volgende limieten in een nulpunt van teller en noemer:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^3} =$ $+\infty$

Uitwerking: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} =$ bestaat niet

Uitwerking: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ en die limiet bestaat niet.

3. $\lim_{\substack{x\to 3\\<}} \frac{x-3}{|x-3|} = -1$

Uitwerking: We gebruiken de definitie van de absolute waarde: deze functie is gelijk aan de constante functie 1 voor $x > 3$, en gelijk aan de constante functie -1 voor $x < 3$, en in 3 is de functie niet gedefinieerd. Daarom is de linkerlimiet voor x gaande naar 3 gelijk aan -1.

4. $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2} = 3$

Uitwerking: We nemen de limiet naar een nulpunt van teller en noemer. We moeten dus zowel teller en noemer ontbinden in factoren: hiervoor zoeken we de nulpunten van teller en noemer, aan de hand van de discriminantmethode, aangezien teller en noemer tweedegraadsvergelijkingen zijn van de vorm $ax^2+bx+c = 0$.

Voor de teller: $a = 1$, $b = 1$ en $c = -2$. Dan is $D = b^2 - 4ac = 9$ en dus

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = 1, x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = -2$$

Voor de noemer: $a = 1$, $b = 3$ en $c = 2$. Dan is $D = b^2 - 4ac = 1$ en dus

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = -1, x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = -2$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.6.B Oefeningen rekenregels limieten

Dus kunnen we schrijven dat

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-1}{x+1}=3$$

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$

Uitwerking: We gebruiken de identiteit $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(x^2+x+1\right)=3$$

6. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^3}=$ $-\infty$

Uitwerking: Door in te vullen vinden we dat 1 een nulpunt is van zowel de teller als de noemer. Met behulp van de Euclidische deling of Horner vinden we $x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$. Door ook nog de tweedegraadsterm te ontbinden in factoren (bijvoorbeeld met de discriminantmethode), vinden we $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$. De limiet kan nu berekend worden:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^3}=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^3}=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{x+2}{x-1}$$

Dit is de limiet in een nulpunt van de noemer dat geen nulpunt is van de teller.

Oefening 1.6.9. Bereken volgende limieten met behulp van de rekenregels:

1. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(12x^{503}+7x^{404}+25x^{200}\right)=$ $-\infty$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty}\left(12x^{503}+7x^{404}-25x^{200}\right)&=\lim_{x\to -\infty}x^{503}\left(12+7x^{404-503}+25x^{200-503}\right)\\&=(-\infty)\cdot(12+0+0)=-\infty\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2+42x-12}{2x^2-17}=$ 1

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2+42x-12}{2x^2-17}&=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{42}{x}-\frac{12}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{17}{x}\right)}\\&=\frac{2}{2}=1\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=$ andere oplossing

Uitwerking: We vereenvoudigen de teller door de rekenregel $x^2-4=(x-2)(x+2)$ en vervolgens $x-2$ te schrappen in teller en noemer. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=$ 0

Uitwerking: We kunnen -2 gewoon invullen in het functievoorschrift. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{0}{-4}=0$

CC BY-NC-SA 4.0

1.7 Limieten van veeltermen en rationale functies

Na het introduceren van het concept van *limieten* van functies, gaan we iets dieper in op een specifieke klasse van functies: veeltermen en rationale functies. Daarna introduceren we ook *asymptoten*, en kijken we vooral hoe we asymptoten kunnen vinden voor rationale functies.

Voor de volledigheid geven we hier nog de definitie van veeltermen en rationale functies:

Definitie 1.7.1 (Veeltermen en rationale functies)**.** Zij $n \in \mathbb{N}$, $a_0 \dots a_n \in \mathbb{R}$ met $a_n \neq 0$.

- Een n-**de graadsveelterm in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

  De $a_i x^i$ zijn de **termen** van de veelterm, de a_i zijn de **coëfficiënten**, en n is de **graad**.

- Met deze veelterm $p(x)$ kunnen we een **veeltermfunctie** p associëren:

$$p : x \mapsto p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- Een **rationale functie** is een quotiënt van twee veeltermfuncties, en dus van de vorm

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$$

  met $b_i \in \mathbb{R}$, $b_m \neq 0$.

1.7.1 Limieten in $c = \pm\infty$

Voor veeltermen blijkt er een handige truc te zijn om snel de limiet van de veelterm op plus en min oneindig af te lezen. Hiervoor beschouwen we eerst een voorbeeld:

Voorbeeld 1.7.1. Beschouw de veelterm $p(x) = 3x^4 + 2x^3 - x + 5$. Om de limiet op $-\infty$ te bepalen, kunnen we niet gewoon rechtstreeks invullen, omdat we dan op de onbepaaldheid $(+\infty) + (-\infty)$ zouden uitkomen. We hebben gezien dat om dit op te lossen, we de hoogste macht van de veelterm afzonderen. We zonderen ook de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm mee af:

$$p(x) = 3x^4 \left(1 + \frac{2}{3x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{5}{3x^4}\right)$$

Het gevolg is dat alle termen waarbij een x in de noemer voorkomt in de haken zullen wegvallen wanneer we de limiet naar oneindig nemen. Wat er overblijft van datgene dat tussen de haken staat, is een factor 1:

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x^4 = 3(-\infty)^4 = +\infty$$

en dus wordt de limiet enkel bepaald door de macht van de veelterm, en het teken van de hoogstegraadscoëfficiënt.

De truc van het afzonderen kunnen we voor iedere veelterm toepassen, en dat geeft dan volgende eigenschap.

Eigenschap 1.7.1. [Limieten van veeltermen in $c = \pm\infty$]

De limiet van een veelterm in $\pm\infty$ is de limiet van de hoogstegraadsterm (en dus gelijk aan $+\infty$ of $-\infty$ naargelang het teken van de hoogstegraadscoëfficiënt en het al dan niet even zijn van de graad van de veelterm).

CC BY-NC-SA 4.0

1.7 Limieten van veeltermen en rationale functies

Voor rationale functies is het iets ingewikkelder.

Stel dat we een rationale functie van de vorm

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots b_1 x + b_0}$$

hebben. We weten alvast dat voor de teller en noemer *apart*, enkel de hoogste graden van belang zijn voor de limieten op $\pm\infty$. We zonderen voor teller en noemer de hoogstegraadstermen af:

$$f(x) = \frac{a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_0}{a_n}\right)}{b_m x^m \left(1 + \frac{b_{m-1}}{b_m} + \cdots + \frac{b_1}{b_m} + \frac{b_0}{b_m}\right)}$$

Opnieuw zal wat tussen de haken staat in de limiet voor $x \to \pm\infty$ naar een gaan, en dus

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \tag{1}$$

Vervolgens onderscheiden we drie gevallen: ofwel is $n = m$, ofwel $n > m$, ofwel $n < m$.

- Als $n = m$, dan kunnen we de x-en uit vergelijking **??** schrappen, en dan blijft er over

  $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m},$$

  dus het quotiënt van de hoogstegraadscoëfficiënten bepaalt de limiet.

- Als $n > m$, dan gaat de teller domineren over de noemer: de functiewaarden zullen heel groot worden. We kunnen in vergelijking **??** de x in de noemer wegschrappen:

  $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^{n-m}}{b_m}$$

  en het resultaat is $+\infty$ of $-\infty$, afhankelijk van de macht $n - m$ (even of oneven), en van de tekens van a_n en b_m.

- Als $n < m$, dan gaat net de noemer domineren en de functiewaarden worden steeds kleiner. Nu kunnen we de x in de teller wegschrappen:

  $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{b_m x^{m-n}}.$$

  Hiervan is het resultaat steeds 0, ongeacht de tekens van a_n en b_m, en of de macht $m - n$ even of oneven is.

We hebben dus de volgende eigenschap aangetoond:

Eigenschap 1.7.2. (Limieten van rationale functies in $c = \pm\infty$)

Zij $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ een rationale functie, met $p(x)$ van graad n en $q(x)$ van graad m. Dan is $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ gelijk aan

- $\frac{a_n}{b_m}$ als $n = m$
- 0 als $n < m$,

CC BY-NC-SA 4.0

1.7 Limieten van veeltermen en rationale functies

- $+\infty$ of $-\infty$ als $n > m$.

1.7.2 Limieten in een reëel getal c

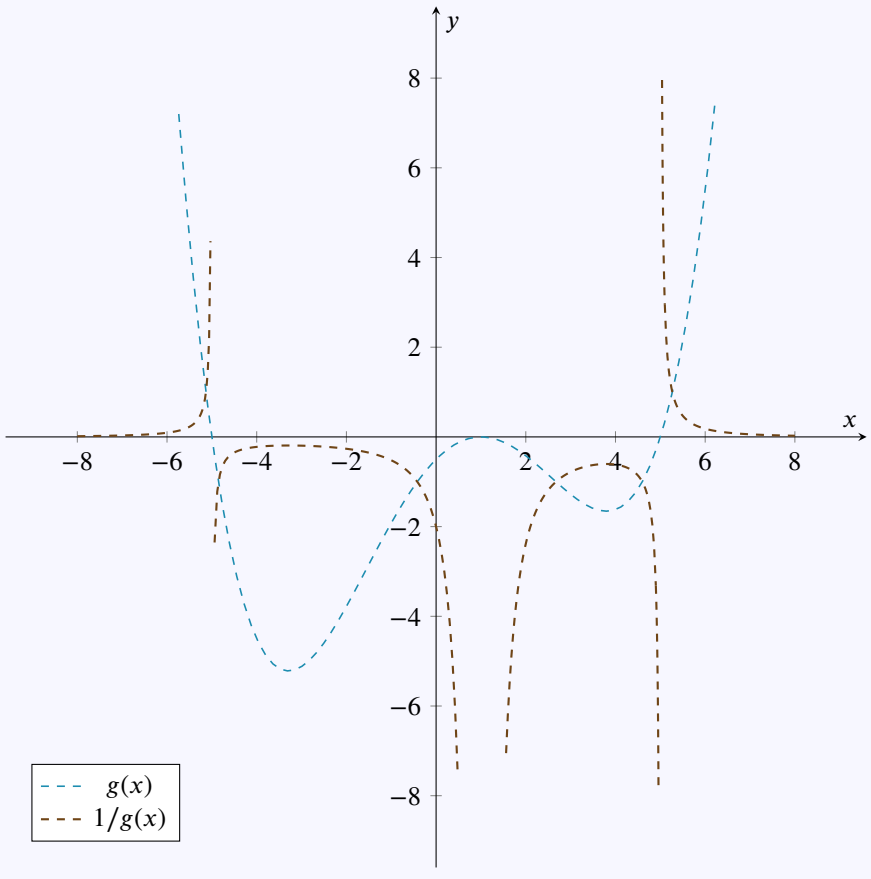
Als voorbereiding beschouwen we nu een speciale soort van rationale functies, waar de teller de simpele veelterm '1' is, en de noemer eender welke veelterm. Dergelijke functies noemen we ook wel *omgekeerde functies*.

Voorbeeld 1.7.2. De functie $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$ heeft geen limiet in $x = 0$, omdat $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f_1(x) = -\infty$ terwijl $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f_1(x) = +\infty$. Maar, $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ omdat x^2 (en dus ook $\dfrac{1}{x^2}$) altijd positief is (in de buurt van 0 zou voldoende zijn, maar x^2 is natuurlijk overal positief).

Om in het algemeen het limietgedrag van $\dfrac{1}{g(x)}$ te kennen, is het dus voldoende om de nulpunten, maar ook het tekenverloop te kennen van $g(x)$ in de buurt van zijn nulpunten.

Op de onderstaande tekening is $g(x) = (x+5)(x-5)(x-1)^2/50$ getekend, samen met $1/g(x)$. We zien dat de limiet in $x = 1$ gelijk is aan $-\infty$ (omdat $g(x)$ er een dubbel nulpunt heeft en negatief is in de omgeving van -1, terwijl er in $x = \pm 5$ telkens enkelvoudige nulpunten zijn, waar $g(x)$ dus van teken verandert, en $1/g(x)$ dus geen limiet heeft (maar enkel een linker- en een rechterlimiet).

Let op: de functie g is een veelterm, ook al staat ze niet in de vorm $g(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$: ze kan in deze vorm gebracht worden door het product uit te werken. In de huidige vorm kunnen we echter rechtstreeks de nulpunten van g aflezen.



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.3)

1.7 Limieten van veeltermen en rationale functies

Voor het vervolg is het erg belangrijk om de volgende eigenschappen in te zien (die op de vorige tekening duidelijk worden geïllustreerd):

Eigenschap 1.7.3. (a) Een veelterm $f(x)$ kan alleen van teken veranderen in een nulpunt.

(b) Een veelterm verandert niet altijd van teken in een nulpunt.

(c) Een rationale functie $f(x)$ kan alleen van teken veranderen in een nulpunt van teller of noemer.

(d) Een rationale functie verandert niet altijd van teken in een nulpunt van teller of noemer.

Eigenschap 1.7.4. (Limieten van omgekeerde functies in $x = c$ met $c \in \mathbb{R}$)

Zij f een reële functie en $c \in \mathbb{R}$. Dan geldt dat

(a) $\dfrac{1}{f(c)}$ heeft altijd hetzelfde teken als $f(c)$ (voor $f(c) \neq 0$)

(b) $\dfrac{1}{f(x)}$ heeft *mogelijk* een oneindige limiet in $x = c$ $\iff$ $f(c) = 0$

(c) $\dfrac{1}{f(x)}$ heeft *echt* een oneindige limiet in $x = c$ $\iff$ $f(c) = 0$ en $f(x)$ verandert niet van teken in de buurt van c

In gevallen (b) en (c) van de vorige eigenschap, gaat de functie wel naar oneindig, maar enkel in geval (c) heeft f zeker en vast een limiet. In (b) kan het immers zijn dat rechter- en linkerlimiet van elkaar verschillen, zodat de limiet niet bestaat.

Voor limieten van rationale functies van de vorm $p(x)/q(x)$, zijn limieten in punten $x = c$, met $c \in \mathbb{R}$, iets ingewikkelder.

- Als $q(c) \neq 0$, dan is de limiet gewoon de functiewaarde $f(c)$.
- Als $q(c) = 0$, dan:
  - Als $p(c) \neq 0$, dan gelden dezelfde regels als in eigenschap **??**.
  - Als $p(c) = 0$, dan hebben we een onbepaaldheid: $\dfrac{0}{0}$, en moet je teller en noemer ontbinden in factoren, en de factoren $(x - c)$ wegdelen.

Door in het laatste geval teller en noemer te ontbinden in factoren en vervolgens de factor $(x-c)$ wegdelen, zal ofwel de teller, ofwel de noemer (of zelfs allebei) geen nulpunt hebben in $x = c$, zodat je de gevallen daarvoor kan toepassen, zonder een onbepaaldheid van de vorm $0/0$ te komen.

Wanneer de veeltermen erg ingewikkeld worden, is ontbinden in factoren niet echt makkelijk, en bestaan er alternatieven. Eén van de mogelijkheden is bijvoorbeeld de regel van de l'Hôpital, die we later pas tegenkomen nadat we de techniek van *afleiden* hebben gezien.

Oefening 1.7.1.

1. Beschouw de functie $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$, en $c = 1$. Dan is c een nulpunt van de noemer, maar niet van de teller. Het volstaat dus om naar het tekenverloop van de noemer te kijken. Het teken van $x - 1$ verschilt links en rechts van het nulpunt 1, en dus bestaat de limiet niet. De functie f heeft wel een verticale asymptoot in $x = 1$ (zie verder). De rechterlimiet van f in 1 is $+\infty$, de linkerlimiet is $-\infty$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.7 Limieten van veeltermen en rationale functies

2. Beschouw de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$, en $c = 1$. Dan is c een nulpunt van zowel teller als noemer. Als we gebruiken dat $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, dan vinden we dat

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = x - 1$$

en dus bijgevolg is de limiet in 1 gelijk aan 0.

3. Beschouw de functie $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$, en $c = 1$. Dan is c een nulpunt van zowel teller als noemer. Als we gebruiken dat $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, dan vinden we dat

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{x - 1}$$

en dus bijgevolg is de limiet in 1 gelijk aan 0: aan beide kanten van het nulpunt gaat $\dfrac{1}{x - 1}$ naar 0.

1.7.3 Asymptoten

Wanneer we schetsen van grafieken willen maken, is het vaak handig om bepaalde karakteristieken van functies te onderzoeken: waar liggen de nulpunten, waar stijgt of daalt ze, en zo verder. Eén van die karakteristieken zijn de *asymptoten*. Voor de volledigheid herhalen we de definitie van een asymptoot. Losjes geformuleerd is een asymptoot een rechte die de grafiek van een functie nadert 'zonder ze te raken'.

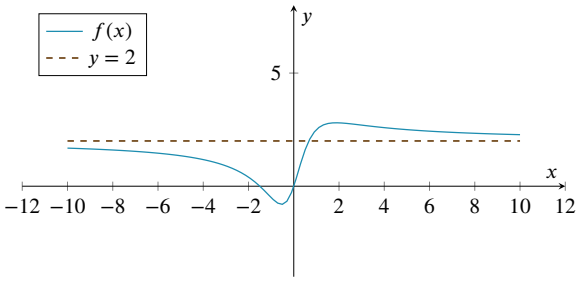
Definitie 1.7.2. Een **asymptoot** van een functie (of de grafiek ervan) is een rechte lijn waar de grafiek van die functie willekeurig dicht toe nadert als het argument van de functie naar een limiet nadert, eventueel plus of min oneindig.

Je kan dus zeggen dat een rechte een asymptoot is 'van een functie', of 'van de grafiek van een functie': beide betekenen hetzelfde.

1.7.4 Horizontale asymptoten

Horizontale asymptoten komen we tegen bij het nemen van limieten van functies voor $x \to +\infty$ of $x \to -\infty$. Hierboven zijn we in eigenschap **??** al asymptoten tegengekomen: in het geval $n = m$, gaan de functiewaarden naar het quotiënt van de hoogstegraadscoëfficiënten, a_n/b_m. Dus de grafiek van de functie zal ook steeds dichter en dichter naar de horizontale rechte $y = \dfrac{a_n}{b_m}$ naderen.

Hieronder tonen we een voorbeeld met de functie $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{x^2 + 1}$: de horizontale asymptoot is in dit geval de horizontale rechte $y = 2$.

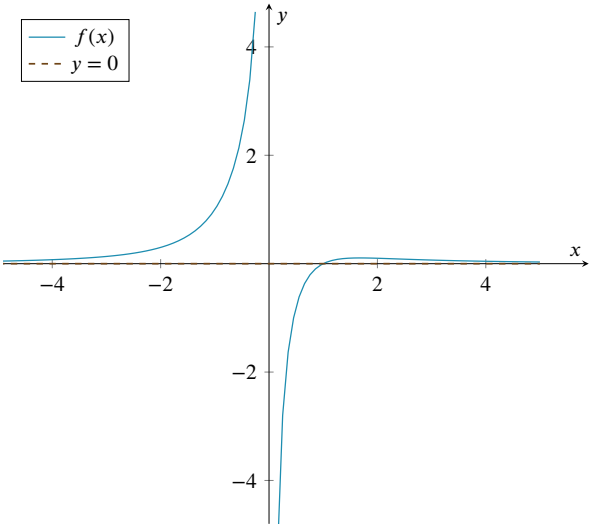


We zien dat de grafiek van de functie inderdaad steeds dichter en dichter bij de horizontale rechte op hoogte 2 komt, voor steeds groter wordende x-waarden, positief of negatief.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.3)

1.7 Limieten van veeltermen en rationale functies

In het geval dat $n < m$ in eigenschap **??**, dan hebben we ook een horizontale asymptoot. In dit geval gaat het steeds om dezelfde rechte, namelijk de x-as (met vergelijking $y = 0$). Hieronder tonen we een voorbeeld met de functie $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3+x}$:



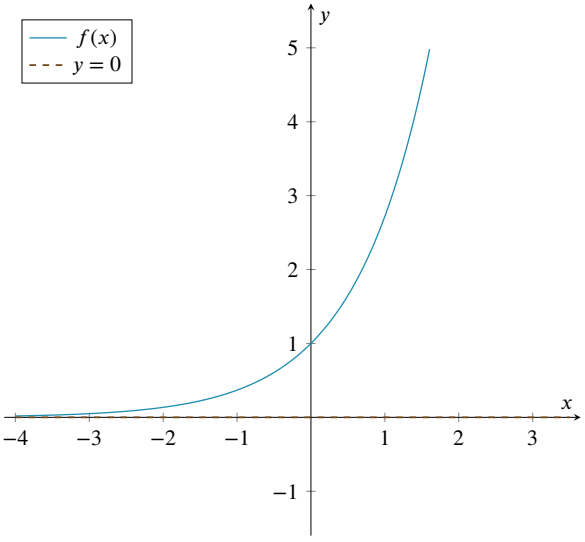
We zien duidelijk dat opnieuw de grafiek van de functie voor grote x-waarden, zowel positief als negatief, naar de x-as gaat.

In het algemeen hebben we de volgende concrete definitie voor horizontale asymptoten.

Definitie 1.7.3 (Horizontale asymptoten)**.** De rechte met vergelijking $y = a$ is een **horizontale asymptoot** van (de grafiek van) f als en slechts als

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \text{ of } \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

In de bovenstaande voorbeelden van rationale functies was aan beide voorwaarden voldaan, maar het kan ook gebeuren dat er slechts aan één van de voorwaarden voldaan is. Zo heeft de functie $f(x) = e^x$ de x-as als horizontale asymptoot, omdat $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, maar is het zo dat $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

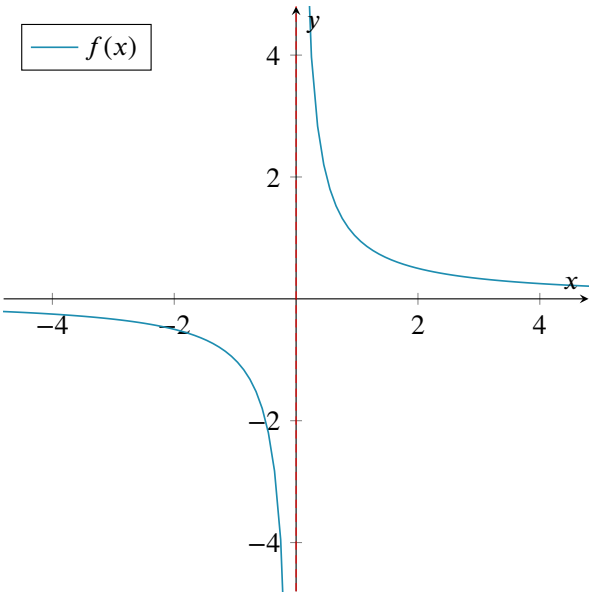


CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.3)

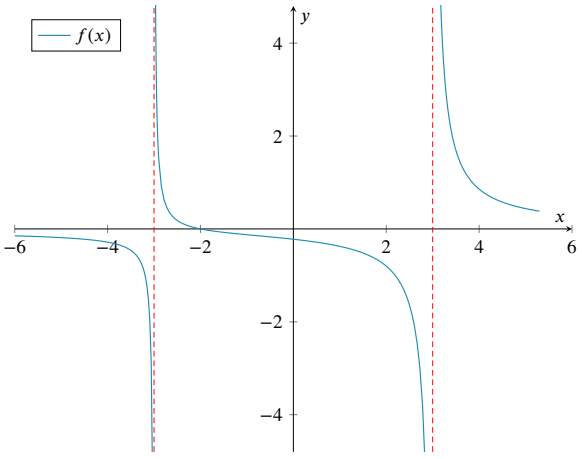
1.7 Limieten van veeltermen en rationale functies

1.7.5 Verticale asymptoten

Grafieken van (rationale) functies kunnen naar (min) oneindig gaan als we de limiet nemen naar een reëel getal. In dat geval spreken we van een verticale asymptoot. Een klassiek voorbeeld is de functie $f(x) = \frac{1}{x}$, die naar oneindig gaat als we de limiet nemen naar het punt $x = 0$.



Een ander voorbeeld is de functie $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$: deze heeft zelfs twee verticale asymptoten: op $x = \pm 3$.

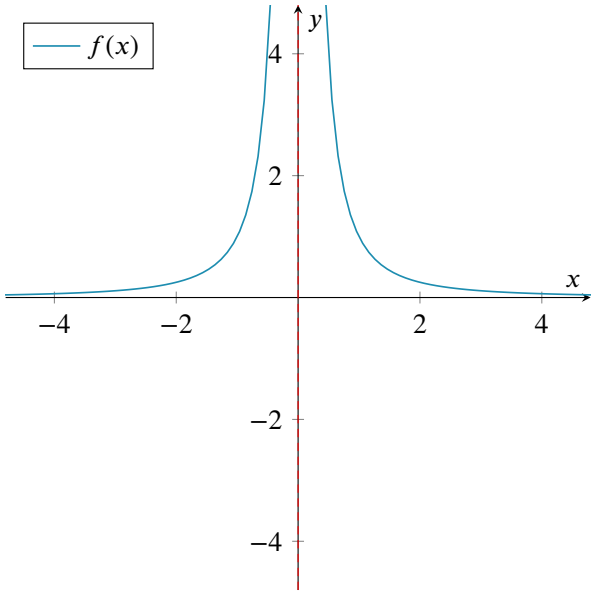


In deze voorbeelden gaat de grafiek naar oneindig aan beide kanten van de asymptoot, maar gaan de functiewaarden links van de asymptoot naar $-\infty$, en rechts van de asymptoot naar $+\infty$. *Let op*: dit wilt zeggen dat de limiet van de functie in deze punten niet gedefinieerd is, omdat de linkerlimiet en rechterlimiet verschillen van elkaar.

Het kan ook zijn dat de grafiek aan beide kanten van de asymptoot dezelfde limiet hebben, zoals het geval is met de functie $f(x) = \frac{1}{x^2}$. In dit geval is de limiet van de functie dus wel gedefinieerd.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.3)

1.7 Limieten van veeltermen en rationale functies



We kunnen verticale asymptoten in het algemeen als volgt definiëren:

Definitie 1.7.4 (Verticale asymptoten)**.** De rechte met vergelijking $x = a$ is een verticale asymptoot van (de grafiek van) f als en slechts als

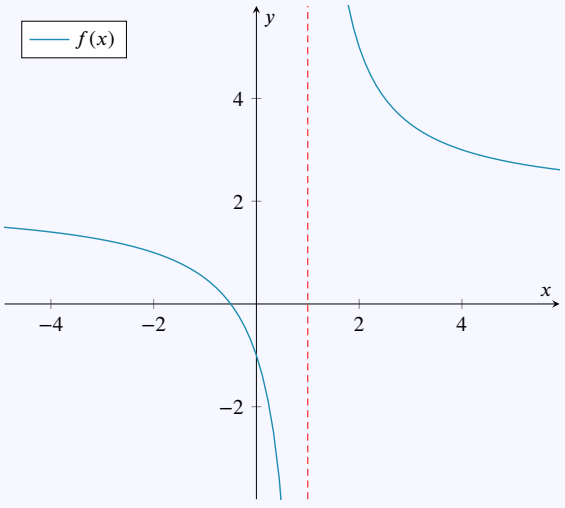
$$\lim_{\substack{x\to a\\<}} = +\infty \text{ of } \lim_{\substack{x\to a\\>}} = +\infty \text{ of } \lim_{\substack{x\to a\\<}} = -\infty \text{ of } \lim_{\substack{x\to a\\>}} = -\infty$$

Om te weten te komen of een *rationale functie* naar oneindig gaat, is het belangrijk om te kijken naar de nulpunten. Let op: niet elk nulpunt van de noemer levert echter een verticale asymptoot op, zoals volgend voorbeeld aantoont.

Voorbeeld 1.7.3. Bepaal de verticale asymptoten van de volgende functies:

1. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

Uitwerking: De noemer heeft als nulpunt $x = 1$: dit is geen nulpunt van de noemer, en dus heeft de grafiek een verticale asymptoot in $x = 1$.



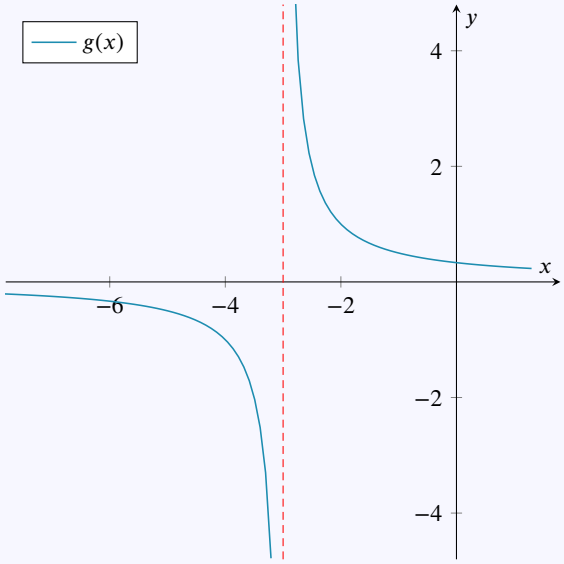
1.7 Limieten van veeltermen en rationale functies

2. $g(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$

Uitwerking: De noemer heeft als nulpunten $x = \pm 3$. *Maar* slechts één van deze nulpunten levert een asymptoot op. Via de identiteit $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ vinden we dat

$$g(x) = \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$$

en dus is er in feite slechts één nulpunt van de noemer. In dit punt heeft de functie een verticale asymptoot in $x = -3$. Let wel op dat de functie f niet gedefinieerd is voor $x = 3$, omdat dit een nulpunt was van de originele schrijfwijze van $f(x)$ en dus niet tot het domein van f behoorde.



1.7.6 Schuine asymptoten

Naast horizontale en verticale asymptoten, kunnen rationale functies nog één soort asymptoot hebben. We onderzoeken eerst een voorbeeld.

Voorbeeld 1.7.4. Beschouw de functie $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-2}$. Voor grote waarden van x kan je zelf de volgende limieten nagaan:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x-2} = +\infty \text{ en } \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x-2} = -\infty$$

Als we de Euclidische deling uitvoeren, dan vinden we dat

$$\frac{x^2-1}{x-2} = \frac{\text{deeltal}}{\text{deler}} = \text{quotiënt} + \frac{\text{rest}}{\text{deler}} = (x+2) + \frac{3}{x-2}$$

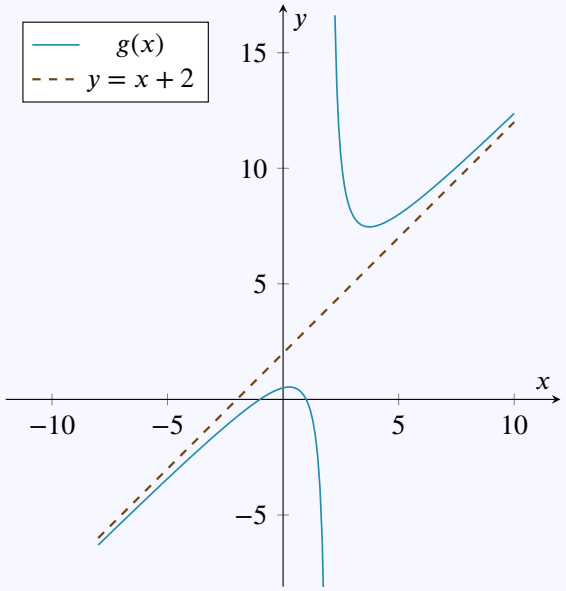
Omdat nu $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x-2}$, geldt dat

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-1}{x-2} - (x+2) \right) = 0$$

Met andere woorden: hoe groter de x-waarden worden (voor negatieve en positieve x), hoe kleiner het verschil tussen $f(x)$ en de rechte $x+2$ wordt. We zeggen dat de rechte $y = x+2$ een *schuine asymptoot* is van de functie f. Hieronder tonen we de grafiek van f en de asymptoot:

CC BY-NC-SA 4.0

1.7 Limieten van veeltermen en rationale functies



In het algemeen definiëren we schuine asymptoten als volgt:

Definitie 1.7.5 (Schuine asymptoten)**.** De rechte met vergelijking $y = ax + b$ (met $a \neq 0$) is een **schuine asymptoot** van f als en slechts als

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0 \text{ of } \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$$

Voor gegeven functies f kunnen de parameters a en b uit deze definitie bepaald worden door de volgende uitdrukkingen:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax)$$

Als deze limieten niet bestaan, of geen reële getallen zijn, dan heeft f geen schuine asymptoot. Voor rationale functies is het echter vaak makkelijker om de Euclidische deling uit te voeren.

1.7.7 Samenvatting rationale functies

Hieronder geven we een kort overzicht van de eigenschappen die we gezien hebben over rationale functies en hun asymptoten:

Eigenschap 1.7.5. Stel dat $f(x) = \dfrac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$, met $n, m \in \mathbb{N}$ en $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$. Dan geldt:

- Als $m < n$, dan is de x-as een horizontale asymptoot van f.
- Als $m = n$, dan is de rechte met vergelijking $y = \dfrac{a_n}{b_m}$ een horizontale asymptoot van f.
- Als $m = n + 1$, dan heeft de grafiek van f een schuine asymptoot.
- Als $m > n + 1$, dan heeft f geen horizontale en geen schuine asymptoot.
- Als a een nulpunt van de noemer van f is en we door ontbinden in factoren de factor $x - a$ niet

CC BY-NC-SA 4.0

1.7 Limieten van veeltermen en rationale functies

volledig kunnen wegdelen in de noemer, dan is de (linker-, rechter-) limiet voor $x \to a$ oneindig. De grafiek van f heeft een verticale asymptoot met vergelijking $x = a$.

- Als a een nulpunt van de noemer van f is en we kunnen door ontbinden in factoren de factor $x - a$ volledig wegdelen in de noemer, dan is de limiet voor $x \to a$ eindig. De grafiek van de functie vertoont een opening voor $x = a$.
- Als a geen nulpunt van de noemer van f is, dan is de limiet voor $x \to a$ gelijk aan de functiewaarde $f(a)$.

1.7.8 Irrationale functies

Soms kunnen we ook quotiënten van functies die *geen* veeltermen zijn tegenkomen. Een voorbeeld is

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$$

Dergelijke functies noemen we ook wel **irrationale functies**.

Stel dat we van de bovenstaande functie de limiet $\lim_{x\to 2} f(x)$ willen berekenen. Dan geeft rechtstreeks invullen de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$. Een mogelijkheid om dit op te lossen en deze limiet te bepalen, is door (in dit geval) de teller te vermenigvuldigen met de toegevoegde uitdrukking van de teller, zodanig dat we op het merkwaardig product $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ uitkomen:

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\,\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{x+2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

In deze laatste uitdrukking kunnen we de limiet voor x gaande naar 2 rechtstreeks invullen, zonder op een onbepaaldheid te komen. Het resultaat is

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{4}$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.3)

1.7.A Inoefenen asymptoten

Oefening 1.7.2. Bepaal alle asymptoten van de volgende functies.

1. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-9}$

Uitwerking: We herschrijven de uitdrukking voor $f(x)$ met de rekenregel $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-9} = \frac{x^3}{(x-3)(x+3)}$$

De nulpunten van de noemer zijn dus $x = \pm 3$. Dit zijn geen nulpunten van de teller, en dus heeft de functie de verticale asymptoten $x = \pm 3$. Omdat de graad van de teller twee groter is dan de graad van de noemer, heeft f geen horizontale of schuine asymptoten.

2. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Uitwerking: Het nulpunt van de noemer is $x = -1$. Dit is geen nulpunt van de teller, en dus heeft f een verticale asymptoot $x = -1$. De graad van de teller is gelijk aan de graad van de noemer, en dus heeft f een horizontale asymptoot $y = 1$ (verhouding van de hoogstegraadscoëfficiënten van teller en noemer). Omdat de graad van de teller *niet* één groter is dan de graad van de noemer, heeft f geen schuine asymptoten.

3. $f(x) = \dfrac{3x-5}{x+2}$

Uitwerking: Het nulpunt van de noemer is $x = -2$. Dit is geen nulpunt van de teller, en dus heeft f een verticale asymptoot $x = -2$. De graad van de teller is gelijk aan de graad van de noemer, en dus heeft f een horizontale asymptoot $y = 3$ (verhouding van de hoogstegraadscoëfficiënten van teller en noemer). Omdat de graad van de teller *niet* één groter is dan de graad van de noemer, heeft f geen schuine asymptoten.

4. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

Uitwerking: Het nulpunt van de noemer is $x = -1$. Dit is geen nulpunt van de teller, en dus heeft f een verticale asymptoot $x = -1$. De graad van de teller is één groter dan de graad van de noemer, en dus heeft f geen horizontale asymptoot maar wel een schuine asymptoot met vergelijking $y = ax + b$. De parameters a en b kunnen bepaald worden door de volgende limieten uit te rekenen (of door de Euclidische deling uit te voeren):

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax)$$

Hiermee vinden we

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

door opnieuw naar het quotiënt van de hoogstegraadstermen te kijken. En dan is

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x+1} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

Dus de schuine asymptoot heeft vergelijking $y = x$.

5. $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^3-x}$

Uitwerking: We ontbinden eerst teller en noemer: voor de noemer vinden we $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$ en dus de nulpunten van de noemer zijn 0, 1 en -1. Voor de teller kan je de discriminant methode gebruiken en dan vind je $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$. Dus

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^3-x} = \frac{(x+3)(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x+3}{x(x+1)}$$

De functie f heeft dus verticale asymptoten met vergelijkingen $x = 0$ en $x = -1$. Omdat de graad van de noemer één groter is dan de graad van de teller, heeft f ook een horizontale asymptoot met vergelijking $y = 0$ en is er geen schuine asymptoot.

CC BY-NC-SA 4.0

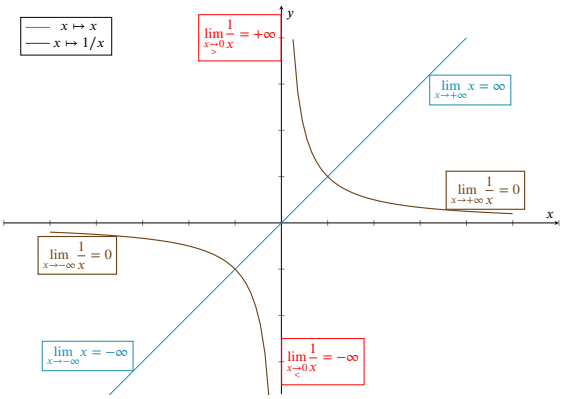
1.8 Enkele basislimieten

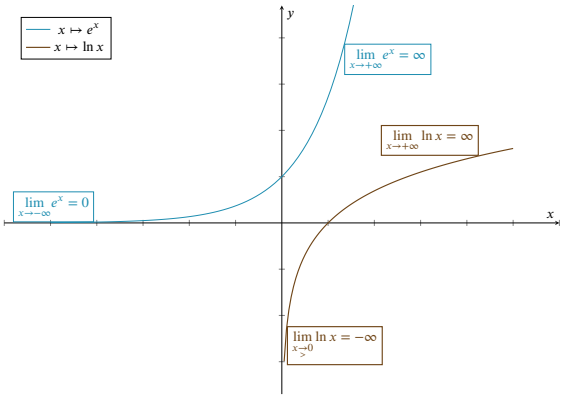
We bepalen hier op basis van de grafieken volgende *basislimieten*:

Definitie 1.8.1 (Basislimieten)**.** Volgende **basislimieten** definiëren we op basis van hun grafieken:

	$x \to -\infty$	$x \overset{<}{\to} 0$	$x \to 0$	$x \overset{>}{\to} 0$	$x \to +\infty$
$x \mapsto x$	$-\infty$	0	0	0	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	0	$-\infty$	X	$+\infty$	0
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$x \mapsto e^x$	0	1	1	1	$+\infty$
$x \mapsto \ln x$	X	X	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Merk op dat $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ niet bestaat omdat de linkerlimiet verschilt van de rechterlimiet.
Ook $\lim_{x\to-\infty} \ln x$ en $\lim_{x\overset{<}{\to}0} \ln x$ bestaan niet omdat ln niet gedefinieerd is voor negatieve getallen.





Oefening 1.8.1. Bepaal volgende basislimieten:

1. $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$
2. $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$
4. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$
5. $\lim_{x\overset{>}{\to}0} \frac{1}{x} = +\infty$
6. $\lim_{x\overset{<}{\to}0} \frac{1}{x} = -\infty$
7. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
8. $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
9. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
10. $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
11. $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
12. $\lim_{x\to-\infty} \ln x =$ bestaat niet

Uitwerking: Voor negatieve x bestaat $\ln x$ niet, en dus bestaat $\ln x$ niet *in de buurt van* $-\infty$

13. $\lim_{x\overset{>}{\to}0} \ln x = -\infty$
14. $\lim_{x\overset{<}{\to}0} \ln x =$ bestaat niet
15. $\lim_{x\to0} \ln x = -\infty$

Uitwerking: Omdat 0 een linkerrandpunt is van het domein, volstaat het dat de rechterlimiet bestaat.

CC BY-NC-SA 4.0

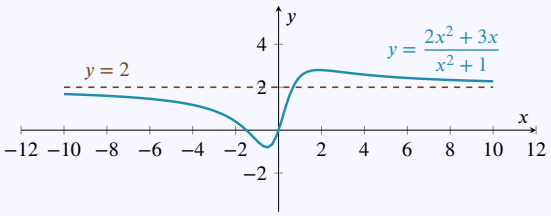
1.9 Asymptoten

Soms nadert de grafiek van een functie willekeurig dicht een rechte, die we dan asymptoot noemen:

Definitie 1.9.1. Een **asymptoot** is een rechte waartoe de grafiek van een functie willekeurig dicht nadert.

Men spreekt van **horizontale asymptoot (HA), verticale asymptoot (VA) of schuine asymptoot (SA)** naargelang de rechte respectievelijk horizontaal, verticaal of schuin is.

Voorbeeld 1.9.1. De functie $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{x^2+1}$ heeft de rechte $y = 2$ als (horizontale) asymptoot.

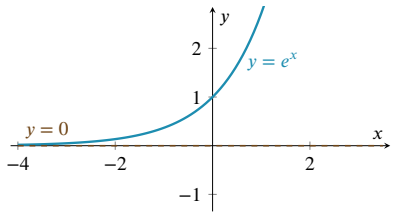


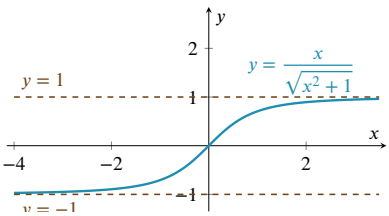
De grafiek van de functie komt inderdaad steeds dichter en dichter bij de horizontale rechte op hoogte 2 voor steeds groter wordende x-waarden, positief of negatief.

Eigenschap 1.9.1. Een functie f heeft rechte $y = a$ als **horizontale asymptoot** als en slechts als

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad \text{of / en} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

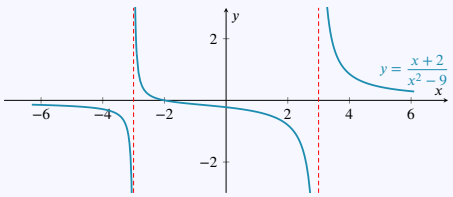
In bovenstaand voorbeeld bestonden beide limieten, en waren ze bovendien aan elkaar gelijk. Er bestaan ook functies waar slechts één van beide limieten bestaat, of waar ze wel beide bestaan maar verschillende waarden hebben. In dat geval heeft de functie twee horizontale asymptoten: één links en één rechts.





Nulpunten van de noemer kunnen leiden tot oneindige limieten, en dus tot een verticale asymptoot:

Voorbeeld 1.9.2. De functie $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-9}$ heeft de twee rechten $x = \pm 3$ als verticale asymptoten.



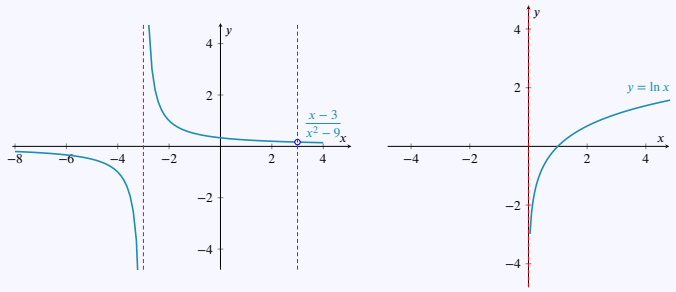
Verticale asymptoten komen enkel voor bij linker- of rechterlimieten die oneindig worden:

1.9 Asymptoten

Eigenschap 1.9.2. Een functie f heeft rechte $x = a$ als **verticale asymptoot** als en slechts als

$$\lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = \pm\infty \quad \text{of / en} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = \pm\infty$$

Voorbeeld 1.9.3. Niet elk nulpunt van de noemer moet aanleiding geven tot een verticale asymptoot, en niet elke verticale asymptoot komt voor in een nulpunt van de noemer.
Zo heeft de logaritmische functie wel een verticale asymptoot $x = 0$ maar geen noemer, en dus zeker geen nulpunten van de noemer.
En de functie $x \mapsto \dfrac{x-3}{x^2-9}$ heeft in $x = 3$ wel een nulpunt in de noemer, maar geen verticale asymptoot.



De noemer x^2-9 heeft nulpunten $x = \pm 3$, maar slechts één van deze nulpunten levert een asymptoot op. Inderdaad, via het merkwaardig product $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ volgt dat

$$\frac{x-3}{x^2-9} = \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$$

en dus is er in feite slechts één nulpunt van de noemer. In dit punt heeft de functie een verticale asymptoot $x = -3$. Let wel op dat de functie f niet gedefinieerd is voor $x = 3$, omdat dit een nulpunt was van de originele schrijfwijze van $f(x)$ en dus niet tot het domein van f behoorde.

Opmerking 1.9.1.

Een *eindige limiet* voor x *naar oneindig* geeft een horizontale asymtoot, en een *oneindige (linker-of rechter-)limiet* voor x naar $a \in \mathbb{R}$ geeft een verticale asymptoot.

Merk op: hoewel je kan argumenteren dat ook een *raaklijn* de grafiek willekeurig dicht nadert (namelijk in het raakpunt), noemen we een raaklijn toch *geen asymptoot*. Een asymptoot moet de grafiek ergens 'naderen zonder te raken', en dat kan enkel 'in oneindig', langs de x-as voor een HA of langs de y-as voor een VA. Als bij het naderen zowel langs de $x-as$ als langs de $y-as$ naar oneindig gegaan wordt, spreekt men van een schuine asymptoot, maar dat geval behandelen we hier niet.

Oefening 1.9.1. Bepaal de horizontale en verticale asymptoten van de volgende functies.

1. $f(x) = 2x + 1$

Uitwerking: Dit is een schuine rechte, en heeft geen horizontale of verticale asympoten.

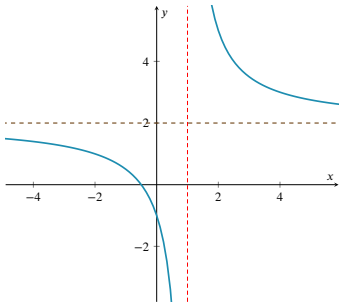
2. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

Uitwerking: De noemer heeft als nulpunt $x = 1$, en dit is geen nulpunt van de noemer. Dus is de rechte $x = 1$ een **verticale asymptoot**.

De limiet naar $+\infty$ en naar $-\infty$ is telkens 2, dus de rechte $y = 2$ is een **horizontale asymptoot**.

CC BY-NC-SA 4.0

1.9 Asymptoten



3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Uitwerking: Hier is $x = 1$ een nulpunt van zowel noemer als teller, er is geen verticale asymptoot in $x = 1$. Er zijn ook geen horizontale asymptoten.

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{1 - x^2}$

Uitwerking: Hier is $x = 1$ een nulpunt van zowel noemer als teller, er is geen verticale asymptoot in $x = 1$. Er is wel een verticale asymptoot in $x = -1$, en de rechte $y = 1$ is een horizontale asymptoot.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.3)

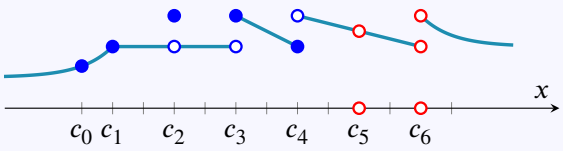
1.10 Continue functies

Intuïtief willen we een functie *continu* noemen in een punt c van haar domein als haar grafiek in de buurt van c een kromme is die je kan tekenen 'zonder je pen op te heffen', dus zonder gaten of sprongen. Dat betekent dus dat de functiewaarde in c gelijk is aan de waarde waar $f(x)$ naar toe gaat als x naar c gaat. En dat is dan weer precies de definitie van de 'limiet van f als x naar c gaat'. Die karakterisering gebruiken we om wiskundig te *definiëren* wat het betekent voor een functie om *continu* te zijn in een punt:

Definitie 1.10.1. Een functie f is **continu in een punt** a als en slechts als $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Een functie f is **continu op haar domein** (of kortweg **continu**) als en slechts als ze continu is in *elk* punt a van haar *domein*.

Voorbeeld 1.10.1 (Aflezen van continuïteit op de grafiek van een functie)**.**



Deze functie f is

continu in c_0	want $f(c_0)$ is gelijk aan de limiet van f in c_0 en $f(c_0)$ ligt dus op de (verder vloeiende) grafiek.
continu in c_1	net zoals voor c_1. De knik in de grafiek heeft geen belang.
niet continu in c_2	want de limiet in c_2 bestaat wel, maar verschilt van $f(c_2)$
niet continu in c_3	de linker- en rechterlimiet verschillen.
niet continu in c_4	de linker- en rechterlimiet verschillen.
niet continu in c_5	want f is niet gedefinieerd in c_5.
niet continu in c_6	want f is niet gedefinieerd in c_6.

Merk op: het heeft geen belang of de functiewaarde al dan niet gelijk is aan de rechterlimiet (zoals in c_3) of de linkerlimiet (zoals in c_4). Het heeft evenmin belang of de grafiek al dan niet een sprong lijkt te maken in een punt waar de functie niet gedefinieerd is (zoals in c_5 of c_6).

Opmerking 1.10.1.

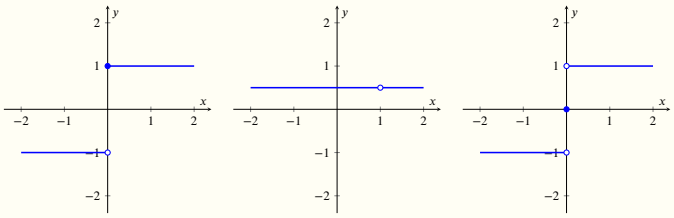
Een functie is dus ***niet*** **continu in een punt** a als $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, waarbij drie gevallen voorkomen:

- de **limiet** $\lim_{x\to a} f(x)$ **bestaat niet**. In de praktijk is dat dikwijls omdat de linkerlimiet verschilt van de rechterlimiet, en dat verschil is dan de sprong die de functie maakt in punt $x = a$.
  Een eenvoudig voorbeeld is de functie $x \mapsto \begin{cases} -1 \text{ als } x < 0 \\ 1 \text{ als } x \geq 0 \end{cases}$.
- de **functiewaarde** $f(a)$ **bestaat niet**. Dit betekent dat a niet behoort tot het domein van f, en het begrip continuïteit is enkel gedefinieerd voor $a \in \operatorname{dom} f$. Door de functie f ook te definiëren in het punt $x = a$ als $f(a) \overset{\text{def}}{=} limxgaf(x)$ bekom je een *continue uitbreiding* van f. Men noemt dergelijk punt a waar f niet gedefinieerd is, maar eigenlijk toch eenvoudig te definiëren is ook wel een *ophefbare discontinuïteit*.
  Een eenvoudig voorbeeld is de functie $x \mapsto \dfrac{x-1}{2x-2}$.
- **beide leden bestaan maar zijn onderling verschillend**. Dit betekent typisch dat de verwachte functiewaarde $\lim_{x\to a} f(x)$ is, maar dat de functie een sprong maakt naar $f(a)$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.10 Continue functies

Een enigszins artificieel voorbeeld is de functie $x \mapsto \begin{cases} -1 \text{ als } x \leq 0 \\ 0 \text{ als } x = 0 \\ 1 \text{ als } x > 0 \end{cases}$.



En een functie is dus enkel ***niet* continu** als ze niet continu is in minstens één punt ***van haar domein***.

Volgende subtiliteit doet zich voor bij het begrip continuïteit van een functie: enkel de punten van het domein zijn van belang, en punten *buiten het domein* kunnen geen reden zijn waarom een functie niet continu zou zijn. Zo is functie $x \mapsto 1/x$ bijvoorbeeld *wel* een continue functie hoewel ze een sprong lijkt te maken van $-\infty$ naar $+\infty$ in het punt $x = 0$. Maar, het punt $x = 0$ behoort *niet* tot het domein van de functie $x \mapsto 1/x$, en het punt $x = 0$ telt dus *niet* als tegenvoorbeeld. Het begrip 'continuïteit van een functie' gaat enkel na of er boven aaneensluitende stukken van het domein geen sprongen zijn. Op plaatsen waar een gat zit in het domein zegt het begrip continuïteit niets.

In sommige handboeken wordt de subtiliteit vermeden door enkel te spreken over functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ of $I \to \mathbb{R}$ met I een interval. Maar dan kan je dus niet spreken over de continuïteit van de functie $x \mapsto 1/x$ die enkel gedefinieerd is op $\mathbb{R}_0$.

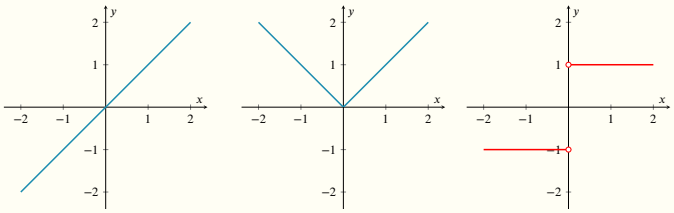
In de praktijk zijn functies die je met één formule kan opschrijven (i.e. functievoorschriften van toepassing op het volledige domein) meestal continu:

Eigenschap 1.10.1. Volgende functies zijn altijd continu *op hun domein*:

(a) Veeltermfuncties, wortelfuncties, goniometrische, exponentiële en logaritmische functies.

(b) Som, verschil, product, quotiënt en samenstelling van continue functies.

Opmerking 1.10.2. Pas op: deze eigenschap geldt jammer genoeg niet altijd voor *continuïteit in een punt*, omdat soms punten *verdwijnen* uit het domein bij operaties met functies. Zo is een quotiënt van functies niet gedefinieerd in de nulpunten van de noemer, en dus kan het quotiënt daar ook niet continu zijn. De functies $x \mapsto x$ en $x \mapsto |x|$ zijn bijvoorbeeld allebei continu in $x = 0$, maar het quotiënt is *niet gedefinieerd* in het punt $x = 0$, en maakt daar een sprong:

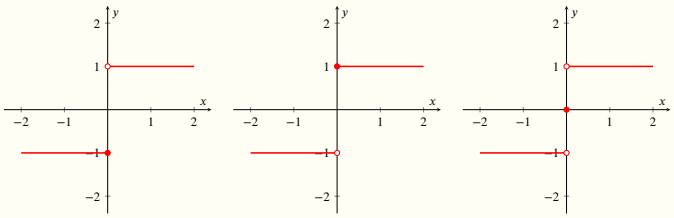


Volgens onze afspraken is de functie $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x}{|x|}$ *niet continu in het punt* $x = 0$, want de functiewaarde $f(0)$ bestaat niet wegens de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$. Maar omdat de sprong in $x = 0$ niet tot het domein behoort is de functie volgens de definitie toch *continu op haar domein*.

Er is wel geen *continue uitbreiding* tot heel $\mathbb{R}$ mogelijk. Zo is geen van volgende functies continu:

CC BY-NC-SA 4.0

1.10 Continue functies



Merk dus op dat bij continuïteit het precieze *domein* van een functie erg belangrijk is.

Voor *continue* functies geldt de belangrijke eigenschap dat *de limiet van de functie gelijk is aan de functie van de limiet*, of ook dat je de limiet *door de functieaanroep* kan schuiven:

Eigenschap 1.10.2. Voor een functie f die continu is in een punt a geldt dat $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Voor een functie g zodat $\lim_{x\to a} g(x) \in \operatorname{dom} f$ met f continu in het punt $\lim_{x\to a} g(x)$ geldt dat

$$\lim_{x\to a} f\left(g(x)\right) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

Deze eigenschap wordt zeer dikwijls gebruikt bij het berekenen van limieten.

Voorbeeld 1.10.2. $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ want $x \mapsto e^x$ is continu in $x = 0$.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.3)