KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Xoverzicht: Integralen

(Versie 2026/10/26H.6)

Inhoudsopgave

1.1 Intro Integralen

Sommigen beweren dat er 24 manieren zijn om integralen te leren of te herhalen.

We behandelen er hier maar één:

(1) Je leest en studeert de definitie en basisintegralen voor een wat abstracte - en in eerste instantie niet zo belangrijke - definitie, maar met veel eenvoudige en concrete oefeningetjes op basisintegralen

(2) Je leest en studeert de substitutieregel.

(3) Je leest en studeert de methode van partiële integratie.

(4) Je leest en studeert de bepaalde integralen.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Definitie onbepaalde integraal

We zetten een volgende stap in de wiskundige processie van *definieer-iets-nieuws* gevolgd door *en-keer-het-proces-om*. We leerden optellen, en kort daarna aftrekken. We leerden vermenigvuldigen, en kort daarna delen. Hetzelfde voor kwadrateren gevolgd door vierkantswortel trekken, en exponentiële functies gevolgd door logaritmische functies. Nu zullen we leren het proces van afgeleiden berekenen *omkeren*: we zoeken niet de afgeleide f' van een functie f, we zoeken van welke functie F deze functie f de afgeleide *is*.

Gegeven een functie f, zoeken we dus (alle) functies F zodat $F' = f$. Later zullen we uitleggen *waarom* deze omkering-van-de-afgeleide een erg belangrijk begrip is in de wiskunde en in alle wetenschappen.

Voorbeeld 1.2.1.

Geef voor volgende functies f telkens één of meerdere functies F zodat $F' = f$.

1. Een functie met als afgeleide functie $f : x \mapsto e^x$ is $F : x \mapsto e^x$

Uitwerking: Inderdaad, want $(e^x)' = e^x$. Merk op dat ook $(e^x + 7)' = e^x$. De afgeleide van elke functie $F_c : x \mapsto F_c(x) = e^x + c$, met $c \in \mathbb{R}$ is telkens gelijk aan $f : x \mapsto f(x) = e^x$.

2. Een functie met als afgeleide functie $f : x \mapsto x$ is $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

Uitwerking: Inderdaad, want $(\frac{1}{2}x^2)' = \frac{1}{2}2x = x$. Merk op dat ook $(\frac{1}{2}x^2 + 3)' = x$. De afgeleide van elke functie $F_c : x \mapsto F_c(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$, met $c \in \mathbb{R}$ is telkens gelijk aan $f : x \mapsto f(x) = x$.

We hebben een nieuwe naam nodig voor 'een functie waarvan de afgeleide f is'. We noemen dergelijke functie een *primitieve* functie van f, waarbij het woord primitief gebruikt wordt in de betekenis van *oorspronkelijk*. Een primitieve functie is dus een *oorspronkelijke* functie waarvan je vertrokken bent bij het afleiden.

Definitie 1.2.1 (Primitieve functie)**.**

Een **primitieve functie** van een functie f is een functie F waarvoor geldt dat

$$F' = f.$$

Voorbeeld 1.2.2.

1. $x \mapsto e^x$ is een primitieve functie van $x \mapsto e^x$

2. $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ is een primitieve functie van $x \mapsto x$

3. $x \mapsto x^3$ is een primitieve functie van $x \mapsto 3x^2$

4. $x \mapsto 42x$ is een primitieve functie van $x \mapsto 42$

Opmerking 1.2.1.

Volgens deze definitie kunnen we ook zeggen dat een afleidbare functie f een primitieve functie is van f'. Bijvoorbeeld $f(x) = x^3$ is een primitieve functie van $f'(x) = 3x^2$.

We moeten er rekening mee houden dat een functie meerdere primitieve functies kan hebben. Uit de rekenregels van afgeleiden volgt dat twee functies die op een constante na gelijk zijn aan elkaar dezelfde afgeleide hebben: $(F + c)' = F' + c' = F'$. Als F een primitieve functie is van f, dus als $F' = f$, dan geldt ook $(F + c)' = F' = f$. Bijgevolg zijn ook de functies $F + c$ allemaal primitieve functies van f. Zijn dit *alle* primitieve functies van f? Het antwoord is ja, zoals blijkt uit volgende eigenschap:

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Definitie onbepaalde integraal

Eigenschap 1.2.1 (Functies met gelijke afgeleiden zijn gelijk op een constante na)**.**

Twee afleidbare functies F_1 en F_2 op een interval I met *gelijke afgeleiden*

$$F_1'(x) = F_2'(x) \quad \text{voor alle } x \in I,$$

zijn *gelijk op een constante na*. Dat betekent dat er een constante c bestaat zodat

$$F_1(x) = F_2(x) + c \quad \text{voor alle } x \in I.$$

Met *één* primitieve functie F van f kennen we dus *alle* primitieve functies van f: ze zijn allemaal van de vorm $F + c$, met $c \in \mathbb{R}$. Omdat er geen *unieke* primitieve functie is van f, spreken we over de *verzameling* van alle primitieve functies van f:

Definitie 1.2.2 (Onbepaalde integraal)**.**

De **onbepaalde integraal** van een functie f, genoteerd $\int f(x)\,dx$, is de *verzameling van alle primitieve functies* van f. Omdat alle primitieve functies van f aan elkaar gelijk zijn op een constante noteren we ook

$$\int f(x)\,dx \overset{\text{notatie}}{=} F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

met F een (willekeurige) primitieve functie van f.

We noemen $f(x)$ de **integrand**, x de **integratievariabele** en c de **integratieconstante**.

Het zoeken (of 'berekenen') van $\int f(x)\,dx$ noemt men het **primitiveren** of **integreren** van $f(x)$.

Voorbeeld 1.2.3.

1. $\int e^x\,dx = e^x + c$
2. $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$
3. $\int 3x^2\,dx = x^3 + c$
4. $\int 42\,dx = 42x + c$

Voorbeeld 1.2.4.

De integratievariabele wordt niet steeds met de letter x genoteerd, we kunnen ook schrijven dat

- $\int e^\theta\,d\theta = e^\theta + c$
- $\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2 + c$
- $\int 3t^2\,dt = t^3 + c$
- $\int 42\,dR = 42R + c$

Opmerking 1.2.2.

Een primitieve functie is dus maar bepaald op een constante na. Via een trucje wordt dat probleem hier omzeild door de onbepaalde integraal de *verzameling* te noemen van al deze primitieve functies. In de praktijk denkt iedereen over de onbepaalde integraal als 'een functie die slechts op een constante na bepaald is', of 'een functie waar je steeds een willekeurige constante bij kan optellen'.

Afleiden en integreren heffen elkaar op.

Inderdaad, als we een functie f eerst afleiden en deze afgeleide dan integreren krijgen we (op een constante

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Definitie onbepaalde integraal

na) terug f:

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

omdat f een primitieve functie is van f'.

Als we f eerst integreren

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \text{ met } F \text{ een primitieve functie van } f, \quad c \in \mathbb{R}$$

en dan het resultaat weer afleiden, krijgen we terug f :

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x).$$

Dit vatten we samen in volgende eigenschap:

Eigenschap 1.2.2 (Afleiden en integreren heffen elkaar op)**.**

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

Met de $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right)\,dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,dx = f(x)$$

We bekijken deze eigenschap ook in de notatie met differentialen:

Opmerking 1.2.3 (Werken met differentialen)**.**

De uitdrukking dx (of dt etc.) wordt in sommige cursussen en handboeken beschouwd als een symbool zonder "echte betekenis", dat enkel de naam van de integratievariabele aangeeft.

Men kan het echter ook beschouwen als een *differentiaal*. Eén van de vele mogelijke definities zegt dat dx een 'basisdifferentiaal' is, en dat per definitie voor een afleidbare functie f de differentiaal van f gelijk is aan

$$df \overset{\text{def}}{=} f'(x)dx.$$

Dit begrip, of deze notatie, leidt tot een kortere formulering van de eigenschappen van integralen. Bij de studie van de *bepaalde* integraal, zal de differentiaal ook een concretere betekenis krijgen.

Door beide leden van $df \overset{\text{def}}{=} f'(x)dx$ te integreren, krijgen we de gelijkheid

$$\int df = \int f'(x)dx$$

en omdat $\int f'(x)dx = f(x) + c, c \in \mathbb{R}$ volgt dat

$$\int df = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Definitie onbepaalde integraal

Bijgevolg heft de integraal de differentiaal dus op, op een integratieconstante na.

Omgekeerd, links en rechts de differentiaal nemen in de formule $\int f(x)dx = F(x) + c$ geeft:

$$d\int f(x)dx = d(F(x)+c) = dF = F'(x)dx = f(x)dx$$

en dus

$$\boxed{d\int f(x)dx = f(x)dx}$$

Bijgevolg heft de differentiaal de integraal op (waarbij geen integratieconstante optreedt).

Opmerking 1.2.4.

We kunnen dit process grafisch voorstellen (waarbij we de integratieconstante negeren):

$$\underset{\text{(integraal)}}{\int f(x)dx} \quad \underset{\text{integreren}}{\overset{\text{afleiden}}{\rightleftarrows}} \quad \underset{\text{(functie)}}{f} \quad \underset{\text{integreren}}{\overset{\text{afleiden}}{\rightleftarrows}} \quad \underset{\text{(afgeleide functie)}}{f'}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Basisintegralen

De onbepaalde integraal van een functie f is per definitie $\int f(x)dx = F(x)+c$ met $F' = f$. Dit betekent dat integreren en differentiëren elkaars inverse zijn. Voor een aantal functies is het zeer gemakkelijk om de onbepaalde integraal te vinden: namelijk voor de uitkomsten van de basisafgeleiden. Inderdaad, neem als voorbeeld $(\sin x)' = \cos x$. Stel dat je een functie F zoekt waarvan de afgeleide gelijk is aan het rechterlid, dus gelijk aan $f(x) = \cos x$. De formule voor de afgeleide zegt dan dat $F(x) = \sin x$ als afgeleide $f(x) = \cos x$ heeft. Het volstaat dus om de reeks basis*afgeleiden* van *rechts naar links* te lezen om een hele reeks basis*integralen* te vinden. In onderstaand overzicht is de afgeleide van het rechterlid steeds de integrand in het linkerlid.

Eigenschap 1.3.1 (Basisintegralen)**.** (met $c \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}, r \neq -1, a \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1$)

$$\begin{array}{lcllcl}
\displaystyle\int 0\,dx & = & c & \displaystyle\int dx & = & x+c \\
\displaystyle\int x^r\,dx & = & \dfrac{1}{r+1}x^{r+1}+c & \displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx & = & \ln|x|+c \\
\displaystyle\int e^x\,dx & = & e^x+c & \displaystyle\int a^x\,dx & = & \dfrac{a^x}{\ln a}+c \\
\displaystyle\int \sin x\,dx & = & -\cos x+c & \displaystyle\int \cos x\,dx & = & \sin x+c \\
\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx & = & \tan x+c & \displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx & = & -\cot x+c \\
\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx & = & \mathrm{bgsin}\,x+c & \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx & = & \mathrm{bgtan}\,x+c
\end{array}$$

Opmerking 1.3.1.

Een *basisintegraal* uitrekenen is eenvoudig want die zoek je op in de tabel. Merk op dat je dus wel snel moet kunnen herkennen *of* een bepaalde integraal al dan niet een basisintegraal is. Je moet bijvoorbeeld geen berekeningsmethode zoeken voor $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$, want deze integraal staat in de tabel.

Voorbeeld 1.3.1. Basisintegralen:

(a) $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3+c$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$

(c) $\displaystyle\int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2}+c = -\frac{1}{2x^2}+c$

(d) $\displaystyle\int 7^x\,dx = \frac{7^x}{\ln 7}+c$

De rekenregels voor som en scalaire veelvouden zijn analoog aan deze voor afgeleiden:

Eigenschap 1.3.2. Voor integreerbare functies f en g en $a, b \in \mathbb{R}$ gelden volgende formules:

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\int af(x)\,dx & = & \displaystyle a\int f(x)\,dx & \text{(veelvoud)} \\
\displaystyle\int (f(x)+g(x))\,dx & = & \displaystyle\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx & \text{(som)} \\
\displaystyle\int (af(x)+bg(x))\,dx & = & \displaystyle a\int f(x)\,dx+b\int g(x)\,dx & \text{(lineaire combinatie)}
\end{array}$$

De rekenregel voor de som noemt men ook *integratie door splitsing*.

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Basisintegralen

Voorbeeld 1.3.2. $\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2\frac{x^2}{2} + c = x^2 + c$, met $c \in \mathbb{R}$.

Als we de uitwerking heel nauwkeurig zouden noteren krijgen we:

$$\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2\left(\int x\,dx\right) = 2\left(\frac{x^2}{2} + c\right) = x^2 + 2c = x^2 + c', \text{ met } c' \in \mathbb{R}.$$

We noteren dit echter korter, zonder expliciet $c' = 2c$ te stellen: $\int 2x\,dx = 2\frac{x^2}{2} + c = x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$.

We veralgemenen vorig voorbeeld: Als F een primitieve functie is van f, dan is

$$2\int f(x)\,dx = 2(F(x) + c) = 2F(x) + 2c, \quad c \in \mathbb{R}$$

We stellen $2c = c'$. Als c een willekeurige constante is, dan is $c' = 2c$ ook een willekeurige constante.

$$2\int f(x)\,dx = 2F(x) + c', \quad c' \in \mathbb{R}$$

Omdat zowel c als c' willekeurige constanten voorstellen kunnen we ook noteren dat

$$2\int f(x)\,dx = 2F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Opmerking 1.3.2.

Als in de functie f meerdere letters voorkomen (bijvoorbeeld zowel de letter t als x), dan is steeds één letter de integratieveranderlijke, en beschouwen we de andere letter(s) als constanten of parameters. Welke letter de integratieveranderlijke is wordt aangeduid door het symbool dx of dt:

$$\int (tx^2)\,dx \neq \int (tx^2)\,dt.$$

Immers, $\int (tx^2)\,dx = t\int x^2\,dx = \frac{tx^3}{3} + c$ en $\int (tx^2)\,dt = x^2\int t\,dt = \frac{x^2t^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

Oefening 1.3.1. Bereken volgende onbepaalde integralen:

1. $\int x^{-2}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Basisintegraal $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$ voor $r = -2$

2. $\int e^x\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Dit is een basisintegraal.

3. $\int 8^x\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Dit is een basisintegraal.

4. $\int x^3 \cdot \sqrt{x}\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Basisintegralen

5. $\int \frac{3}{1+x^2}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met $a = 3$ en $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{bgtan}\,x + c$ is een basisintegraal.

6. $\int \frac{1}{2\cos^2 x}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met $a = \frac{1}{2}$ en $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$ is een basisintegraal.

7. $\int 2^8 x\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met $a = 2^8$ en $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$.

8. $\int 2y\,dy = \ldots\ldots$

Uitwerking: We hebben hier enkel de letter x vervangen door y.

9. $\int ax\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Hier is a een constante en $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met a een constante.

10. $\int tx\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Hier is t is een constante.

11. $\int tx\,dt = \ldots\ldots$

Uitwerking: Hier is t de integratievariabele en x dus een constante.

12. $\int \cos y\,dy = \ldots\ldots$

Uitwerking: Want $(\sin y)' = \cos y$. Dit is een basisintegraal.

13. $\int \sin t\,dt = \ldots\ldots$

Uitwerking: Want $(\cos t)' = -\sin t$. Dit is een basisintegraal.

14. $\int 2^{3x}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Gebruik $2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$. Dit kan ook met substitutie (zie verder).

15. $\int e^{2x}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Gebruik $e^{2x} = (e^2)^x$ en $\ln(e^2) = 2$. Dit kan ook met substitutie (zie verder).

Merk op dat je ook kan schrijven $e^{2x} = (e^x)^2$, maar dan kan je toch nog *niet* de formule voor $\int x^2 dx$ toepassen.

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Basisintegralen

Oefening 1.3.2. Bereken volgende onbepaalde integralen door splitsing:

1. $\int \left(3x^2 + 2x + 1\right)\, dx = \ldots\ldots$
2. $\int \left(3x^2 + 2x + \cos x + 7^x\right)\, dx = \ldots\ldots$
3. $\int \dfrac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + 21}{x^3}\, dx = \ldots\ldots$

Soms moet je een beetje creatief zijn om door splitsing een integraal te schrijven als een som van basisintegralen:

Oefening 1.3.3. Bereken volgende onbepaalde integralen:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\, dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int 1\, dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \ldots\ldots$
2. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int 1\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \ldots\ldots$

Waarschuwing 1.3.1 (Veelgemaakte fouten)**.**

- De onbepaalde integraal heeft volgende eigenschappen WEL:

  som $\displaystyle\int (\cos x + x^2)\, dx = \int \cos x\, dx + \int x^2\, dx = \sin x + \frac{x^3}{3} + c$

  constante factor $\displaystyle\int 3x^2\, dx = 3\int x^2\, dx = 3\,\frac{x^3}{3} + c = x^3 + c$

- Een onbepaalde integraal heeft volgende eigenschappen NIET:

  integraal van *product* $\displaystyle\int \cos x \cdot x^2\, dx = \cancel{\int \cos x\, dx \cdot \int x^2\, dx}$

  integraal van *samenstelling* $\displaystyle\cancel{\int (\cos x)^2\, dx = \frac{(\cos x)^3}{3} + c}$

  Er bestaan *geen algemene regels*, maar wel een aantal *technieken* die we verder zullen bespreken.

Oefening 1.3.4. Zijn volgende gelijkheden juist of fout? Verklaar.

1. Fout $\displaystyle\int (x \cdot x)\, dx \stackrel{?}{=} \left(\int x dx\right) \cdot \left(\int x\, dx\right)$
2. Fout $\displaystyle\int (2 \cdot x)\, dx \stackrel{?}{=} \left(\int 2 dx\right) \cdot \left(\int x\, dx\right)$
3. Juist $\displaystyle\int (2 \cdot x)\, dx \stackrel{?}{=} 2 \cdot \left(\int x\, dx\right)$
4. Fout $\displaystyle\int x^2\, dx \stackrel{?}{=} \left(\int x\, dx\right)^2$

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Integratie door substitutie

We leggen in de voorbeelden die volgen integratie door substitutie telkens uit aan de hand van twee verschillende schrijfwijzes. De eerste schrijfwijze is eenvoudiger om toe te passen. Het volstaat dat je deze schrijfwijze kan gebruiken. Indien je echter gewoon bent om de tweede schrijfwijze te gebruiken, dan kan je deze telkens ook nalezen in de voorbeelden.

Voorbeeld 1.4.1. Berekening van de integraal $\int \cos 3x \, dx$.

We weten dat $\int \cos x \, dx = \sin x + c$, want $(\sin x)' = \cos x$. We stellen ons nu de vraag waaraan $\int \cos 3x \, dx$ gelijk is.

- Merk op dat we de 3 *niet* uit de cosinus kunnen halen, want $\cos 3x \neq 3 \cos x$.
- We kunnen ook niet gewoon x vervangen door $3x$ in $\int \cos x \, dx = \sin x + c$, want $\int \cos 3x \, dx \neq \sin 3x + c$. Volgens de kettingregel is de afgeleide van $\sin 3x$ immers gelijk aan $3 \cos 3x$, en dus niet gelijk aan $\cos 3x$.

Om deze onbepaalde integraal correct uit te rekenen gaan we niet x maar $3x$ als integratievariabele nemen, om over te gaan tot een basisintegraal. Dit wordt de substitutiemethode genoemd. In de eerste schrijfwijze wordt expliciet de substitutie $u = 3x$ uitgevoerd. In de tweede schrijfwijze wordt er geen nieuwe naam gegeven aan $3x$, maar wordt de integratievariabele achter de d herschreven, wat mogelijk is omdat $dx = \frac{1}{3} \, d(3x)$.

Schrijfwijze 1:

Stel $u = 3x$, dan is $du = d(3x) = 3 \, dx$ (want $df = f'(x)dx$), dus $dx = \frac{1}{3} \, du$. Substitueer $u = 3x$ en $dx = \frac{1}{3} \, du$ in $\int \cos 3x \, dx$, dan vind je

$$\int \cos 3x \, dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{3} \, du = \frac{1}{3} \int \cos u \, du = \frac{1}{3} \sin u + c = \frac{1}{3} \sin 3x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Door het uitvoeren van deze substitutie hebben we $\int \cos 3x \, dx$ herschreven als de basisintegraal $\frac{1}{3} \int \cos u \, du$.

Schrijfwijze 2:

$$\int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \int \cos 3x \, d(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

We kunnen dit veralgemenen tot $\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$, met $a \in \mathbb{R}_0$.

In het vorige voorbeeld hebben we een eenvoudige substitutie uitgevoerd van de vorm $u = ax$. In het volgende voorbeeld bekijken we een substitutie van de vorm $u = ax + b$.

Voorbeeld 1.4.2. Berekening van de integraal $\int (2x + 5)^7 \, dx$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Integratie door substitutie

De integraal $\int (2x+5)^7\,dx$ kan in principe berekend worden door de zevende macht uit te rekenen, ofwel met distributiviteit via $(2x+5)^7 = (2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)$, ofwel met het Binomium van Newton, en dan term per term te integreren. Dat kan, maar het is wel erg veel rekenwerk.

Je kan het uitwerken van de macht vermijden, door op te merken dat de integrand een beetje lijkt op de basisintegraal

$$\int x^7\,dx = \frac{x^8}{8} + c$$

Het is fout om in bovenstaande uitdrukking x gewoon te vervangen door $2x+5$, want $\int (2x+5)^7\,dx \neq \frac{(2x+5)^8}{8} + c$. Volgens de kettingregel is de afgeleide van $\frac{(2x+5)^8}{8}$ immers gelijk aan $2(2x+5)^7$, en dus niet gelijk aan $(2x+5)^7$.

Om rekening te houden met de kettingregel gaan we $u = 2x+5$ als integratievariabele nemen en voeren we deze substitutie uit als volgt:

Schrijfwijze 1:

Stel $u = 2x+5$, dan is $du = d(2x+5) = 2dx$, dus $dx = \frac{1}{2}du$. Dit substitueren we in $\int (2x+5)^7\,dx$:

$$\int (2x+5)^7\,dx = \int u^7\,\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int u^7\,du = \frac{1}{2}\frac{u^8}{8} + c = \frac{1}{16}(2x+5)^8 + c$$

Schrijfwijze 2:

$$\int (2x+5)^7\,dx = \frac{1}{2}\int (2x+5)^7\,d(2x+5) = \frac{1}{2}\frac{(2x+5)^8}{8} + c = \frac{1}{16}(2x+5)^8 + c$$

De uitkomst is al direct ontbonden in factoren, dat is veel bondiger en duidelijker dan wanneer we de zevende macht hadden uitgerekend en de resulterende veelterm van graad 7 term per term hadden geïntegreerd. Als je ook zou geïnteresseerd zijn in nulpunten van de uitkomst is deze ontbinding in factoren zeker nuttig.

In volgende oefening kan je telkens de integraal berekenen met een eenvoudige substitutie van de vorm $u = ax$ of $u = ax + b$.

Oefening 1.4.1. Bereken volgende integralen:

1. $\int e^{2x}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int 2^{3x}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\int \frac{4}{2x-3}\,dx = \ldots\ldots$

We kijken nu naar de algemene regel voor *integratie door substitutie*, die steunt op de *kettingregel voor afgeleiden*.

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Integratie door substitutie

Eigenschap 1.4.1 (Substitutieregel)**.**

Als in een integraal $\int h(x)\,dx$ de *integrand* $h(x)$ kan beschouwd worden als

een *product* (dus $h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$)

van een *samengestelde* functie (dus $h_1(x) = f(u(x))$)

met de *afgeleide* van de *binnenste* functie (dus $h_2(x) = u'(x)$),

dan kunnen we de integraal reduceren tot

de *integraal van de buitenste functie* (dus $\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$).

In een formule: voor reële, afleidbare functies f en u waarvoor $f \circ u$ bestaat geldt

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int f(u(x))\,du(x) = \int f(u)\,du.$$

Het begrip 'substitutie' betekent 'vervanging' (denk aan het Frans: *substituer* of het Engels: *to substitute*) en duidt aan dat we de integratievariabele (vaak x) **vervangen** door een *nieuwe* 'variabele' (zeg u, die dus zelf een functie is van de *oorspronkelijke* variabele x: $u = u(x)$).

In een weliswaar tamelijk specifiek geval laat de substitutieregel dus toe om *een product in de integrand* weg te werken: namelijk op voorwaarde dat we het product kunnen beschouwen als het product van een samengestelde functie en van een afgeleide van de juiste functie (dus van de binnenste functie van de samenstelling). Dit proces is bovendien enkel zinvol als we vervolgens de resulterende integraal $\int f(u)\,du$ kunnen berekenen, bijvoorbeeld omdat het een basisintegraal is. We zullen ook voorbeelden tegenkomen waar de substitutieregel gebruikt wordt wanneer de integrand het quotiënt van 2 functies is. Een quotiënt kan je immers schrijven als een product: $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Om de substitutieregel in de praktijk te kunnen toepassen, is het erg belangrijk om enerzijds gemakkelijk samengestelde functies te kunnen herkennen, en bovendien ook gemakkelijk de afgeleiden van mogelijke *binnenste* functies te herkennen in de overblijvende factor.

Ter herhaling bestudeer je volgend voorbeeld:

Voorbeeld 1.4.3. Herken volgende uitdrukkingen als samenstellingen van twee functies:

1. $\sin x^2 = f(g(x))$ met $f(x) = \sin x$ en $g(x) = x^2$

2. $\sin^2 x = f(g(x))$ met $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sin x$

3. $(x+2)^2 = f(g(x))$ met $f(x) = x^2$ en $g(x) = x + 2$

4. $x^2 + 2 = f(g(x))$ met $f(x) = x + 2$ en $g(x) = x^2$

Merk op dat niet *alle* uitdrukkingen als samenstellingen moeten beschouwd worden:

(a) $\sin x \cos x$

(b) $x^2 \sin x$

(c) $\sin x + \cos x$

(d) $\cos^2 x + \sin^2 x$

zijn eerder *sommen* of *producten* dan samenstellingen.

Merk op dat (d) een ingewikkelde schrijfwijze is voor het getal 1.

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Integratie door substitutie

Volgend voorbeeld legt in detail de methode van substitutie uit:

Voorbeeld 1.4.4. Bereken $\int e^{x^2} 2x\, dx$.

Merk eerst op dat $e^{x^2} = e^{(x^2)}$ en $e^{x^2} \neq (e^x)^2 = e^{2x}$.

We herkennen de functie x^2 en haar afgeleide $2x$ in de integrand. Het ligt dus voor de hand de substitutie $u(x) = x^2$ te proberen, want van de functie $u(x)$ komen zowel de functie als de afgeleide voor in de formule van de substitutieregel. De enige mogelijkheid voor f is dan $f(u) = e^u$, want dan is $f(u(x)) = e^{x^2}$. We passen de substitutieregel toe:

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} 2x\, dx &= \int f(u(x))u'(x)\, dx \\
&= \int f(u(x))\, d(u(x)) \\
&= \int f(u)\, du \\
&= \int e^u\, du \\
&= e^u + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
&= e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Het gebruik van de substitutieregel wordt meestal korter genoteerd. We beschrijven twee mogelijkheden, schrijfwijze 1 met een *expliciete* nieuwe variabele u, en een nog kortere schrijfwijze 2 waar de subsitutie *impliciet* blijft en er geen nieuwe variabele expliciet wordt opgeschreven.

Schrijfwijze 1:

We schrijven niet expliciet $u(x) = x^2$ zoals hierboven, maar noteren korter $u = x^2$. Dan is $du = dx^2 = 2x dx$.
Deze beide uitdrukkingen *substitueer* je in $\int e^{x^2} 2x\, dx$ en je vindt

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} 2x\, dx &= \int e^u\, du && \text{(want } x^2 = u \text{ en } 2x\, dx = du\text{)} \\
&= e^u + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(basisintegraal)} \\
&= e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(terug als functie van } x\text{).}
\end{aligned}$$

Schrijfwijze 2:

Je geeft de binnenste functie *geen expliciete naam*, maar brengt ze achter de differentiaal:

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} 2x\, dx &= \int e^{x^2}\, dx^2 && \text{(want } dx^2 = 2x\, dx\text{)} \\
&= e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(want } \int e^u\, du = e^u\text{)}
\end{aligned}$$

Bestudeer ook volgende kleine variaties:

De integraal $\int e^{x^2} x\, dx$ kan je ook berekenen met substitutie:

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Integratie door substitutie

stel opnieuw $u = x^2$, dan is $du = dx^2 = 2x\,dx$. Hieruit haal je dat $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$.

Dit *substitueer* je in $\int e^{x^2} x\,dx$ en je vindt

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} x\,dx &= \int e^u\,\frac{1}{2} du && \text{(want } x^2 = u \text{ en } x\,dx = \tfrac{1}{2}\,du\text{)}\\
&= \frac{1}{2}\int e^u\,du && \text{(} \int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\text{)}\\
&= \frac{1}{2}e^u + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(basisintegraal)}\\
&= \frac{1}{2}e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(terug als functie van } x\text{)}
\end{aligned}$$

Op analoge wijze kan je ook $\int 3e^{x^2} x\,dx$ berekenen.

De integralen $\int e^{x^2}\,dx$ en $\int 2e^{x^2}\,dx$ kan je *niet* berekenen met substitutie.

Besluit: Omdat de afgeleide van x^2 gelijk is aan $2x$ is het nodig dat de factor x in de integrand voorkomt, anders kan je substitutie niet toegepassen, maar de constante factor mag willekeurig zijn.

We geven nog enkele voorbeelden van de substitutieregel.

Voorbeeld 1.4.5. Bereken $\int 3x^2(x^3+5)^7\,dx$

Schrijfwijze 1:

Stel $u = x^3 + 5$, dan is $du = d(x^3+5) = 3x^2\,dx$. Dit *substitueren* we in $\int 3x^2(x^3+5)^7\,dx$:

$$\int 3x^2(x^3+5)^7\,dx = \int u^7\,du = \frac{u^8}{8} + c = \frac{(x^3+5)^8}{8} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int 3x^2(x^3+5)^7\,dx = \int (x^3+5)^7\,d(x^3+5) = \frac{(x^3+5)^8}{8} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Voorbeeld 1.4.6. Bereken $\int 2x\cos(x^2)\,dx$

Schrijfwijze 1:

Stel $u = x^2$, dan is $du = dx^2 = 2x\,dx$. Dit *substitueren* we in $\int 2x\cos(x^2)\,dx$:

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \int \cos(u)\,du = \sin(u) + c = \sin(x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \int \cos(x^2)\,dx^2 = \sin(x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Integratie door substitutie

Voorbeeld 1.4.7. Bereken $\int 2\sin x\cos x\,dx$

In het inleidend voorbeeld is er eigenlijk met de substitutie $u(x) = \sin^2(x)$ gewerkt. Bij sommige integralen, zoals deze, zijn er meerdere goede keuzes voor de functie $u(x)$. We kunnen hier ook $u(x) = \sin x$ of $u(x) = \cos x$ gebruiken. We geven al deze mogelijkheden als voorbeeld:

Schrijfwijze 1:

a) Kies $u = \sin x$, dan is $du = d\sin x = \cos x\,dx$, en vind je

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = \int 2u\,du = u^2 + c = (\sin x)^2 + c = \sin^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

b) Kies $u = \cos x$, dan is $du = d\cos x = -\sin x\,dx$, dus $\sin x\,dx = -du$, en vind je

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = -\int 2u\,du = -u^2 + c = -(\cos x)^2 + c = -\cos^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Merk op dat beide oplossingen aan elkaar gelijk zijn want $\sin^2 x + c = 1 - \cos^2 x + c = -\cos^2 x + c'$, met $c' = 1 + c$ een andere (willekeurige) constante.

c) Kies $u = \sin^2 x$, dan is $du = d\sin^2 x = 2\sin\cos x\,dx$, en vind je

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = \int du = u + c = \sin^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

a) Schrijf met $d\sin x$: $\int 2\sin x\cos x\,dx = \int 2\sin x\,d\sin x = \sin^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

b) Schrijf met $d\cos x$: $\int 2\sin x\cos x\,dx = -\int 2\cos x\,d\cos x = -\cos^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

c) Schrijf met $d\sin^2 x$: $\int 2\sin x\cos x\,dx = \int d\sin^2 x = \sin^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Volgende voorbeelden berekenen enkele integralen die in sommige boeken en cursussen in de lijst van basisintegralen staan. We hebben er hier voor gekozen om te werken met een eenvoudige lijst basisintegralen, omdat onderstaande integralen met de substitutieregel gemakkelijk berekend kunnen worden.

Voorbeeld 1.4.8. Bereken volgende integralen (met $a \in \mathbb{R}_0$)

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{bgsin}\frac{x}{a} + c$ met $a > 0$

Deze integraal lijkt op de basisintegraal $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$. Ditmaal is niet de integratievariabele x vermenigvuldigd met een constante factor, maar is de constante 1 gewijzigd in de constante a^2. Toch willen we overgaan naar deze basisintegraal door de substitutieregel te gebruiken. Hiervoor moeten we de integraal eerst herschrijven zodat onder de wortel terug de constante 1 staat in plaats van a^2. Als $a > 0$ geldt dat $\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \int \frac{1}{a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a}\,dx$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Integratie door substitutie

Zo blijkt dat we de substitutie $u = \frac{x}{a}$ kunnen proberen om de integraal verder uit te rekenen.

Schrijfwijze 1:

Stel $u = \frac{x}{a}$, dan is $du = \frac{1}{a}\,dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \operatorname{bgsin} u + c = \operatorname{bgsin}\frac{x}{a} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,d\frac{x}{a} = \operatorname{bgsin}\frac{x}{a} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\operatorname{bgtan}\frac{x}{a} + c$

Deze integraal lijkt op de basisintegraal $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$. De constante 1 is gewijzigd in de constante a^2. Toch willen we overgaan naar deze basisintegraal door de substitutieregel te gebruiken. Hiervoor moeten we de integraal eerst herschrijven zodat er terug de constante 1 staat in plaats van a^2:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2(1 + (\frac{x}{a})^2)}\,dx$$

Zo blijkt dat we de substitutie $u = \frac{x}{a}$ kunnen proberen om de integraal verder uit te rekenen.

Schrijfwijze 1:

Stel $u = \frac{x}{a}$, dan is $du = \frac{1}{a}\,dx$, dus $dx = a\,du$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2(1 + (\frac{x}{a})^2)}\,dx &= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(1 + (\frac{x}{a})^2)}\,dx \\ &= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+u^2}\cdot a\,du \\ &= \frac{1}{a}\,\operatorname{bgtan} u + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{a}\,\operatorname{bgtan}\frac{x}{a} + c, \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2(1 + (\frac{x}{a})^2)}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(1 + (\frac{x}{a})^2)}\,d\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\,\operatorname{bgtan}\frac{x}{a} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + c$

Deze integraal kan berekend worden met substitutie, maar het vinden van de substitutie is niet voor de hand liggend. Daarom wordt deze integraal soms tot de basisintegralen gerekend.

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Integratie door substitutie

Schrijfwijze 1:

Stel $u = x + \sqrt{x^2+a}$, dan is $du = (1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}})\,dx = \dfrac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}\,dx$.

Bijgevolg is $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \dfrac{1}{u}\,du$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Schrijfwijze 2: wegens de complexe formule voor u werkt de tweede schrijfwijze hier niet.

(d) $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$

Het enige startpunt om $\displaystyle\int \tan x\,dx$ te kunnen berekenen lijkt het toepassen van de definitie:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

Twee kandidaat substituties zijn dan $u(x) = \sin x$ en $u(x) = \cos x$. Nemen we $u(x) = \sin x$, dan is $du = \cos x\,dx$. In de teller staat echter $\sin x\,dx$. Daarom kiezen we voor $u(x) = \cos x$:

Schrijfwijze 1:
Stel $u = \cos x$, dan is $du = d\cos x = -\sin x\,dx$, dus $\sin x\,dx = -du$.
Dit *substitueren* we in $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\cdot \sin x\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{\cos x}\,d\cos x = -\ln|\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Merk op dat we de substitutieregel $\displaystyle\int f(u(x))\cdot u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$ hebben toegepast met $f(u) = \dfrac{1}{u}$. Dan wordt de substitutieregel $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du$. Dit is een voorbeeld waar de substitutieregel gebruikt wordt om de integraal van een quotiënt van 2 functies te berekenen.

Wanneer en welke substitutie moet uitgevoerd worden is niet altijd even duidelijk. Hier geldt de regel "Oefening baart kunst". Volgende oefeningen behandelen enkele typische situaties.

Oefening 1.4.2.

1. $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\displaystyle\int (x^2+2)\sqrt{x-2}\,dx = \ldots\ldots$

We geven nog een wat merkwaardig voorbeeld van substitutie. Dit type integraal is ook belangrijk bij het berekenen van integralen van rationale functies, wat we hier niet verder behandelen.

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Integratie door substitutie

Voorbeeld 1.4.9. Bereken $\int \frac{1}{p\,x^2+q\,x+r}\,dx$ met $D = q^2 - 4pr < 0$.

De discriminant van de noemer is $D = q^2 - 4pr < 0$. We eisen dat deze discriminant negatief is zodat de noemer nergens nul wordt en de integrand bijgevolg overal gedefinieerd is.

Deze integraal kan door substitutie worden herleid tot de basisintegraal $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{bgtan} u + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Herschrijf hiervoor $p\,x^2 + q\,x + r$ als $a(1+u^2)$.

We illustreren dit met een concreet voorbeeld:

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 8}\,dx$$

De discriminant van de noemer is $16 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -16 < 0$.

$$x^2 - 4x + 8 = x^2 - 4x + 4 + 4 = (x-2)^2 + 4 = 4\left(\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + 1\right)$$

Stel $u = \frac{x-2}{2}$, dan is $du = \frac{1}{2}\,dx$ zodat

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 8}\,dx = \int \frac{1}{4(u^2+1)} \cdot 2du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\operatorname{bgtan}\frac{x-2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Opmerking 1.4.1. Integralen van het type $\int \frac{1}{p\,x^2+q\,x+r}\,dx$:

- met $D = q^2 - 4pr < 0$: zie bovenstaand voorbeeld
- met $D = q^2 - 4pr = 0$: noemer ontbinden in 2 identieke factoren en verder uitrekenen met substitutie
- met $D = q^2 - 4pr > 0$: noemer ontbinden in 2 verschillende factoren en splitsing in partieelbreuken. De methode van splitsen in partieelbreuken behandelen we hier niet.

CC BY-NC-SA 4.0

1.4.A Oefeningen substitutie

Oefening 1.4.3. Bereken volgende onbepaalde integralen via een geschikte substitutie:

1. $\int \frac{1}{x-3}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int \frac{1}{3-x}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\int \frac{x}{3-x}\,dx = \ldots\ldots$

Oefening 1.4.4. Bereken volgende onbepaalde integralen via een geschikte substitutie:

1. $\int (3x+5)\sqrt{3x+4}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int 4x\sqrt{x-1}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\int \cos x \sin^2 x\,dx = \ldots\ldots$
4. $\int \cos 2x \sin^3 2x\,dx = \ldots\ldots$
5. $\int \frac{\sin x \cos x}{2-\cos x}\,dx = \ldots\ldots$
6. $\int \frac{1}{2x^2+1}\,dx = \ldots\ldots$
7. $\int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \ldots\ldots$
8. $\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \ldots\ldots$
9. $\int \frac{3t}{1+t^2}\,dt = \ldots\ldots$
10. $\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \ldots\ldots$
11. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \ldots\ldots$
12. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dx = \ldots\ldots$
13. $\int \frac{2R}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dR = \ldots\ldots$
14. $\int \frac{R^3}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dR = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

1.4.A Oefeningen substitutie

Oefening 1.4.5. Bereken volgende onbepaalde integralen via een geschikte substitutie:

1. $\int \frac{1}{\sqrt{t^2+3}}\,dt = \ldots\ldots$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \ldots\ldots$
4. $\int \frac{x}{x^4+2x^2+2}\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Partiële integratie

De *productregel voor afgeleiden* leidt tot de interessante methode van '*partiële integratie*'.

Volgend inleidend voorbeeld berekent de integraal van een speciaal gekozen product:

Voorbeeld 1.5.1. Berekening van de integraal $\int xe^x\,dx$.

De productregel voor afgeleiden toepassen op het product $x \cdot e^x$ geeft

$$\begin{aligned} d(x \cdot e^x) &= (dx) \cdot e^x + x(de^x) \\ &= e^x dx + xe^x dx \end{aligned}$$

en de gelijkheid $d(x \cdot e^x) = e^x dx + xe^x dx$ integreren levert

$$\int d(x \cdot e^x) = \int e^x dx + \int xe^x dx.$$

De eerste twee integralen zijn direct te berekenen en wat overblijft is de gezochte integraal:

$$xe^x + c = e^x + \int xe^x dx$$

en bijgevolg is

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + c$$

We hebben dus - met wat geluk weliswaar - de integraal $\int xe^x\,dx$ uitgerekend.

De techniek van partiële integratie veralgemeent dit voorbeeld.

De regel voor partiële integratie volgt onmiddellijk uit de regel voor de afgeleide van het product van twee functies f en u.

$$(f(x) \cdot u(x))' = f'(x) \cdot u(x) + f(x) \cdot u'(x)$$

Inderdaad, als we beide leden integreren krijgen we

$$\int (f(x) \cdot u(x))'\,dx = \int f'(x) \cdot u(x)\,dx + \int f(x) \cdot u'(x)\,dx.$$

Na termen van lid veranderen krijgen we

$$\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = \int (f(x) \cdot u(x))'\,dx - \int f'(x) \cdot u(x)\,dx.$$

Omdat $\int (f(x) \cdot u(x))'\,dx = f(x) \cdot u(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$ wordt dit

$$\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = f(x) \cdot u(x) - \int f'(x) \cdot u(x)\,dx.$$

Dit is de formule voor partiële integratie, zo genoemd omdat de integraal $\int f(x) \cdot u'(x)\,dx$ gedeeltelijk, dus partieel, is geïntegreerd: we hebben al een deel van de primitieve functie, namelijk $f(x) \cdot u(x)$, en er blijft nog een ander - hopelijk eenvoudiger te berekenen - deel over, namelijk $\int f'(x) \cdot u(x)\,dx$. We hebben $f(x) \cdot u(x)$ genoteerd en niet $f(x) \cdot u(x) + c$, omdat het resultaat van de berekening van de tweede term van het rechterlid, $\int f'(x) \cdot u(x)\,dx$, ook slechts op een constante na bepaald is.

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Partiële integratie

Eigenschap 1.5.1 (Partiële integratie).

Als in een integraal $\int h(x)\,dx$ de *integrand* $h(x)$ kan beschouwd worden als

een *product* (dus $h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$)

van een functie $f(x)$ (dus $h_1(x) = f(x)$)

en van de *afgeleide* van een functie $u(x)$ (dus $h_2(x) = u'(x)$),

dan kunnen we de integraal schrijven als

$$\int f(x)u'(x)\,dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,dx.$$

Dus voor reële, afleidbare functies f en u geldt

$$\boxed{\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,dx},$$

of korter genoteerd:

$$\int f \cdot u'\,dx = f \cdot u - \int f' \cdot u\,dx,$$

of met differentialen genoteerd:

$$\boxed{\int f\,du = f \cdot u - \int u\,df}.$$

In oefeningen wordt dikwijls $\overset{P.I.}{=}$ geschreven om het gebruik van partiële integratie aan te duiden.

Men schrijft de regel voor partiële integratie dikwijls met functies f en g (in plaats van f en u zoals hierboven):

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$

of met functies u en v:

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du.$$

We hebben de eigenschap geformuleerd met f en u omwille van de parallel met de substitutieregel

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int f(u(x))du(x) = \int f(u)du \qquad \text{(substitutie)},$$

waar de rol van f en u minder symmetrisch is. Voor partiële integratie is de rol van beide factoren wel symmetrisch, en is de notatie met f en g, ofwel u en v ook gebruikelijk. Het is belangrijk dat je met elke versie van deze formules kan werken, onafhankelijk van de letters die gebruikt worden.

Voorbeeld 1.5.2. Bereken $\int xe^x\,dx$.

- **Schrijfwijze 1:** $\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,dx$

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Partiële integratie

Stel $f(x) = x$ en $u'(x) = e^x$

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u'(x)}\, dx,$$

dan is $f'(x) = 1$ en $u(x)$ kunnen we vinden door $u'(x)$ te integreren: $u(x) = \int u'(x)\, dx = \int e^x\, dx = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$.
Er zijn dus oneindig veel mogelijke functies u, maar we nemen deze met $c = 0$.
Partiële integratie geeft dan

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u'(x)}\, dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u(x)}\, dx = xe^x - e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- **Schrijfwijze 2:** $\int f\, du = f \cdot u - \int u\, df$

  Stel $f(x) = x$ en $du = u'(x)\, dx = e^x\, dx$. Dan geldt

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x\, dx}_{du} = \int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{d(e^x)}_{du} \overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u(x)} - \int \underbrace{e^x}_{u(x)} \underbrace{dx}_{df}$$
$$= xe^x - e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

De keuze van f en u ligt niet vast. Stel dat we hier een andere keuze hadden gemaakt voor f en u, namelijk $f(x) = e^x$ en $u'(x) = x$. Dan is $f'(x) = e^x$ en $u(x) = \frac{x^2}{2}$. Partiële integratie geeft dan

$$\int xe^x\, dx \overset{P.I.}{=} e^x\, \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 e^x\, dx.$$

In de tweede integraal is de macht van x *verhoogd* van 1 naar 2. Dus de x in de eerste integraal wordt een x^2 in de tweede integraal. Met deze keuze van f en u wordt de nieuwe integraal *nog ingewikkelder dan de oorspronkelijke*. Hoewel de gelijkheid correct is, helpt ze niet. *Een goede keuze* voor f en u is dus erg belangrijk.

Voorbeeld 1.5.3. Bereken $\int x \sin x\, dx$.

- **Schrijfwijze 1**: $\int f(x) \cdot u'(x)\, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\, dx$

  Stel $f(x) = x$ en $u'(x) = \sin x$

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{u'(x)}\, dx,$$

  dan is $f'(x) = 1$ en $u(x)$ kunnen we vinden door $u'(x)$ te integreren: $u(x) = \int u'(x)\, dx = \int \sin x\, dx = -\cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}$.
  We kiezen de primitieve functie met $c = 0$. Partiële integratie geeft dan

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Partiële integratie

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{u'(x)}\, dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)}\, dx$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- **Schrijfwijze 2**: $\int f\, du = f \cdot u - \int u\, df$

  Stel $f(x) = x$ en $du = u'(x)\, dx = \sin x\, dx$

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x\, dx}_{du} = \int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{d(-\cos x)}_{du} \overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} \underbrace{dx}_{df}$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

In de volgende oefeningen moet je partiële integratie combineren met een eenvoudige substitutie.

Oefening 1.5.1.

1. $\int xe^{2x}\, dx = \ldots\ldots$
2. $\int xe^{-3x}\, dx = \ldots\ldots$

We hebben in de voorbeelden en oefeningen tot nu toe telkens het product van de veelterm x met een exponentiële of goniometrische functie geïntegreerd. Wanneer deze veelterm van een hogere graad is moeten we herhaaldelijk partieel integreren om tot de oplossing te komen. Bij elke stap daalt de graad van de veelterm met één.

Voorbeeld 1.5.4. Bereken $\int 4x^2e^{2x}dx$.

Om deze integraal te berekenen moet je *meerdere keren partieel integreren*. De methode wordt uitgelegd in onderstaand filmpje, en ook bij het volgende voorbeeld. YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=c450HbCytQE

Voorbeeld 1.5.5. Bereken $\int (2x^2 - 4x)e^{2x}\, dx$.

- **Schrijfwijze 1:** $\int f(x) \cdot u'(x)\, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\, dx$

  Stel $f(x) = 2x^2 - 4x$ en $u'(x) = e^{2x}$, dan is $f'(x) = 4x - 4$ en $u(x) = \int u'(x)\, dx = \int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

  Partiële integratie geeft dan

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Partiële integratie

$$\int \underbrace{(2x^2-4x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{u'(x)}\,dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{(2x^2-4x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)} - \int \underbrace{(4x-4)}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)}\,dx$$
$$= (x^2-2x)\,e^{2x} - \int (2x-2)e^{2x}\,dx$$

We passen nogmaals partiële integratie toe. Ditmaal stellen we $f(x)=2x-2$ en $u'(x)=e^{2x}$, dan is $f'(x)=2$ en $u(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$.

$$(x^2-2x)\,e^{2x} - \int \underbrace{(2x-2)}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{u'(x)}\,dx$$
$$\overset{P.I.}{=} (x^2-2x)\,e^{2x} - \left(\underbrace{(2x-2)}_{f(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)} - \int \underbrace{2}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)}\,dx\right)$$
$$= (x^2-2x)\,e^{2x} - (x-1)\,e^{2x} + \int e^{2x}\,dx$$
$$= (x^2-2x)\,e^{2x} - (x-1)\,e^{2x} + \frac{1}{2}\,e^{2x} + c$$
$$= (x^2-2x-x+1+\frac{1}{2})\,e^{2x} + c$$
$$= (x^2-3x+\frac{3}{2})\,e^{2x} + c, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

- **Schrijfwijze 2:** $\int f\,du = f\cdot u - \int u\,df$

$$\begin{aligned}
\int (2x^2-4x)e^{2x}\,dx &= \int (x^2-2x)\,de^{2x} \\
&\overset{P.I.}{=} (x^2-2x)e^{2x} - \int e^{2x}(2x-2)\,dx \\
&= (x^2-2x)\,e^{2x} - \int (x-1)\,de^{2x} \\
&\overset{P.I.}{=} (x^2-2x)\,e^{2x} - \left[(x-1)\,e^{2x} - \int e^{2x}\,dx\right] \\
&= (x^2-2x)\,e^{2x} - (x-1)\,e^{2x} + \frac{1}{2}\,e^{2x} + c \\
&= (x^2-2x-x+1+\frac{1}{2})\,e^{2x} + c \\
&= (x^2-3x+\frac{3}{2})\,e^{2x} + c, \qquad c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Als de integrand het product is van een veelterm en een andere functie zoals een sinus, cosinus of exponentiële functie, kiezen we voor $f(x)$ de veelterm. Door partiële integratie toe te passen daalt dan immers de graad van de veelterm. In het volgende voorbeeld, het product van een veelterm met $\ln x$, doen we het andersom, omdat we $\ln x$ eenvoudig kunnen afleiden, maar nog niet integreren. Hoe we $\ln x$ kunnen integreren is één van de volgende voorbeelden.

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Partiële integratie

Voorbeeld 1.5.6. Bereken $\int 9x^2 \ln x \, dx$.

- **Schrijfwijze 1:** $\int f(x) \cdot u'(x) \, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x) \, dx$

  Stel $f(x) = \ln x$ en $u'(x) = 9x^2$

  $$\int \underbrace{9x^2}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{f(x)} \, dx,$$

  dan is $f'(x) = 1/x$ en $u(x) = \int u'(x) \, dx = \int 9x^2 \, dx = 3x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

  Partiële integratie geeft dan

  $$\int \underbrace{9x^2}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{f(x)} \, dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{3x^3}_{u(x)} - \int \underbrace{1/x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{3x^3}_{u(x)} \, dx$$
  $$= 3x^3 \ln x - \int 3x^2 \, dx = 3x^3 \ln x - x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- **Schrijfwijze 2:** $\int f \, du = f \cdot u - \int u \, df$

  Stel $f(x) = \ln x$ en $du = u'(x) \, dx = 9x^2 \, dx$

  $$\int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{9x^2 \, dx}_{du} = \int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \underbrace{d(3x^3)}_{du} \overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{3x^3}_{u(x)} - \int \underbrace{3x^3}_{u(x)} \underbrace{d(\ln x)}_{df}$$
  $$= 3x^3 \ln x - \int \frac{3x^3}{x} \, dx = 3x^3 \ln x - x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Om partiële integratie te kunnen toepassen moet de integrand het product zijn van 2 functies. Maar ook als de integrand bestaat uit slechts 1 functie kunnen we partiële integratie toepassen door deze functie te vermenigvuldigen met 1.

Voorbeeld 1.5.7. Bereken $\int \ln x \, dx$.

Om partiële integratie te kunnen toepassen beschouwen we $\ln x$ als een product $\ln x \cdot 1$.

- Schrijfwijze 1: $\int f(x) \cdot u'(x) \, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x) \, dx$

  Stel $f(x) = \ln x$ en $u'(x) = 1$, dan is $f'(x) = 1/x$ en $u(x) = \int u'(x) \, dx = \int 1 \, dx = x + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

  Partiële integratie geeft dan

  $$\int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{u'(x)} \, dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{u(x)} - \int \underbrace{1/x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{u(x)} \, dx$$
  $$= x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Partiële integratie

- Schrijfwijze 2: $\displaystyle\int f\,du = f\cdot u - \int u\,df$

$$\int \underbrace{\ln x}_{f(x)}\underbrace{dx}_{du} \overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{f(x)}\cdot\underbrace{x}_{u(x)} - \int \underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{d\ln x}_{df} = x\ln x - \int \frac{x}{x}\,dx$$
$$= x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Soms bekom je na (herhaald) partieel integreren opnieuw de *oorspronkelijke* integraal. Onderstaand voorbeeld legt uit welke techniek je dan kan toepassen.

Voorbeeld 1.5.8. Bereken $\displaystyle\int \sin x\, e^x\,dx$.

- **Schrijfwijze 1:** $\displaystyle\int f(x)\cdot u'(x)\,dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,dx$

  We stellen $\displaystyle I = \int \sin x\, e^x\,dx$ voor de verdere berekening. Welke keuze we maken voor $f(x)$ en $u'(x)$ is niet zo belangrijk in deze oefening. We maken de keuze $f(x)=\sin x$ en $u'(x)=e^x$, dan is $f'(x)=\cos x$ en $u(x)=e^x$. Maak deze oefening opnieuw met de andere keuze.

$$I = \int \sin x\cdot e^x\,dx = \sin x\cdot e^x - \int \cos x\cdot e^x\,dx$$

  We passen nogmaals partiële integratie toe. Ditmaal stellen we $f(x)=\cos x$ en $u'(x)=e^x$, dan is $f'(x)=-\sin x$ en $u(x)=e^x$.

$$I = \sin x\cdot e^x - \left(\cos x\cdot e^x - \int(-\sin x)\cdot e^x\,dx\right) = (\sin x - \cos x)e^x - \int \sin x\cdot e^x\,dx$$

  In het rechterlid staat nu terug de oorspronkelijke integraal I.

$$I = (\sin x - \cos x)e^x - I$$

  We brengen I naar het linkerlid en bekomen:

$$2\,I = e^x\,(\sin x - \cos x) + c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

  Dus

$$I = \frac{1}{2}\,e^x\,(\sin x - \cos x) + c_1, \quad c_1\in\mathbb{R}\ (\text{Stel } c_1 = c/2).$$

- **Schrijfwijze 2:** $\displaystyle\int f\,du = f\cdot u - \int u\,df$

  Hier hebben we de andere keuze gemaakt: we stellen $f(x)=e^x$ en $du = u'(x)\,dx = \sin x\,dx$

$$\begin{aligned} I = \int \sin x\, e^x\,dx &= -\int e^x\,d\cos x \\ &\overset{P.I.}{=} -e^x\cos x + \int \cos x\,de^x \\ &= -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx \\ &= -e^x\cos x + \int e^x\,d\sin x \\ &\overset{P.I.}{=} -e^x\cos x + e^x\sin x - \int \sin x\,de^x \\ &= -e^x\cos x + e^x\sin x - \underbrace{\int \sin x\, e^x\,dx}_{I}. \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Partiële integratie

We brengen I naar het linkerlid en bekomen:

$$2\ I = e^x\ (\sin x - \cos x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dus

$$I = \frac{1}{2}\ e^x\ (\sin x - \cos x) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}\ (\text{Stel } c_1 = c/2).$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.5.A Oefeningen partiële integratie

Oefening 1.5.2. Bereken volgende onbepaalde integralen via partiële integratie:

1. $\int \left(3x + x^2\right) e^x \, dx = \ldots\ldots$
2. $\int \operatorname{bgtan} x \, dx = \ldots\ldots$
3. $\int \operatorname{bgsin} \theta \, d\theta = \ldots\ldots$
4. $\int \ln \sqrt{x} \, dx = \ldots\ldots$
5. $\int e^x \cos 3x \, dx = \ldots\ldots$
6. $\int \frac{\ln t}{t^2} \, dt = \ldots\ldots$

Oefening 1.5.3.

1. Bereken $\int \operatorname{bgtan} 5x \, dx$.

Meerkeuze:

(a) $x \operatorname{bgtan} 5x - \frac{1}{10} \ln|1 + 25x^2| + c$

(b) $x \operatorname{bgtan} 5x - \frac{1}{12} \ln|1 + 25x^2| + c$

(c) $x \operatorname{bgtan} 5x - \frac{1}{14} \ln|1 + 25x^2| + c$

(d) $x \operatorname{bgtan} 5x + \frac{1}{10} \ln|1 + 25x^2| + c$

(e) $x \operatorname{bgtan} 5x + \frac{1}{12} \ln|1 + 25x^2| + c$

(f) $x \operatorname{bgtan} 5x + \frac{1}{14} \ln|1 + 25x^2| + c$

2. Bereken $\int e^{3x} \cos 5x \, dx$.

Meerkeuze:

(a) $\frac{e^{3x}(2\cos 5x + 5\sin 5x)}{29} + c$

(b) $\frac{e^{3x}(3\cos 5x + 5\sin 5x)}{34} + c$

(c) $\frac{e^{3x}(\cos 5x + 3\sin 5x)}{20} + c$

(d) $\frac{e^{3x}(\cos 5x + 2\sin 5x)}{15} + c$

(e) $\frac{e^{3x}(2\cos 5x + 7\sin 5x)}{53} + c$

(f) $\frac{e^{3x}(3\cos 5x + 7\sin 5x)}{58} + c$

Bron: https://github.com/ptgressman/math104 (MIT License Copyright (c) 2019 Philip Gressman)

CC BY-NC-SA 4.0

1.5.B Integreren via youtube

De integratietechnieken substitutie en partiële integratie worden hier uitgelegd aan de hand van enkele voorbeelden.

Substitutie

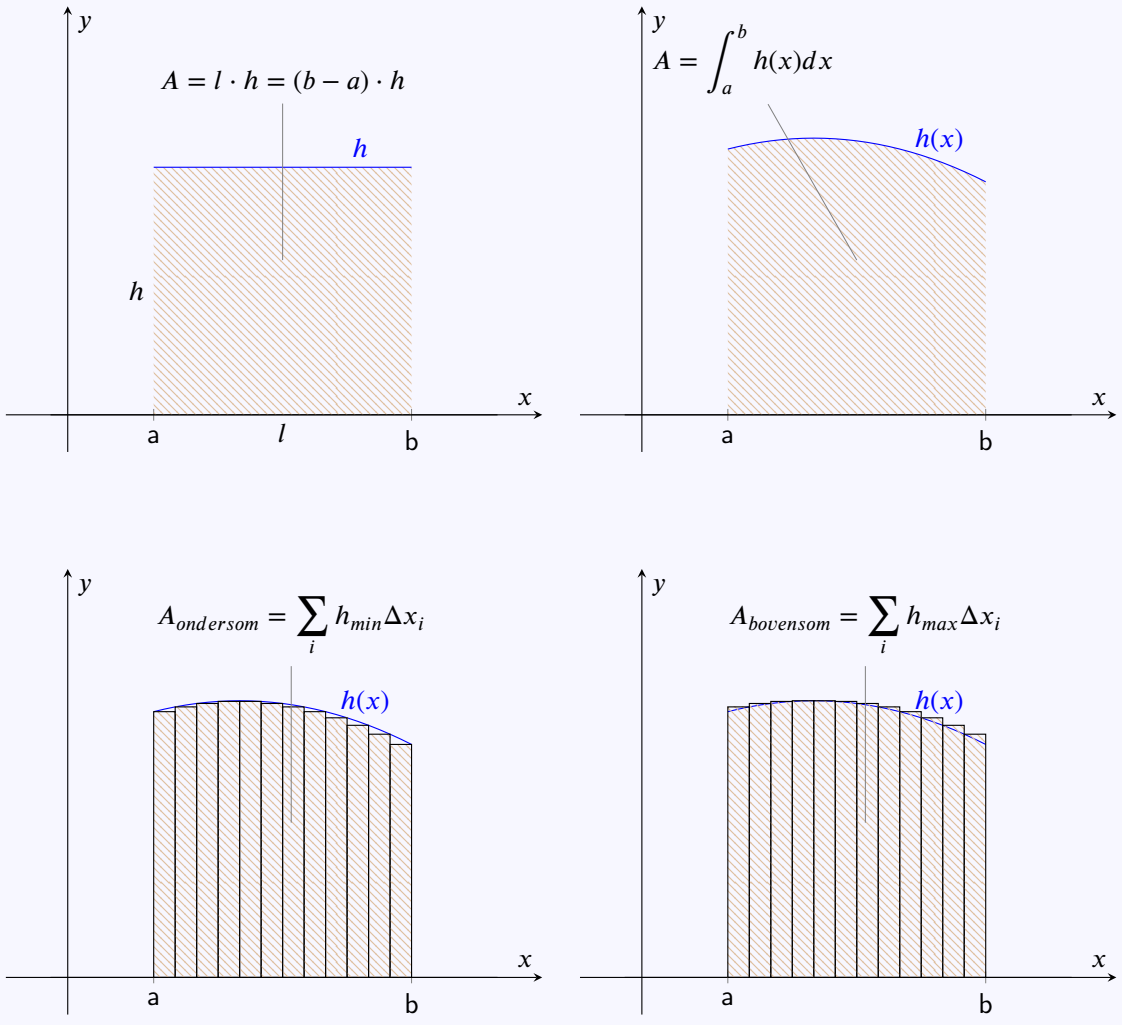
Partiële integratie

CC BY-NC-SA 4.0

1.6 Bepaalde integralen

1.6.1 Definitie bepaalde integraal

Voorbeeld 1.6.1 (Oppervlakte)**.** Voor een rechthoek met lengte l en hoogte h kent iedereen de formule voor de oppervlakte: $A = l \cdot h$. De bepaalde integraal is in zekere zin een veralgemening van deze formule, waarbij de bovenzijde van de rechthoek niet meer 'recht' is, maar ook een kromme kan zijn. We kunnen dan niet meer vermenigvuldigen met de vaste hoogte h, maar we moeten vermenigvuldigen met een 'variërende hoogte' $h(x)$. De notatie en de berekening daarvan gaat via de zogenaamde *bepaalde integraal*, die kan worden gedefinieerd als een limiet van een som van kleine rechthoekjes.



We geven kort de meetkundige (pseudo-)definitie van een bepaalde integraal:

Definitie 1.6.1 (Bepaalde integraal)**.**

Zij f een continue, *positieve* functie op een interval $[a, b]$.

1.6 Bepaalde integralen

De **bepaalde integraal** van f over het interval $[a,b]$, genoteerd als

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

is per definitie gelijk aan de *oppervlakte* van het gebied tussen de grafiek van f, de x-as en de verticale rechten $x=a$ en $x=b$.

We noemen a en b de **integratiegrenzen** en $[a,b]$ het **integratie-interval**, en we **integreren over** dat interval.

1.6.2 Verband met de onbepaalde integraal

Volgende belangrijke stelling zegt dat we de bepaalde integraal (dus een oppervlakte, of meer algemeen een oneindige-som-van-oneindig-kleine-dingen) kunnen berekenen met behulp van de onbepaalde integraal.

Eigenschap 1.6.1 (Verband tussen bepaalde en onbepaalde integralen)**.**

Zij f een continue functie op een interval $[a,b]$ en F een primitieve functie van f (dus $\int f(x)\,dx = F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$). Dan geldt

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b)-F(a) \qquad \overset{\text{notatie}}{=} \qquad \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Deze formule laat toe om het berekenen van een *bepaalde* integraal te reduceren tot het berekenen van de *onbepaalde* integraal, en dan de integratiegrenzen in te vullen.

Merk op dat het hierbij geen probleem is dat een primitieve functie slechts op een constante na bepaald is:

$$\big(F(b)+c\big)-\big(F(a)+c\big)=F(b)-F(a).$$

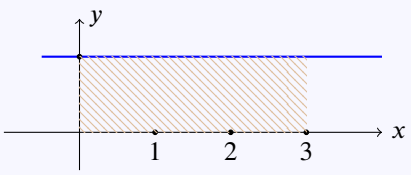
Elke primitieve functie F van f is dus geschikt om de bepaalde integraal uit te rekenen.

Hierbij is $\Big[F(x)\Big]_a^b \overset{\text{def}}{=} F(b)-F(a)$ een handige notatie. Soms gebruikt men ook $F(x)\Big|_a^b \overset{\text{def}}{=} F(b)-F(a)$.

Voorbeeld 1.6.2. Eenvoudige bepaalde integralen:

1. $\displaystyle\int_0^3 1\,dx = \Big[x\Big]_0^3 = 3-0=3$

De berekende oppervlakte is de oppervlakte van het gebied tussen de rechte $y=1$ (dit is de grafiek van $f(x)=1$), de x-as en de verticale rechten $x=0$ en $x=3$.

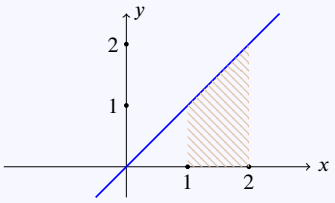


2. $\displaystyle\int_1^2 x\,dx = \Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_1^2 = \frac{1}{2}(2^2-1^2)=\frac{1}{2}(4-1)=\frac{3}{2}$

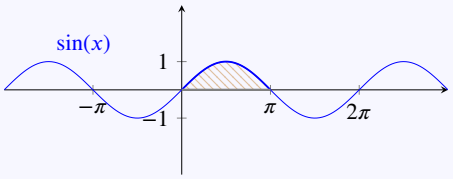
De berekende oppervlakte is de oppervlakte van het gebied tussen de rechte $y=x$ (dit is de grafiek van $f(x)=x$), de x-as en de verticale rechten $x=1$ en $x=2$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.6 Bepaalde integralen



3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$



Uit de formule $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$ volgen onmiddellijk de basiseigenschappen:

Eigenschap 1.6.2.
Zij F en G functies gedefinieerd op een interval $[a,b]$, $c \in [a,b]$ en $k,l \in \mathbb{R}$. Dan is

$$\begin{aligned}
\big[F(x)\big]_a^a &= F(a) - F(a) = 0 \\
\big[kF(x)\big]_a^b &= k\big[F(x)\big]_a^b \\
\big[F(x) + G(x)\big]_a^b &= \big[F(x)\big]_a^b + \big[G(x)\big]_a^b \\
\big[kF(x) + lG(x)\big]_a^b &= k\big[F(x)\big]_a^b + l\big[G(x)\big]_a^b \\
\big[F(x)\big]_b^a &= -\big[F(x)\big]_a^b = \big[-F(x)\big]_a^b \\
\big[F(x)\big]_a^b &= \big[F(x)\big]_a^c + \big[F(x)\big]_c^b
\end{aligned}$$

Uit deze eigenschappen van het symbool $\big[F(x)\big]_a^b$ volgt dan onmiddellijk:

Eigenschap 1.6.3 (Eigenschappen van de bepaalde integraal)**.**
Zij f een functie gedefinieerd op $[a,b]$ en $c \in [a,b]$. Dan is

$$\begin{aligned}
\int_a^a f(t)\,dt &= 0 && \text{(integreren over een leeg interval)} \\
\int_b^a f(t)\,dt &= -\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b (-f(t))\,dt && \text{(integreren in omgekeerde richting)} \\
\int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt && \text{(integratie-interval opsplitsen)}
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.6 Bepaalde integralen

Voorbeeld 1.6.3.

1. $\int_4^8 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_4^8 = \frac{1}{2}(8^2-4^2) = \frac{1}{2}(64-16) = 24$

2. $\int_8^4 x\,dx = -\int_4^8 x\,dx = -24,$

of anders berekend $\int_8^4 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_8^4 = \frac{1}{2}(4^2-8^2) = \frac{1}{2}(16-64) = -24$

3.

$$\int_4^8 x\,dx = \int_4^6 x\,dx + \int_6^8 x\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_4^6 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_6^8 = \frac{1}{2}(6^2-4^2) + \frac{1}{2}(8^2-6^2) = \frac{1}{2}(36-16+64-36) = 24$$

Opmerking 1.6.1 (Interpretatie bepaalde integraal)**.**

De bepaalde integraal wordt meestal ingevoerd als een manier om oppervlaktes te berekenen. Maar je kan de bepaalde integraal ook zien als een methode om *producten te berekenen van variërende grootheden*. We willen bijvoorbeeld het product berekenen van tijd en snelheid, of tijd en gewicht, of tijd en afstand, waarbij telkens de snelheid, gewicht of afstand *niet* noodzakelijk constant is. Dat is precies wat de bepaalde integraal doet.

Voorbeeld: bij constante snelheid is de afgelegde weg s na tijd t gelijk aan de snelheid v maal de tijd t:

$$s = v \cdot t\,.$$

Bij een constante snelheid van $v = 120$ km/u leg je in een tijd van $t = 2$ uur precies $2 \cdot 120 = 240$ km af.

Maar, als de snelheid *afhangt van de tijd*, dus als $v = v(t)$, dan is het product $v(2)\cdot 2$ *niet* de afgelegde weg na 2 uur. Inderdaad, stel dat de snelheid na tijd t gelijk is aan $v(t) = 60\cdot t$. Dat betekent: tamelijk traag versnellen, beginnend van stilstand. Na een half uur is de snelheid $v(1/2) = 60 \cdot 1/2 = 30$ km/u, en na twee uur is ze $v(2) = 2 \cdot 60 = 120$km/u. De afgelegde weg na 2 uur is dan *niet* $s(2) = v(2) \cdot 2 = 240$km (want zo ver geraak je enkel als je constant 120km/u rijdt). In dit scenario haal je die snelheid pas helemaal op het einde.

Dankzij de techniek van de bepaalde integraal kunnen we wel schrijven dat de afgelegde weg na 2 uur is:

$$s(2) = \int_0^2 v(t)dt = \int_0^2 (60 \cdot t)dt$$

1.6.3 Georiënteerde oppervlakte

In de definitie van de bepaalde integraal hebben we de functie f positief verondersteld.

Als f niet noodzakelijk positief is, moeten we voorzichtiger zijn met wat we precies verstaan onder 'oppervlakte'. We geven een nieuwe definitie:

Definitie 1.6.2 (Georiënteerde oppervlakte en bepaalde integraal)**.**

De **georiënteerde oppervlakte** telt per definitie de oppervlakte van een gebied dat boven de x-as ligt *positief* en telt de oppervlakte van een gebied dat onder de x-as ligt *negatief*.

Als f een continue functie is op een interval $[a, b]$, dan is de bepaalde integraal

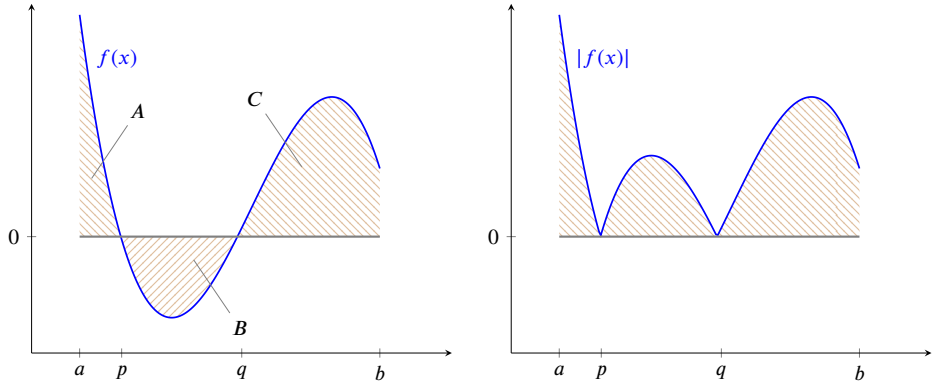
CC BY-NC-SA 4.0

1.6 Bepaalde integralen

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

gelijk aan de *georiënteerde oppervlakte* van het gebied tussen de grafiek van f, de x-as en de verticale rechten $x = a$ en $x = b$.

Dus als de functie f negatief is, telt de bepaalde integraal die oppervlakte ook als negatief. In de meeste gevallen is dat gelukkig precies wat we willen (negatieve snelheid betekent achteruit rijden, en de overeenstemmende afstand moeten we dus redelijkerwijze meestal ook van de totale afgelegde weg aftrekken).

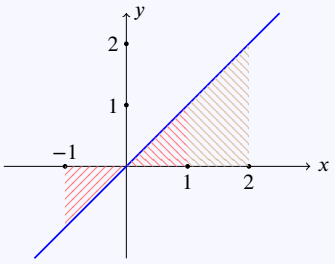


De bepaalde integraal van de functie f over het interval $[a, b]$ in de linkse figuur is dus

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^q f(x)\,dx + \int_q^b f(x)\,dx = \text{opp}\,A - \text{opp}\,B + \text{opp}\,C\,.$$

Voorbeeld 1.6.4.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2}(2^2 - (-1)^2) = \frac{1}{2}(4-1) = \frac{3}{2}$



Oefening 1.6.1. Bereken volgende bepaalde integralen en duid aan op een figuur wat je berekend hebt.

1. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = \ldots\ldots$

2. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \sin x\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

1.6 Bepaalde integralen

Indien het echter de bedoeling is om $\text{opp}\,A + \text{opp}\,B + \text{opp}\,C$ te berekenen, dan moet de bepaalde integraal van $|f(x)|$ berekend worden, zoals in de rechtse figuur geïllustreerd werd.

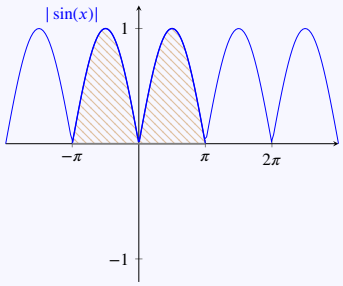
$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \text{opp}\,A + \text{opp}\,B + \text{opp}\,C$$

Om $\int_a^b |f(x)|\,dx$ te berekenen moet je het integratie-interval $[a,b]$ opsplitsen in stukken waarop f ofwel positief, ofwel negatief is. Hiervoor moet je al de nulpunten van f zoeken. Op elk van deze stukken is $|f(x)|$ dan ofwel gelijk aan $f(x)$, ofwel gelijk aan $-f(x)$.

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|\,dx &= \int_a^p |f(x)|\,dx + \int_p^q |f(x)|\,dx + \int_q^b |f(x)|\,dx \\ &= \int_a^p f(x)\,dx - \int_p^q f(x)\,dx + \int_q^b f(x)\,dx \\ &= \text{opp}\,A + \text{opp}\,B + \text{opp}\,C\end{aligned}$$

Voorbeeld 1.6.5.

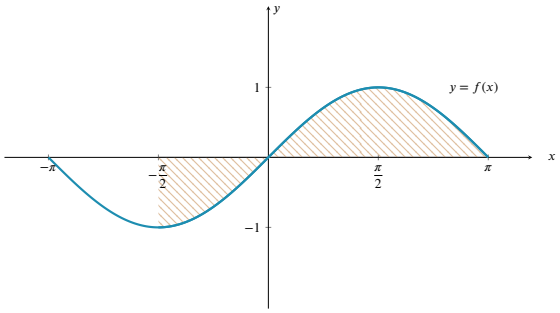
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,dx &= \int_{-\pi}^{0} |\sin x|\,dx + \int_0^{\pi} |\sin x|\,dx \\ &= \int_{-\pi}^{0} -\sin x\,dx + \int_0^{\pi} \sin x\,dx \\ &= \Big[\cos x\Big]_{-\pi}^{0} + \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} \\ &= \cos(0) - \cos(-\pi) + (-\cos\pi) - (-\cos 0) \\ &= 1 - (-1) + (-(-1)) - (-1) = 1+1+1+1 = 4\end{aligned}$$



Oefening 1.6.2. Waaraan is de oppervlakte van het gearceerde gebied op de figuur gelijk?

CC BY-NC-SA 4.0

1.6 Bepaalde integralen



Meerkeuze:

(a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{\pi} f(x)dx$

(b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx$

(c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$

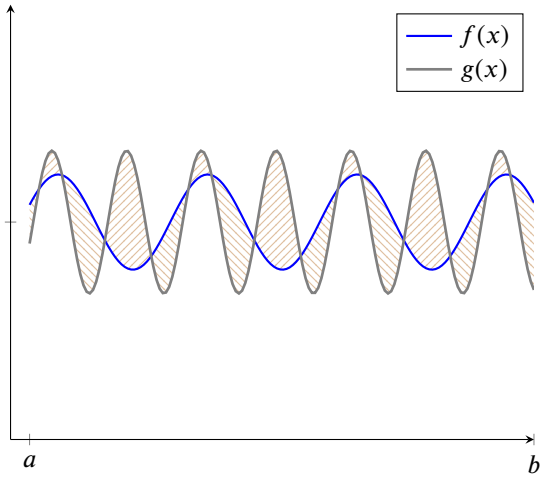
(d) $-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx$

Merk op dat zodra f zowel positieve als negatieve waarden aanneemt op het interval $[a, b]$ in het algemeen niet geldt dat

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| .$$

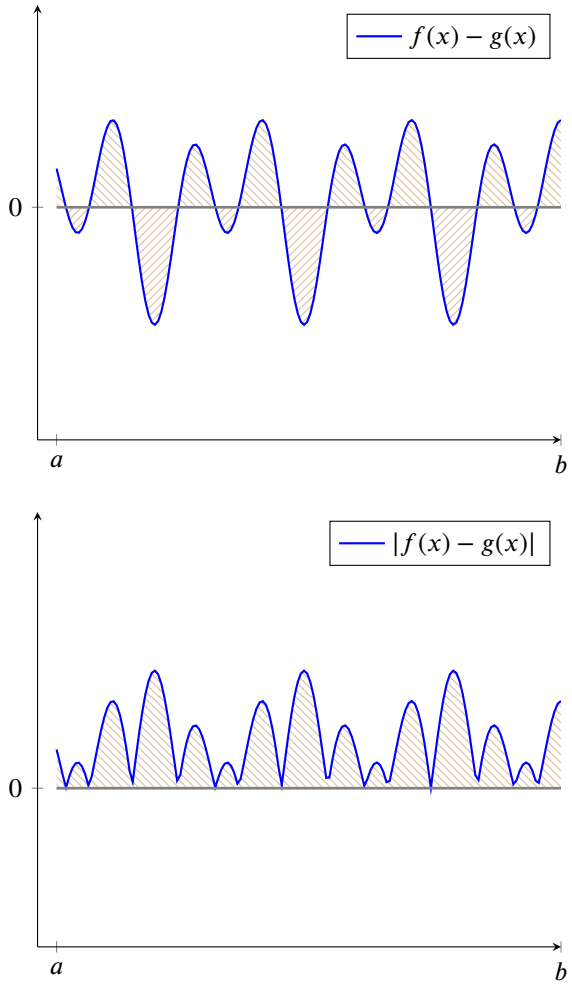
Om de oppervlakte **tussen twee krommen** te berekenen, berekenen we de bepaalde integraal van de absolute waarde van het verschil van beide functies:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26H.6)

1.6 Bepaalde integralen



De ligging van de x-as heeft geen belang heeft bij het berekenen van de oppervlakte tussen twee krommen, want $|f(x) - g(x)|$ is de waarde van de bovenliggende kromme min die van de onderliggende kromme. De oppervlakte is dus de som van de integralen tussen twee opeenvolgende snijpunten met als integrand het voorschrift van de *bovenliggende kromme* min die van de *onderliggende kromme*, ongeacht of die krommen boven of onder de x-as liggen.

1.6.4 Substitutie bij bepaalde integralen

Bij het berekenen van *bepaalde* integralen met substitutie moeten voor de *nieuwe* substitutie-variabele ook de integratiegrenzen worden aangepast. Er zijn twee oplossingsmethodes: ofwel bereken en gebruik je inderdaad de nieuwe integratiegrenzen, ofwel bereken je eerst de *onbepaalde* integraal, en vul je in de uitkomst de oorspronkelijke grenzen in.

Voorbeeld 1.6.6. Bereken $\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx$

- **Schrijfwijze 1:** We illustreren beide methodes:
  - *Methode 1:* **Integratiegrenzen aanpassen**: Stel $u = x^2$, dan is $du = dx^2 = 2xdx$. Als $x = 1$ dan is $u = 1$, als $x = 2$ dan is $u = 4$

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx = \int_1^4 e^u \, du = \left[e^u\right]_1^4 = e^4 - e$$

CC BY-NC-SA 4.0

– *Methode 2:* **Eerst de onbepaalde integraal berekenen** met de substitutie $u = x^2$;

$$\int e^{x^2} 2x \, dx = e^{x^2} + c, c \in \mathbb{R},$$

en dan $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ toepassen:

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx = \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e.$$

- **Schrijfwijze 2:**

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx = \int_1^2 e^{x^2} \, dx^2 = \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e$$

Opmerking 1.6.2.

De tweede methode, dus eerst de onbepaalde integraal uitrekenen en dan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

toepassen, heeft als voordeel dat je dan de nieuwe grenzen niet moet zoeken.

Waarschuwing 1.6.1 (Veelgemaakte fouten)**.**

- De grenzen van x gebruiken als grenzen voor u:

$$\cancel{\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx = \int_1^2 e^u \, du}$$

- Tijdens de berekening van de bepaalde integraal de grenzen niet aanpassen, ook al geeft dit een correct resultaat:

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx \neq \int_1^2 e^u \, du \neq \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e$$

1.6.5 Partiële integratie bij bepaalde integralen

Voorbeeld 1.6.7. Bereken $\int_0^1 xe^x \, dx$.

- **Schrijfwijze 1:** Stel $f(x) = x$ en $u'(x) = e^x$, dan is $f'(x) = 1$ en $u(x) = e^x$.
  Partiële integratie geeft dan

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \cdot e^x \, dx &\overset{P.I.}{=} \left[x \cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx \\ &= \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - (e^1 - e^0) = e - (e-1) = 1;\end{aligned}$$

1.6 Bepaalde integralen

- **Schrijfwijze 2:** Stel $f(x) = x$ en $du = u'(x)\,dx = e^x\,dx$;

$$\int_0^1 x \cdot e^x\,dx = \int_0^1 x d(e^x) \overset{P.I.}{=} \left[x \cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$
$$= \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - (e^1 - e^0) = e - (e-1) = 1$$

Voorbeeld 1.6.8. Bereken $\int_1^e \ln x\,dx$.

Dit voorbeeld wordt in onderstaande video opgelost door $v = x$ te kiezen in de formule $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (volgens Schrijfwijze 2). Het antwoord is $1 - \ln 1$.

YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=x9m15ns0l_o

CC BY-NC-SA 4.0

1.6.A Oefeningen bepaalde integralen

Oefening 1.6.3. Bereken volgende bepaalde integralen:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = \ldots\ldots$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta = \ldots\ldots$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x \sin x \, dx = \ldots\ldots$
4. $\int_0^{1} xe^{2x} \, dx = \ldots\ldots$
5. $\int_0^{1} \frac{x}{(4+x^2)^2} \, dx = \ldots\ldots$
6. $\int_0^{2} \frac{2x+1}{\sqrt{x+1}} \, dx = \ldots\ldots$
7. $\int_0^{\pi} \cos^2 t \, dt = \ldots\ldots$
8. $\int_0^{\pi} x^2 \cos 3x \, dx = \ldots\ldots$
9. $\int_0^{4} \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, dx = \ldots\ldots$
10. $\int_0^{1} x^3 e^{-x^2} \, dx = \ldots\ldots$

Oefening 1.6.4. Bron: https://github.com/ptgressman/math104

MIT License Copyright (c) 2019 Philip Gressman

1. Bereken $\int_1^{4} e^{3x}(x+1) \, dx$.

Meerkeuze:

(a) $\frac{14}{9}e^{12} - \frac{5}{9}e^{3}$

(b) $\frac{17}{9}e^{12} - \frac{5}{9}e^{3}$

(c) $\frac{17}{9}e^{12} - \frac{8}{9}e^{3}$

(d) $\frac{20}{9}e^{12} - \frac{8}{9}e^{3}$

(e) $\frac{20}{9}e^{12} - \frac{11}{9}e^{3}$

(f) $\frac{23}{9}e^{12} - \frac{11}{9}e^{3}$

2. Bereken $\int_{\pi}^{2\pi} x \sin 4x \, dx$.

Meerkeuze:

1.6.A Oefeningen bepaalde integralen

(a) 0

(b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $-\frac{\pi}{4}$

(d) $\frac{3\pi}{4}$

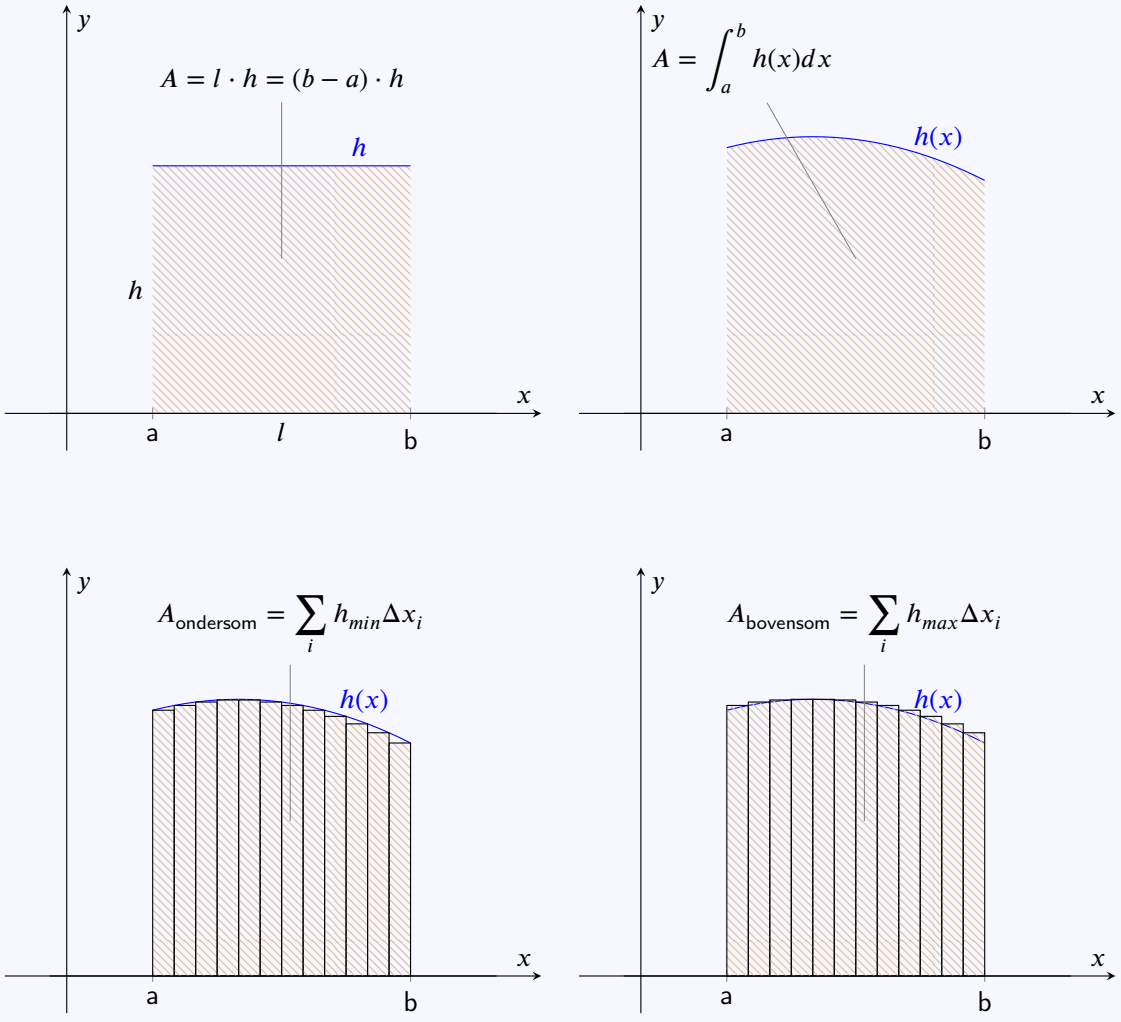
(e) $-\frac{3\pi}{4}$

(f) $\frac{7\pi}{4}$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Bepaalde integralen: definitie

Voorbeeld 2.1.1 (Oppervlakte)**.** Voor een rechthoek met lengte l en hoogte h kent iedereen de formule voor de oppervlakte: $A = l \cdot h$. De bepaalde integraal is in zekere zin een veralgemening van deze formule, waarbij de bovenzijde van de rechthoek niet meer 'recht' is, maar ook een kromme kan zijn. We kunnen dan niet meer vermenigvuldigen met de vaste hoogte h, maar we moeten vermenigvuldigen met een 'variërende hoogte' $h(x)$. De notatie en de berekening daarvan gaat via de zogenaamde *bepaalde integraal*, die kan worden gedefinieerd als een limiet van een som van kleine rechthoekjes.



We geven kort de meetkundige (pseudo-)definitie van een bepaalde integraal:

Definitie 2.1.1 (Bepaalde integraal)**.**

Zij f een continue, *positieve* functie op een interval $[a, b]$.

De **bepaalde integraal** van f over het interval $[a, b]$, genoteerd als

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Bepaalde integralen: definitie

is per definitie gelijk aan de *oppervlakte* van het gebied tussen de grafiek van f, de x-as en de verticale rechten $x = a$ en $x = b$.

We noemen a en b de **integratiegrenzen** en $[a, b]$ het **integratie-interval**, en we **integreren over** dat interval.

Volgende belangrijke stelling zegt dat we de bepaalde integraal (dus een oppervlakte, of meer algemeen een oneindige-som-van-oneindig-kleine-dingen) kunnen berekenen met behulp van de onbepaalde integraal.

Eigenschap 2.1.1 (Verband tussen bepaalde en onbepaalde integralen)**.**

Zij f een continue functie op een interval $[a, b]$ en F een primitieve functie van f (dus $\int f(x)\,dx = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$). Dan geldt

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a) \qquad \overset{\text{notatie}}{=} \qquad \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Deze formule laat toe om het berekenen van een *bepaalde* integraal te reduceren tot het berekenen van de *onbepaalde* integraal, en dan de integratiegrenzen in te vullen.

Merk op dat het hierbij geen probleem is dat een primitieve functie slechts op een constante na bepaald is:

$$\big(F(b) + c\big) - \big(F(a) + c\big) = F(b) - F(a).$$

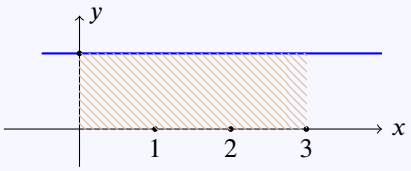
Elke primitieve functie F van f is dus geschikt om de bepaalde integraal uit te rekenen.

Hierbij is $\Big[F(x)\Big]_a^b \overset{\text{def}}{=} F(b) - F(a)$ een handige notatie. Soms gebruikt men ook $F(x)\Big|_a^b \overset{\text{def}}{=} F(b) - F(a)$.

Voorbeeld 2.1.2. Eenvoudige bepaalde integralen:

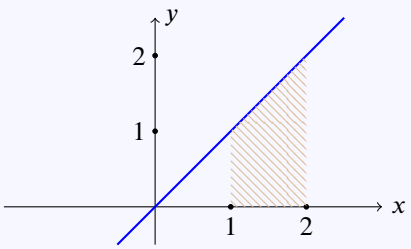
1. $\displaystyle\int_0^3 1\,dx = \Big[x\Big]_0^3 = 3 - 0 = 3$

De berekende oppervlakte is de oppervlakte van het gebied tussen de de rechte $y = 1$ (dit is de grafiek van $f(x) = 1$), de x-as en de verticale rechten $x = 0$ en $x = 3$.



2. $\displaystyle\int_1^2 x\,dx = \Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_1^2 = \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) = \frac{1}{2}(4 - 1) = \frac{3}{2}$

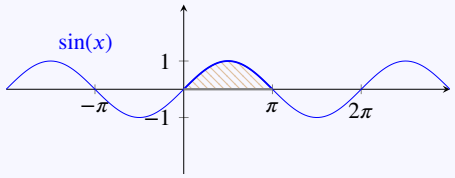
De berekende oppervlakte is de oppervlakte van het gebied tussen de de rechte $y = x$ (dit is de grafiek van $f(x) = x$), de x-as en de verticale rechten $x = 1$ en $x = 2$.



CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Bepaalde integralen: definitie

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$



Uit de formule $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$ volgen onmiddellijk de basiseigenschappen:

Eigenschap 2.1.2.

Zij F en G functies gedefinieerd op een interval $[a,b]$, $c \in [a,b]$ en $k, l \in \mathbb{R}$. Dan is

$$\begin{aligned}
\big[F(x)\big]_a^a &= F(a) - F(a) = 0 \\
\big[kF(x)\big]_a^b &= k\big[F(x)\big]_a^b \\
\big[F(x) + G(x)\big]_a^b &= \big[F(x)\big]_a^b + \big[G(x)\big]_a^b \\
\big[kF(x) + lG(x)\big]_a^b &= k\big[F(x)\big]_a^b + l\big[G(x)\big]_a^b \\
\big[F(x)\big]_b^a &= -\big[F(x)\big]_a^b = \big[-F(x)\big]_a^b \\
\big[F(x)\big]_a^b &= \big[F(x)\big]_a^c + \big[F(x)\big]_c^b
\end{aligned}$$

Uit deze eigenschappen van het symbool $\big[F(x)\big]_a^b$ volgt dan onmiddellijk:

Eigenschap 2.1.3 (Eigenschappen van de bepaalde integraal)**.**

Zij f een functie gedefinieerd op $[a,b]$ en $c \in [a,b]$. Dan is

$$\begin{aligned}
\int_a^a f(t)\, dt &= 0 && \text{(integreren over een leeg interval)} \\
\int_b^a f(t)\, dt &= -\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b (-f(t))\, dt && \text{(integreren in omgekeerde richting)} \\
\int_a^b f(t)\, dt &= \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt && \text{(integratie-interval opsplitsen)}
\end{aligned}$$

Voorbeeld 2.1.3.

1. $\displaystyle\int_4^8 x\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_4^8 = \frac{1}{2}(8^2 - 4^2) = \frac{1}{2}(64 - 16) = 24$

2. $\displaystyle\int_8^4 x\, dx = -\int_4^8 x\, dx = -24,$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Bepaalde integralen: definitie

of anders berekend $\int_8^4 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_8^4 = \frac{1}{2}(4^2 - 8^2) = \frac{1}{2}(16 - 64) = -24$

3.

$$\int_4^8 x\,dx = \int_4^6 x\,dx + \int_6^8 x\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_4^6 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_6^8 = \frac{1}{2}(6^2 - 4^2) + \frac{1}{2}(8^2 - 6^2) = \frac{1}{2}(36 - 16 + 64 - 36) = 24$$

Opmerking 2.1.1 (Interpretatie bepaalde integraal)**.**

De bepaalde integraal wordt meestal ingevoerd als een manier om oppervlaktes te berekenen. Maar je kan de bepaalde integraal ook zien als een methode om *producten te berekenen van variërende grootheden*. We willen bijvoorbeeld het product berekenen van tijd en snelheid, of tijd en gewicht, of tijd en afstand, waarbij telkens de snelheid, gewicht of afstand *niet* noodzakelijk constant is. Dat is precies wat de bepaalde integraal doet.

Voorbeeld: bij constante snelheid is de afgelegde weg s na tijd t gelijk aan de snelheid v maal de tijd t:

$$s = v \cdot t\,.$$

Bij een constante snelheid van $v = 120$ km/u leg je in een tijd van $t = 2$ uur precies $2 \cdot 120 = 240$ km af.

Maar, als de snelheid *afhangt van de tijd*, dus als $v = v(t)$, dan is het product $v(2)\cdot 2$ *niet* de afgelegde weg na 2 uur. Inderdaad, stel dat de snelheid na tijd t gelijk is aan $v(t) = 60\cdot t$. Dat betekent: tamelijk traag versnellen, beginnend van stilstand. Na een half uur is de snelheid $v(1/2) = 60 \cdot 1/2 = 30$ km/u, en na twee uur is ze $v(2) = 2 \cdot 60 = 120$km/u. De afgelegde weg na 2 uur is dan *niet* $s(2) = v(2) \cdot 2 = 240$km (want zo ver geraak je enkel als je constant 120km/u rijdt). In dit scenario haal je die snelheid pas helemaal op het einde.

Dankzij de techniek van de bepaalde integraal kunnen we wel schrijven dat de afgelegde weg na 2 uur is:

$$s(2) = \int_0^2 v(t)dt = \int_0^2 (60 \cdot t)dt$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Bepaalde integralen: substitutie

Bij het berekenen van *bepaalde* integralen met substitutie moeten voor de *nieuwe* substitutie-variabele ook de integratiegrenzen worden aangepast. Er zijn twee oplossingsmethodes: ofwel bereken en gebruik je inderdaad de nieuwe integratiegrenzen, ofwel bereken je eerst de *onbepaalde* integraal, en vul je in de uitkomst de oorspronkelijke grenzen in.

Voorbeeld 2.2.1. Bereken $\int_1^2 e^{x^2} 2x\, dx$

- **Schrijfwijze 1:** We illustreren beide methodes:
  - *Methode 1:* **Integratiegrenzen aanpassen**: Stel $u = x^2$, dan is $du = dx^2 = 2xdx$. Als $x = 1$ dan is $u = 1$, als $x = 2$ dan is $u = 4$

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x\, dx = \int_1^4 e^u\, du = \left[e^u\right]_1^4 = e^4 - e$$

  - *Methode 2:* **Eerst de onbepaalde integraal berekenen** met de substitutie $u = x^2$;

$$\int e^{x^2} 2x\, dx = e^{x^2} + c, c \in \mathbb{R},$$

  en dan $\int_a^b f(x)\, dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ toepassen:

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x\, dx = \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e.$$

- **Schrijfwijze 2:**

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x\, dx = \int_1^2 e^{x^2}\, dx^2 = \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e$$

Opmerking 2.2.1. De tweede methode, dus eerst de onbepaalde integraal uitrekenen en dan $\int_a^b f(x)\, dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ toepassen, heeft als voordeel dat je dan de nieuwe grenzen niet moet zoeken. Vaak gemaakte fouten zijn:

- De grenzen van x gebruiken als grenzen voor u:

$$\cancel{\int_1^2 e^{x^2} 2x\, dx = \int_1^2 e^u\, du}$$

- Tijdens de berekening van de bepaalde integraal de grenzen niet aanpassen, ook al geeft dit een correct resultaat:

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x\, dx \neq \int_1^2 e^u\, du \neq \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Bepaalde integralen: substitutie

Voorbeeld 2.2.2. Bereken $\int_0^1 xe^x\,dx$.

- **Schrijfwijze 1:** Stel $f(x) = x$ en $u'(x) = e^x$, dan is $f'(x) = 1$ en $u(x) = e^x$.
  Partiële integratie geeft dan

$$\int_0^1 x \cdot e^x\,dx \overset{P.I.}{=} \left[x \cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x\,dx$$
$$= \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - (e^1 - e^0) = e - (e-1) = 1;$$

- **Schrijfwijze 2:** Stel $f(x) = x$ en $du = u'(x)\,dx = e^x\,dx$;

$$\int_0^1 x \cdot e^x\,dx = \int_0^1 x d(e^x) \overset{P.I.}{=} \left[x \cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$
$$= \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - (e^1 - e^0) = e - (e-1) = 1$$

Ook hier kan je echter eerst de onbepaalde integraal uitrekenen, en vervolgens Eigenschap 1 gebruiken. Dit is altijd de veiligste optie, omdat je dan geen problemen kan hebben met integratiegrenzen.

Voorbeeld 2.2.3. Bereken $\int_1^e \ln x\,dx$.

Dit voorbeeld wordt in onderstaande video opgelost door $v = x$ te kiezen in de formule $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (volgens Schrijfwijze 2). Het antwoord is $1 - \ln 1$.

YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=x9m15nsOl_o

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Bepaalde integralen: georiënteerde oppervlakte

In de definitie van de bepaalde integraal hebben we de functie f positief verondersteld.

Als f niet noodzakelijk positief is, moeten we voorzichtiger zijn met wat we precies verstaan onder 'oppervlakte'. We geven een nieuwe definitie:

Definitie 2.3.1 (Georiënteerde oppervlakte en bepaalde integraal)**.**

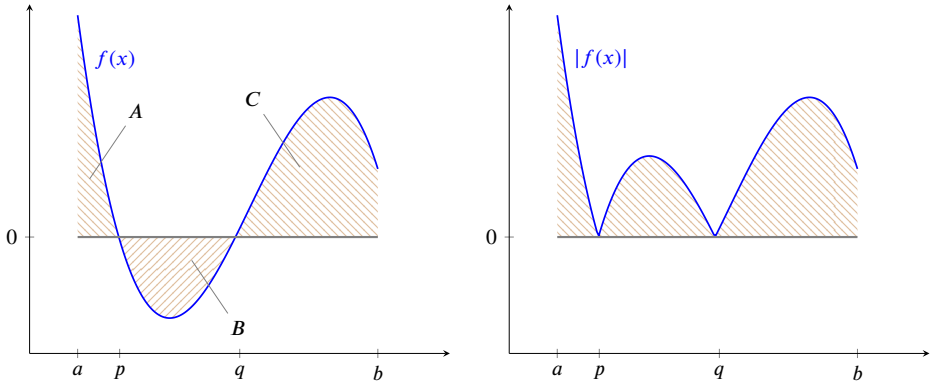
De **georiënteerde oppervlakte** telt per definitie de oppervlakte van een gebied dat boven de x-as ligt *positief* en telt de oppervlakte van een gebied dat onder de x-as ligt *negatief*.

Als f een continue functie is op een interval $[a, b]$, dan is de bepaalde integraal

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

gelijk aan de *georiënteerde oppervlakte* van het gebied tussen de grafiek van f, de x-as en de verticale rechten $x = a$ en $x = b$.

Dus als de functie f negatief is, telt de bepaalde integraal die oppervlakte ook als negatief. In de meeste gevallen is dat gelukkig precies wat we willen (negatieve snelheid betekent achteruit rijden, en de overeenstemmende afstand moeten we dus redelijkerwijze meestal ook van de totale afgelegde weg aftrekken).



De bepaalde integraal van de functie f over het interval $[a, b]$ in de linkse figuur is dus

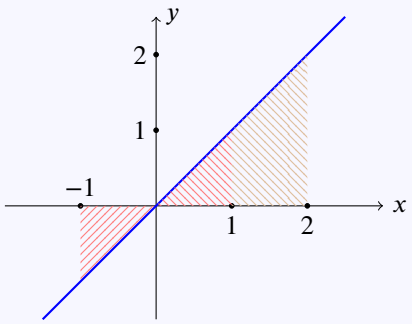
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^q f(x)\,dx + \int_q^b f(x)\,dx = \text{opp}\,A - \text{opp}\,B + \text{opp}\,C\,.$$

Voorbeeld 2.3.1.

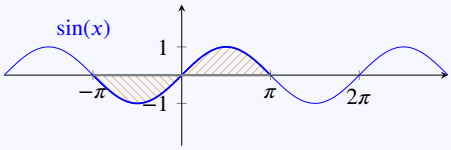
1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2}(2^2 - (-1)^2) = \frac{1}{2}(4-1) = \frac{3}{2}$

CC BY-NC-SA 4.0

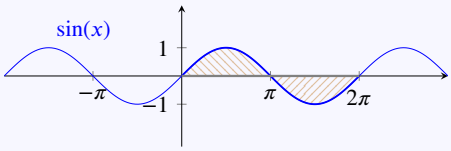
2.3 Bepaalde integralen: georiënteerde oppervlakte



2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_{-\pi}^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(-\pi)) = -(-1) - (-(-1)) = 1 - 1 = 0$



3. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_{0}^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0$



Indien het echter de bedoeling is om $\text{opp}\,A + \text{opp}\,B + \text{opp}\,C$ te berekenen, dan moet de bepaalde integraal van $|f(x)|$ berekend worden, zoals in de rechtse figuur geïllustreerd wordt.

$$\int_a^b |f(x)|\, dx = \text{opp}\,A + \text{opp}\,B + \text{opp}\,C$$

Om $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\, dx$ te berekenen moet je het integratie-interval $[a, b]$ opsplitsen in stukken waarop f ofwel positief, ofwel negatief is. Hiervoor moet je al de nulpunten van f zoeken. Op elk van deze stukken is $|f(x)|$ dan ofwel gelijk aan $f(x)$, ofwel gelijk aan $-f(x)$.

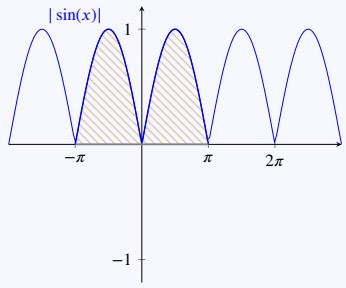
$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|\, dx &= \int_a^p |f(x)|\, dx + \int_p^q |f(x)|\, dx + \int_q^b |f(x)|\, dx \\ &= \int_a^p f(x)\, dx - \int_p^q f(x)\, dx + \int_q^b f(x)\, dx \\ &= \text{opp}\,A + \text{opp}\,B + \text{opp}\,C\end{aligned}$$

Voorbeeld 2.3.2.

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Bepaalde integralen: georiënteerde oppervlakte

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\, dx &= \int_{-\pi}^{0} |\sin x|\, dx + \int_{0}^{\pi} |\sin x|\, dx \\ &= \int_{-\pi}^{0} -\sin x\, dx + \int_{0}^{\pi} \sin x\, dx \\ &= \Big[\cos x\Big]_{-\pi}^{0} + \Big[-\cos x\Big]_{0}^{\pi} \\ &= \cos(0) - \cos(-\pi) + (-\cos\pi) - (-\cos 0) \\ &= 1 - (-1) + (-(-1)) - (-1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4\end{aligned}$$

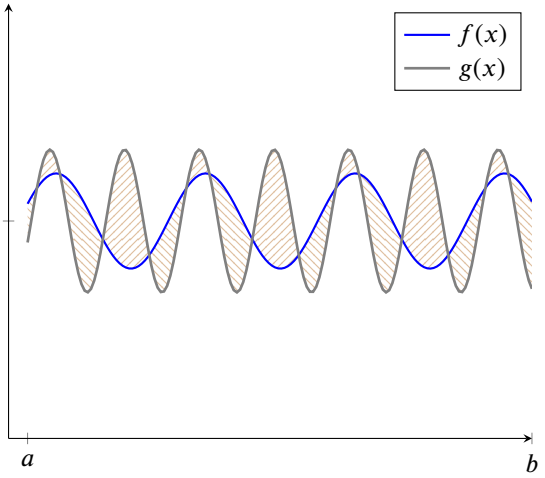


Merk op dat zodra f zowel positieve als negatieve waarden aanneemt op het interval $[a, b]$ in het algemeen niet geldt dat

$$\int_a^b |f(x)|\, dx = \left|\int_a^b f(x)\, dx\right| .$$

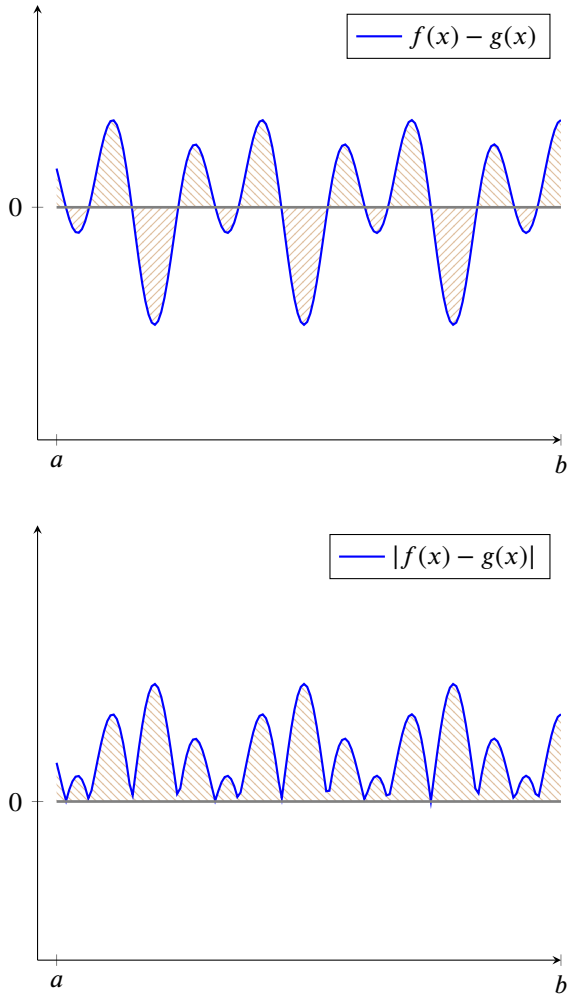
Om de oppervlakte **tussen twee krommen** te berekenen, berekenen we de bepaalde integraal van de absolute waarde van het verschil van beide functies:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$



CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Bepaalde integralen: georiënteerde oppervlakte



De ligging van de x-as heeft geen belang heeft bij het berekenen van de oppervlakte tussen twee krommen, want $|f(x) - g(x)|$ is de waarde van de bovenliggende kromme min die van de onderliggende kromme. De oppervlakte is dus de som van de integralen tussen twee opeenvolgende snijpunten met als integrand het voorschrift van de *bovenliggende kromme* min die van de *onderliggende kromme*, ongeacht of die krommen boven of onder de x-as liggen.

CC BY-NC-SA 4.0

3.0.A Extra oefeningen integralen (usolv-it)

3.0.A Extra oefeningen integralen (usolv-it)

Via onderstaande knop kan je in USolv-it extra oefeningen maken.

U krijgt telkens een willekeurige set van 10 oefeningen.

CC BY-NC-SA 4.0