KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Xoverzicht: Functies en hun grafieken

(Versie 2026/10/26H.4)

Inhoudsopgave

1.1 Intro Functies

Het begrip *functie* is erg belangrijk in de wiskunde. In deze module maken we kennis met het begrip. We bespreken ook enkele basiseigenschappen van reële functies. Dat vormt de basis voor de latere studie van afgeleiden en integralen.

(1) Een wat uitgebreide inleiding (en uitweiding, dus enkel voor liefhebbers) over het begrijpen van functies als input-output machines.

(2) Een definitie en algemene inleiding en motivering, met een aantal voorbeelden.

(3) Een overzicht van een aantal manieren om functies voor te stellen: tabel, pijlenvoorstelling, grafieken of functievoorschriften (i.e. formules).

(4) Een kort maar belangrijk stukje over grafieken van functies (dat overlapt met de voorstellingswijzen).

(5) Twee deeltjes over de som en verschil van functies, en over hun product en quotiënt.

(6) Een belangrijke inleiding tot het samenstellen van functies, en het verschuiven en herschalen van de grafieken.

(7) Het algemene gedeelte wordt afgesloten met inversen van functies.

(8) Als voorbeeld en toepassing bespreken we de exponentiële en logaritmische functies.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Intuïtieve definitie van het begrip functie

Functies zijn erg fundamentele objecten in de wiskunde. Ze verschijnen in velerlei contexten, onder verschillende gedaanten, en hebben verschillende definities en voorstellingen:

Definitie 1.2.1 (Pseudo-definities van het begrip functie)**.**

Een **functie** is iets dat voldoet aan volgende (allemaal min of meer equivalente) karakteriseringen:

- een *machine* of *black box* die voor elke toegelaten *input* telkens exact één *output* genereert.
- een bepaald soort *verband* tussen een *onafhankelijke variabele* en een *afhankelijke variabele*.
- een soort *formule*, die *iets* verandert in *iets anders* of *iets anders* produceert op basis van *iets*.
- een *wiskundig object* dat een *('functioneel') verband* legt tussen andere *wiskundige objecten*.

Deze pseudo-definitie is bewust erg vaag, maar volgende voorbeelden, definities en eigenschappen geven het concept 'functie' ongetwijfeld een steeds duidelijkere en concretere invulling. Een typisch eerste voorbeeld om in gedachten te houden is de functie 'kwadrateer', die met elk getal zijn kwadraat associeert.

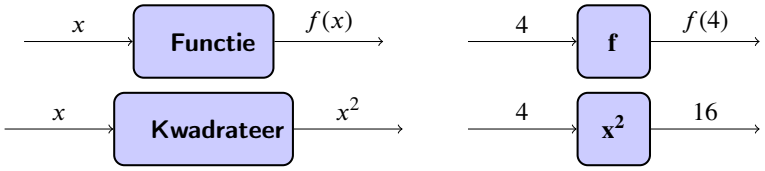
Een nuttige initiële voorstellingswijze van een functie bestaat uit een (in dit geval blauwe!) *black box*, die voor een bepaalde input I een bepaalde output O genereert:



Een **functie** is dus een ding dat een *input* omzet in een *output*. Ongeveer alles kan dienen als input en output van wiskundige functies, maar in wat volgt zullen we ons dikwijls concentreren op zogenaamde *reële functies*: dat zijn die functies waarvan zowel de input als de output reële getallen zijn. Voor dergelijke reële functies zijn er allerlei interessante begrippen en eigenschappen die niet zomaar van toepassing zijn op meer algemene functies, zoals nulpunten, minima en maxima, grafieken, afgeleiden, integralen,....

Een functie heeft meestal een **naam**. Dikwijls gebruiken we gewoon f van $f$unctie, maar ook h, g, f_1, f_2 komen dikwijls voor. Sommige functies hebben vaste standaardnamen of 'eigennamen', zoals de vierkantswortel, sinus, logaritme, ...

De **input**, of de *ietsen* noemen we dikwijls x. Soms gebruiken we ook andere letters zoals t, n, x_1,x_2 of zelfs ook y en y_1 voor de input.



De **output** of het resultaat van de functie noteren we dan naargelang de keuzes voor de input en de functie met $f(x)$ of bijvoorbeeld $h(t)$. Uitzonderlijk laten we de haakjes weg en schrijven ook fx. Bij de sinusfunctie $\sin x$ is dat bijvoorbeeld de gewoonte. Soms geven we ook een generieke naam aan de output. De letter y is daarvoor een erg populaire keuze. We schrijven dan typisch $y = f(x)$. We bedoelen daarmee dat f een functie is waar je x kan instoppen en wat er dan uitkomt noemen we y, of $f(x)$.

In de formule $y = f(x)$ staat x dus voor de input, f voor de functie (de *black-box*) en y de output. Pas op: die generieke naam y voor de output veroorzaakt dikwijls verwarring, want de letter y wordt bijvoorbeeld ook gebruikt voor de tweede coördinaat van een punt in het vlak en dat heeft weinig te maken met functiewaarden. Daarom vermijden we in deze cursus waar mogelijk om de output een naam te geven,

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Intuïtieve definitie van het begrip functie

en we noteren de functie die x afbeeldt op $f(x)$ liefst als

$$f : x \mapsto f(x) \quad \text{of} \quad x \mapsto f(x),$$

maar niet als $x \to f(x)$: let op het verschillende pijltje '$\mapsto$' versus '$\to$'.

We *lezen* de uitdrukking $f(x)$ als
$$\begin{cases} f \text{ van } x \\ \text{de functiewaarde van } f \text{ in } x \\ \text{het beeld van } f \text{ in } x \\ \text{het beeld van } x \text{ onder } f \text{ (of door } f\text{)} \end{cases}$$

Men zegt ook dat f de waarde x '*afbeeldt*' op $f(x)$, of dat 'f *toepassen* op x' waarde $f(x)$ geeft.

Voorbeeld 1.2.1. Als we de 'kwadrateer'-functie k noemen schrijven we dus:

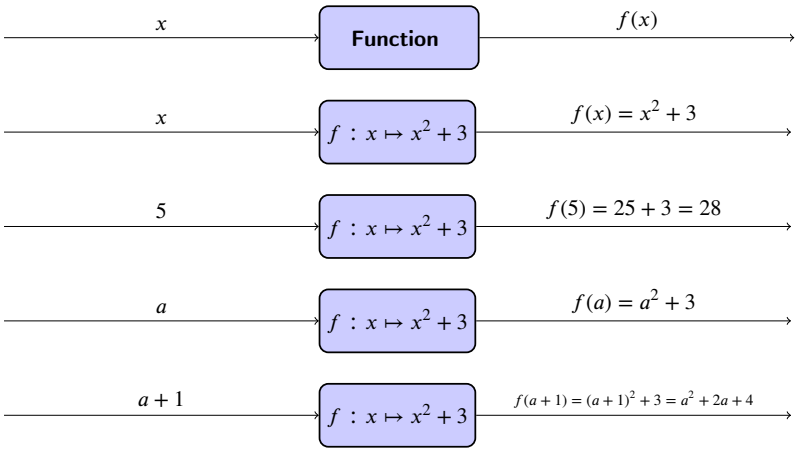
$$k : x \mapsto x^2 \quad \text{of} \quad k : x \mapsto k(x) = x^2$$

en dus geldt voor deze functie k dat $k(2) = 2^2 = 4$ en $k(4) = 4^2 = 16$.
We *moeten* de functie geen naam geven, en kunnen ook gewoon schrijven $x \mapsto x^2$.

De functie $f : x \mapsto x^2 + 3$ heeft bijvoorbeeld volgende *functiewaarden*:

$$f(0) = 0^2 + 3 = 3$$
$$f(5) = 5^2 + 3 = 28$$
$$f(-5) = (-5)^2 + 3 = 28 = f(5)$$

Functiewaarden worden ook weergegeven op de *black-box* diagrammen van hierboven. We kunnen bovendien ook *letters* gebruiken om de input van een functie voor te stellen, zoals hieronder weergegeven met de letter a. Dikwijls stellen deze letters dan een specifiek getal, een *vaste* waarde, voor. De letter x wordt meestal gebruikt om *eender welk* getal aan te tonen: we zeggen dat waarde van x *varieert*, of dat x een *variabele* is. Ook combinaties van letters en getallen zoals sommen, producten,... kunnen een input zijn van een functie.



Opmerking 1.2.1.

Het is belangrijk dat bij elke inputwaarde precies één vaste outputwaarde hoort. Volgende constructies zijn dus *geen* functies:

- $f : x \mapsto$(de som van het aantal ogen van x worpen met een dobbelsteen): de outputwaarden

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Intuïtieve definitie van het begrip functie

liggen niet vast.

- $f : x \mapsto$(een getal a zodat $a^2 = x$): de outputwaarde ligt niet vast, want 4 heeft zowel 2 als -2 als mogelijke outputwaarde.

Merk op dat een functie dus *niet* zomaar hetzelfde is als 'een formule' of 'een grafiek'. We komen daar verder op terug.

Voorbeeld 1.2.2 (*Reële* functies)**.**

De functie 'plus 5':	$f(x) = x + 5$
De functie 'maal 6':	$f(x) = 6x$
De functie '7':	$f(x) = 7$ (een *constante* functie)
De functie '0', of de *nulfunctie*:	$f(x) = 0$ (ook een *constante* functie)
De functie 'doe niets':	$f(x) = x$ (de *identieke* functie, is ook 'maal 1' en 'plus 0')
De functie 'kwadrateer':	$f(x) = x^2$
De functie 'tegengestelde':	$f(x) = -x$
De functie 'n-de macht':	$f(x) = x^n$ met $n \geq 1$ een bepaald natuurlijk getal
Eerstegraadsfuncties:	$f(x) = ax + b$ met zekere $a, b \in \mathbb{R}$
Goniometrische functies:	$f(x) = \sin(x)$
	$f(x) = \cos(ax + b)$ met $a, b \in \mathbb{R}$

Voorbeeld 1.2.3 (Andere eerder wiskundige functies)**.**

De functie die aan elke rechthoek met zijden a en b zijn oppervlakte associeert:

$$O_{pp}(\text{rechthoek met zijden } a \text{ en } b) = a \cdot b$$

De functie die met elk punt van het vlak zijn x-coördinaat associeert:

$$C_x(\text{ het punt } P(x, y) \text{ in het vlak}) = x$$

Een andere mogelijke naam voor de coördinaatfunctie C_x is eigenlijk gewoon x. We krijgen dan $x(P) = x$. Hierbij is de eerste x de naam van de functie en de tweede x de x-coördinaat van het punt P.

De functie die met elke eindige verzameling haar aantal elementen associeert:

$$\#(\text{verzameling } A \text{ met } n \text{ elementen}) = n$$

De haakjes om aan te geven dat het een functie is worden in dit geval ook weggelaten. We krijgen dan $\#A$ voor het aantal elementen van een verzameling, dus met het voorbeeld van hierboven noteren we $\#A = n$.

Voorbeeld 1.2.4 (Iets minder direct wiskundige functies)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Intuïtieve definitie van het begrip functie

Snelheidsfunctie v:	$v(t)$ = de snelheid van een bepaald voorwerp op tijdstip t, in km/u.
Puntenfunctie P:	$P(\textit{leerling})$ = punten van bepaalde *leerling* (op een bepaalde toets).
Leerlinggemiddeldefunctie μ_L:	$\mu_L(\textit{leerling})$ = gemiddelde (over alle toetsen) van een bepaalde *leerling*.
Toetsgemiddeldefunctie μ_T	$\mu_T(\textit{toets})$ = gemiddelde (over alle leerlingen) op een bepaalde *toets*.
Grappigheidsfunctie G_o	$G_o(\textit{grap})$ = het aantal seconden dat bij een vast proefpubliek werd gelachen na het horen van een *grap*.
Verkiezingsfuncties T	$T(\textit{kandidaat})$ = het aantal stemmen dat een *kandidaat* behaalde bij een bepaalde verkiezing.

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Domein, codomein en beeld van een functie

Functies veranderen *inputs* in *outputs*, en om te bepalen welk type inputs en outputs kunnen of mogen voorkomen gebruiken we drie begrippen: het *domein* van een functie is de verzameling van alle toegelaten inputs, en haar *codomein* is de verzameling waartoe alle outputs moeten behoren, en haar *beeld* is de verzameling van de effectief voorkomende outputs:

Definitie 1.3.1 (Domein, codomein en beeld van een functie)**.**

Het **domein** $\operatorname{dom} f$ van een functie f is de verzameling van alle *toegelaten inputs* van de functie.

Het **codomein** $\operatorname{codom} f$ van een functie f is de verzameling waarin alle *mogelijke outputs* liggen.

Het **beeld** $\operatorname{bld} f$ van een functie f is de verzameling van alle *effectieve outputs* van de functie.

Een functie f van een domein A naar een codomein B noteren we als

$$f : A \to B : x \mapsto f(x) \quad \text{of} \quad \begin{array}{rl} f : A & \to B \\ x & \mapsto f(x) \end{array} \quad \text{of} \quad \begin{array}{rl} f : \operatorname{dom} f & \to \operatorname{codom} f \\ x & \mapsto f(x) \end{array}$$

en we lezen: f is een functie van A naar B die (een willekeurige) x afbeeldt op $f(x)$.

Men gebruikt soms ook **doel** van een functie voor het *codomein* en **bereik** voor het *beeld*.

We gebruiken het woord **beeld** zowel voor het *beeld van een functie*, dus voor de *verzameling* $\operatorname{bld} f$, als voor het *beeld van een getal* x onder de functie f, dus voor het *getal* $f(x)$.

Voorbeeld 1.3.1 (Domein en codomein van functies)**.**

Functie	domein	codomein	beeld
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x+5$	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}$✓
$f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x+5$	$\mathbb{R}^+$✓	$\mathbb{R}$✓	$[5,+\infty[$✓
$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}^+$✓
$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}^+$✓	$\mathbb{R}^+$✓
$f_5 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto -\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$✓	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}^-$✓

Bij de notatie $f : A \to B$ kan je domein en codomein aflezen, maar het beeld moet je berekenen.

Opmerking 1.3.1.

- Niet elk element van het *codomein* moet ook effectief worden *bereikt* door de functie f. De elementen die effectief worden bereikt, vormen precies het *beeld* of *bereik* van f. Het bereik van f is dus een *deelverzameling* van het codomein van f, en het beeld of bereik kan eventueel *kleiner* zijn dan het codomein maar nooit groter. De functie

  $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$$

  heeft als *codomein* $\mathbb{R}$, maar het *beeld* is $\mathbb{R}^+$ omdat het kwadraat van een reëel getal altijd positief is, en elke positief getal ook een kwadraat is.

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Domein, codomein en beeld van een functie

- *Elk* element van het *domein* moet een (uniek) beeld hebben. Volgende uitdrukking is dus *fout*:

$$\cancel{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}},$$

omdat de vierkanstwortel niet gedefinieerd is voor *negatieve* getallen.

We kunnen de vierkantswortelfunctie wel schrijven als

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}.$$

Let op: het domein *moet niet* de grootst mogelijke verzameling zijn waarop de functie gedefinieerd kan worden. Ook volgende uitdrukking definieert een functie:

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$$

Per afspraak zijn twee functies aan elkaar gelijk als ze hetzelfde domein hebben, hetzelfde codomein, en allebei een element van hun domein afbeelden op dezelfde waarde van het codomein. Bovenstaande functies f en g zijn dus strikt genomen *verschillende functies*, en we zullen verder zien dat dat belangrijk kan zijn bij het bestuderen van grafieken en vooral inverse functies.

- Als voor reële functies geen expliciet domein is opgeven, nemen we per conventie als domein de grootst mogelijke deelverzameling van $\mathbb{R}$ waarop de functie kan gedefinieerd worden. Als codomein nemen we meestal $\mathbb{R}$ als het niet expliciet is opgegeven.
Dus, met $f : x \mapsto 1/x$ bedoelen we $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$.

- Let op het verschil in het gebruik van de pijlen: we gebruiken $\to$ tussen het domein en het codomein, maar we gebruiken steeds $\mapsto$ om aan te geven waarop een element wordt afgebeeld. De pijl $\to$ duidt dus aan tussen welke verzamelingen de functie gedefinieerd is, en de pijl $\mapsto$ duidt aan waarop een element wordt afgebeeld.

Voorbeeld 1.3.2 (Varianten van functies door aanpassen van domein of codomein)**.**

$$\begin{array}{lcccl} f_1: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}, & x \mapsto x-5 \\ f_2: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z}, & x \mapsto x-5 \\ f_3: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, & x \mapsto x-5 \end{array}$$

zijn varianten van 'verminder met vijf', en volgende functies zijn varianten van de sinusfunctie:

$$\begin{array}{lcccl} g_1: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, & x \mapsto \sin(x) \\ g_2: & \mathbb{R} & \to & [-1,1], & x \mapsto \sin(x) \\ g_3: & [0,2\pi] & \to & [-1,1], & x \mapsto \sin(x) \\ g_4: & [-\pi,\pi] & \to & [-1,1], & x \mapsto \sin(x) \end{array}$$

Een functie wordt dus niet alleen bepaald door wat ze doet, maar ook door haar mogelijke (of 'toegelaten') input en output. Zo is de functie 'kwadrateer-natuurlijke-getallen'

$$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto x^2$$

strikt gesproken een *andere* functie dan de functie 'kwadrateer-gehele-getallen'

$$f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : x \mapsto x^2$$

of de functie 'kwadrateer-reële-getallen'

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2.$$

Dus, twee functies zijn gelijk aan elkaar als en slechts als ze dezelfde inputverzameling en outputverzameling hebben en als ze aan elke inputwaarde dezelfde outputwaarde toekennen.

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Domein, codomein en beeld van een functie

Zelfs als elke functie $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ en $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telkens elke x afbeeldt op x^2, dan zijn het strikt genomen toch nog steeds *verschillende* functies. In vele gevallen zullen we in de praktijk echter toch gewoon spreken over de functie 'kwadrateer' en het onderscheid in domein en codomein negeren. We noteren dan $f : x \mapsto x^2$.

Bij de bespreking van inverse functies zal dit onderscheid belangrijk worden.

Voorbeeld 1.3.3 (Slecht gedefinieerde functies)**.**

- De uitdrukking ~~$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x - 5$~~ is *ongeldig* omdat voor $x < 5$ geldt dat $f(x) < 0$ en dus niet behoort tot het aangegeven codomein $\mathbb{R}^+$.

  $f : \mathbb{R}^+ \to [-5, \infty[: x \mapsto x - 5$ is wel een correct gedefinieerde functie, net zoals

  $f : [5, \infty[\to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x - 5.$

  (Merk op: $[-5, \infty[$ is het interval van de reële getallen groter dan of gelijk aan -5.)

- De uitdrukking ~~$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$~~ is *ongeldig* omdat f niet gedefinieerd is voor $x = 0$, en 0 kan dus niet behoren tot het domein.

  $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ is wel een correct gedefinieerde functie, net zoals

  $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$

  Merk op: $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ is de verzameling van de reële getallen *zonder* de getallen 0 en 2.
  Het symbool $\mathbb{R}_0$ betekent $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dus de reële getallen zonder nul.

- De uitdrukking ~~$f : \mathbb{R} \to [0, 1] : x \mapsto \sin x$~~ is *ongeldig* omdat $\sin x$ ook negatief kan zijn.

  $f : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \sin x$ is wel een correct gedefinieerde functie.

CC BY-NC-SA 4.0

1.3.A Oefeningen domein functie

Oefening 1.3.1. Geef telkens het grootst mogelijke domein voor de functie met volgend functievoorschrift:

1. $f(x) = \sqrt{x}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f =$ .....

2. $f(x) = \sqrt{1+x}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f =$ .....

3. $f(x) = \sqrt{1-x}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f =$ .....

4. $f(x) = |x|$. Antwoord: $\operatorname{dom} f =$ .....

5. $f(x) = 1 - |x|$. Antwoord: $\operatorname{dom} f =$ .....

6. $f(x) = \sqrt{1-|x|}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f =$ .....

7. $f(x) = \sqrt{-|x|}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f =$ .....

8. $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f =$ .....

9. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f =$ .....

10. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f =$ .....

11. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f =$ .....

12. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f =$ .....

13. $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f =$ .....

CC BY-NC-SA 4.0

1.3.B Oefeningen beeld functie

Oefening 1.3.2. Geef telkens het *beeld* van volgende functies.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Antwoord: bld $f =$ .....

2. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Antwoord: bld $f =$ .....

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Antwoord: bld $f =$ .....

4. $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Antwoord: bld $f =$ .....

5. $f : [-1, 2] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Antwoord: bld $f =$ .....

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$. Antwoord: bld $f =$ .....

7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto cx^2 + a$, $a \in \mathbb{R}$ en $c \in \mathbb{R}_0^+$. Antwoord: bld $f =$ .....

8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -cx^2 - a$, $a \in \mathbb{R}$ en $c \in \mathbb{R}_0^+$. Antwoord: bld $f =$ .....

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Voorstellingswijzen van functies

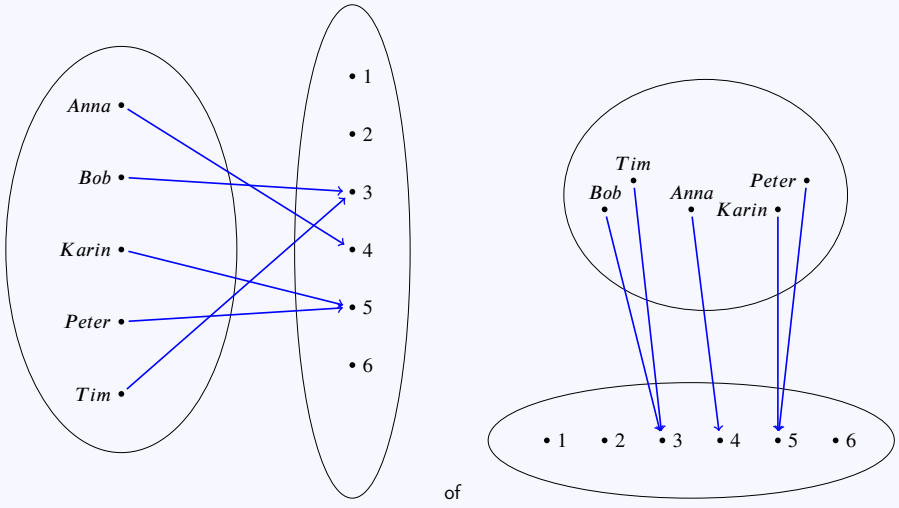
We bespreken enkele manieren om functies te definiëren, voor te stellen of te beschrijven. Als het domein eindig is, kunnen we een functie voorstellen met een *tabel*. Voor *reële* functies (dat zijn functies met zowel het domein als het codomein de reële getallen), zijn *grafieken* en *formules* gebruikelijke voorstellingen.

Voor (kleine) **eindige** verzamelingen beschikken we over enkele erg concrete manieren om functies te definiëren of voor te stellen. We bespreken ze aan de hand van de functie die aan elke voornaam het aantal letters associeert waaruit die voornaam bestaat. We definiëren de functie op het groepje vrienden $A = \{Anna, Bob, Karin, Peter, Tim\}$. Als codomein nemen we de verzameling $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. De functie f beeldt dus elke naam af op het aantal letters van die naam.

Voorbeeld 1.4.1 (Pijlenvoorstelling of verzamelingvoorstelling)**.** We kunnen de functie

$$f : A = \{Anna, Bob, Karin, Peter, Tim\} \to B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} : x \mapsto \text{het aantal letters in } x$$

voorstellen met volgende zogenaamde **pijlenvoorstelling**:



De linkse voorstelling is de meest traditionele 'pijlenvoorstelling'. In de rechtse voorstelling is de functie 'van boven naar beneden' voorgesteld in plaats van 'van links naar rechts'. Een ander verschil is dat in de rechtse voorstelling de functie zelf wordt voorgesteld als een zo eenvoudig mogelijke 'projectie', die de bovenste verzameling 'projecteert' op de onderste. Daarbij komen elementen met dezelfde functiewaarde ongeveer boven elkaar te liggen.

Voorbeeld 1.4.2 (Opsomming)**.** We kunnen de functie

$$f : A = \{Anna, Bob, Karin, Peter, Tim\} \to B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} : x \mapsto \text{het aantal letters in } x$$

ook opschrijven met een **opsomming** van al de functiewaarden:

$$\begin{array}{lcl} f(Anna) & = & 4 \\ f(Bob) & = & 3 \\ f(Karin) & = & 5 \\ f(Peter) & = & 5 \\ f(Tim) & = & 3 \end{array} \quad \text{of} \quad f(x) = \begin{cases} 4 & \text{als } x = Anna \\ 3 & \text{als } x = Bob \\ 5 & \text{als } x = Karin \\ 5 & \text{als } x = Peter \\ 3 & \text{als } x = Tim \end{cases} \quad \text{of} \quad f(x) = \begin{cases} 3 & \text{als } x = Bob \text{ of } Tim \\ 4 & \text{als } x = Anna \\ 5 & \text{anders} \end{cases}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Voorstellingswijzen van functies

Voorbeeld 1.4.3 (Koppels). We kunnen de functie

$$f : A = \{Anna, Bob, Karin, Peter, Tim\} \to B = \{1,2,3,4,5,6\} : x \mapsto \text{ het aantal letters in } x$$

ook opschrijven als de verzameling van de **koppels** $(x, f(x))$:

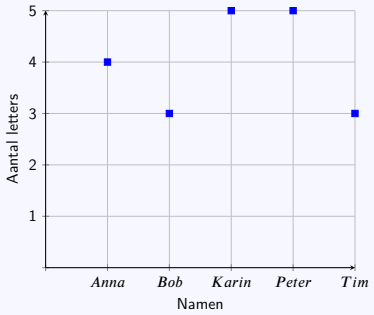
$$\Big\{(Anna,4),(Bob,3),(Karin,5),(Peter,5),(Tim,3)\Big\}$$

Voorbeeld 1.4.4 (Tabel of grafiek). We kunnen de functie

$$f : A = \{Anna, Bob, Karin, Peter, Tim\} \to B = \{1,2,3,4,5,6\} : x \mapsto \text{ het aantal letters in } x$$

ook voorstellen met een **tabel** of een **grafiek**:

x	$f(x)$
$Anna$	4
Bob	3
$Karin$	5
$Peter$	5
Tim	3

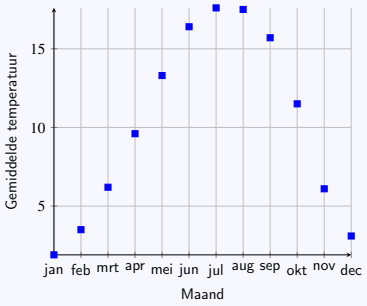


Voorbeeld 1.4.5 (Extra voorbeeld: gemiddelde temperaturen).

De voorstelling als grafiek wordt nuttiger naarmate er meer elementen zijn, met een zekere regelmaat in de functiewaarden.

Beschouw de functie T_{gem} : {jan, feb, mrt, apr, mei, jun, jul, aug,sep, okt, nov, dec} $\to \mathbb{R}$ die voor elke maand de gemiddelde temperatuur geeft in Ukkel:

x	$T_{gem}(x)$
Jan	1.9
Feb	3.5
Maa	6.2
Apr	9.6
Mei	13.3
Jun	16.4
Jul	17.6
Aug	17.5
Sep	15.7
Okt	11.5
Nov	6.1
Dec	3.1



Functies $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ waarvan zowel de input als de output reële getallen zijn, noemen we **reële functies**, en dergelijke functies kunnen bepaald worden met *formules* en/of *grafieken*.

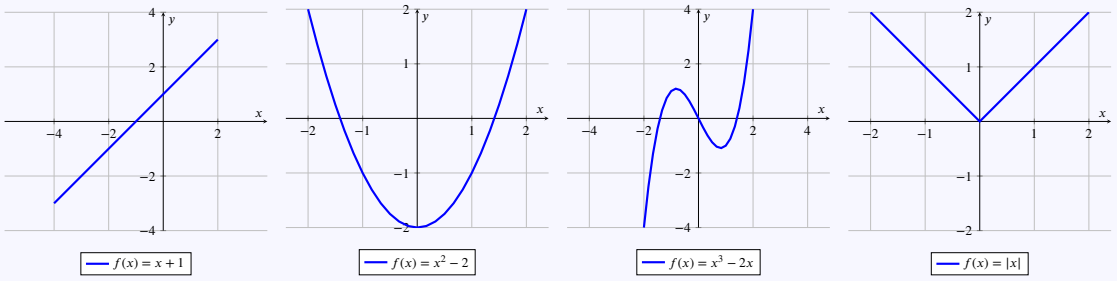
Voorbeeld 1.4.6 (Grafieken).

De **grafiek** van een functie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bekomen we door in een vlak met x, y-coördinaten alle punten $(x, f(x))$ te tekenen. Voor de meeste reële functies die we in de praktijk tegenkomen

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Voorstellingswijzen van functies

bekomen we dan een mooie kromme, die eventueel wel gaten kan hebben en sprongen kan maken. De kromme voldoet altijd aan de **'verticale-snijlijn-test'**: elke verticale lijn snijdt de grafiek van een functie ten hoogste één keer, namelijk in het punt $(x, f(x))$ voor de verticale door $(x, 0)$. Dit volgt uit de voorwaarde dat bij elke x uit het domein van de functie f slechts één functiewaarde $f(x)$ hoort. Voor x *buiten* het domein van de functie f snijdt de verticale door x de grafiek van f *niet*.



Functies worden dikwijls gedefinieerd met *formules*, en soms wordt zelfs geen onderscheid meer gemaakt tussen 'een formule voor een bepaalde functie' en 'een functie gedefinieerd door een bepaalde formule'.

Een *formule* is een reeks symbolen die aan bepaalde regels voldoet: $x^2 + a^2x + 7$ is een goede formule, maar $x - +8(a7)$ is dat niet. Een *functie* is een soort machine die een invoer omzet in een uitvoer. Het is wel zo dat veel formules kunnen worden gebruikt om er een functie mee te maken, en dat nogal wat functies door een formule worden berekend.

Voorbeeld 1.4.7. Veel functies worden voorgesteld door *formules* die de functiewaarde $f(x)$ *berekenen*:

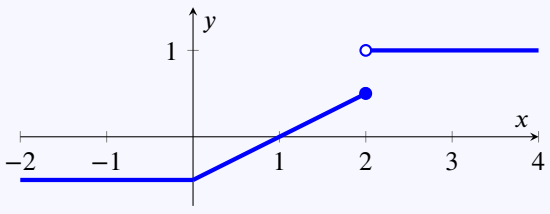
Functie	Formule	Functie	Formule
'plus 5'	$f(x) = x + 5$	'min 5'	$f(x) = x - 5$
'kwadrateer'	$f(x) = x^2$	'sinus van de dubbele hoek'	$f(x) = \sin(2x)$
'vierkantswortel'	$f(x) = \sqrt{x}$	'vierkantswortel plus acht'	$f(x) = \sqrt{x} + 8$

Pas op: verschillende formules kunnen toch dezelfde functie bepalen. Zo zijn de functies $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2}$ en $f_2 : x \mapsto |x|$ aan elkaar gelijk. En voor sommige functies bestaat er geen (eenvoudige) formule, bijvoorbeeld de functie die elk natuurlijk getal n afbeeldt op het n-de priemgetal.

Voorbeeld 1.4.8 (Meervoudig functievoorschrift)**.**

Soms bestaat er geen eenvoudige formule die geldt voor alle x, maar kunnen we het domein opsplitsen over deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ waar er wel eenvoudige formules bestaan:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x < 0 \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{2} & 0 \le x \le 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

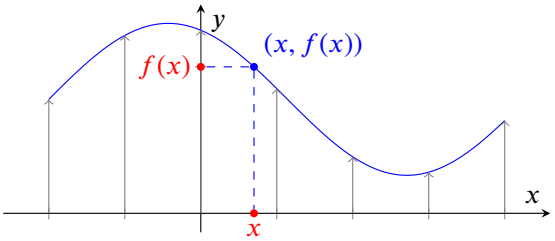


CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Grafieken van functies

Een reële functie kan worden voorgesteld door een *grafiek*, waarop een aantal belangrijke eigenschappen direct kunnen worden afgelezen. In de praktijk worden functies dikwijls geïdentificeerd met hun grafiek.

Definitie 1.5.1. De **grafiek van een reële functie** f is de kromme in het xy-vlak die bestaat uit de punten $(x, f(x))$.



De grafiek van de functie f geeft dus voor elk getal x in het domein op de x-as aan op welk getal $f(x)$ op de y-as het wordt afgebeeld. Als je de grafiek kent, vind je $f(x)$ dus als de *hoogte* van de grafiek in x. Als je de grafiek moet tekenen, wordt de hoogte boven x bepaald door $f(x)$.

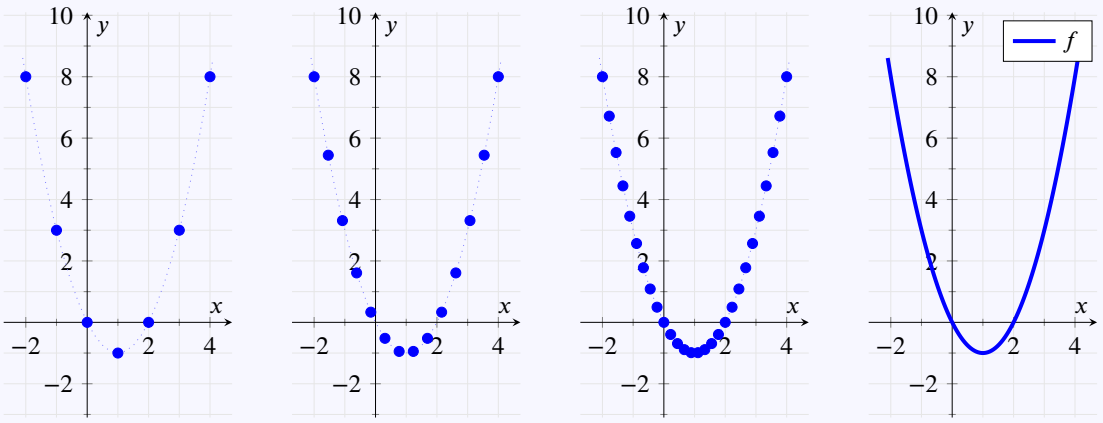
Voorbeeld 1.5.1.

We onderzoeken de functie $f : x \mapsto x^2 - 2x$.

Als er geen expliciet domein is gegeven is, beschouwen we per afspraak het grootst mogelijke domein, in dit geval dus $\mathbb{R}$. We kunnen niet voor *alle* $x \in \mathbb{R}$ de bijhorende punten $(x, f(x))$ tekenen want dan krijgen we een oneindig grote figuur. We kiezen dus een relevant deel van het domein, hier bijvoorbeeld x tussen -2 en 4, zodat we een correct beeld krijgen van de functie.

Links zijn boven de punten $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ de functiewaarden $f(x) = 8, 3, 0, -1, 0, 3, 8$ aangeduid. Op de tekeningen rechts daarvan zijn telkens meer functiewaarden aangeduid. Voldoende punten verbonden door een vloeiende kromme geven een goede benadering van de grafiek.

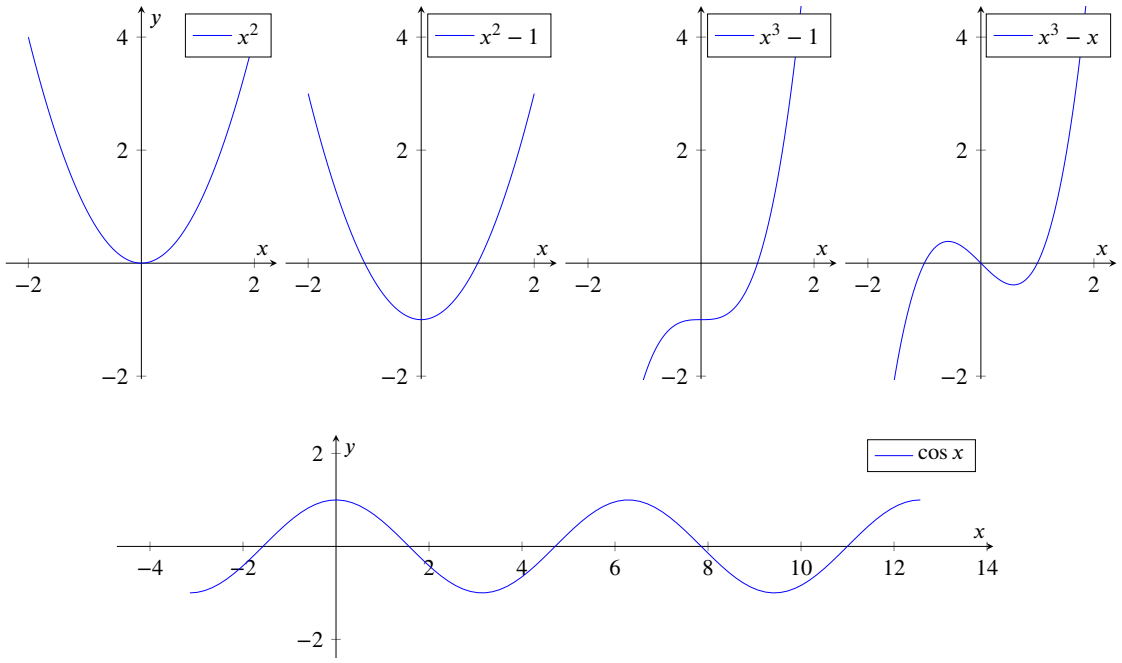
We **lezen** die grafiek van links naar rechts, zoals een tekstregel. We zeggen dus dat de functie f (of de grafiek van de functie f) *daalt* tot aan $x = 1$ en vanaf daar verder *stijgt*. De functie (of de grafiek) heeft *nulpunten* in $x = 0$ en $x = 2$, en bereikt haar *minimum* $y = -1$ in het punt $x = 1$. De functie is *negatief* tussen de nulpunten, dus op het interval $]0, 2[$ en *positief* daarbuiten.



1.5 Grafieken van functies

Oefening 1.5.1 (Enkele grafieken van reële functies)**.** Lees volgende eigenschappen af van de grafieken. Het is niet nodig berekeningen te maken om de exacte waarde te bekomen.

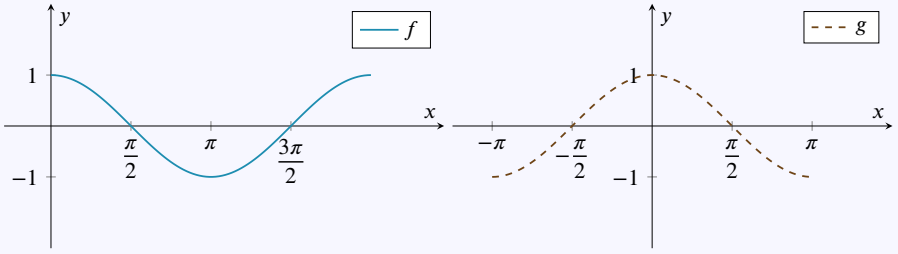
- waar stijgt de functie?
- waar daalt de functie?
- waar is de functie positief?
- waar is de functie negatief?
- waar is de functie nul?
- waar zijn de nulpunten van de functie?
- waar zijn de functiewaarden gelijk aan 1?
- waar heeft de functie een minimum?
- waar heeft de functie een maximum?



Voorbeeld 1.5.2. De grafiek hangt af van het *domein* van de functie:

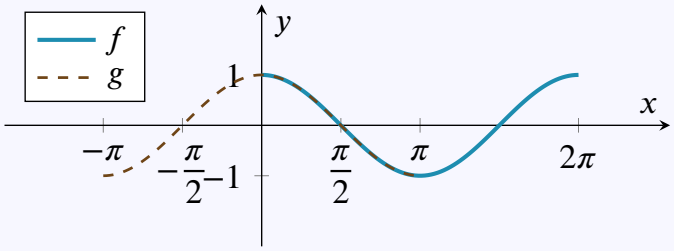
- De cosinusfunctie beperkt tot verschillende intervallen heeft verschillende grafieken:

$$\begin{array}{rrcll} f: & [0,2\pi] & \to & [-1,1], & x \mapsto \cos(x) \\ g: & [-\pi,\pi] & \to & [-1,1], & x \mapsto \cos(x) \end{array}$$

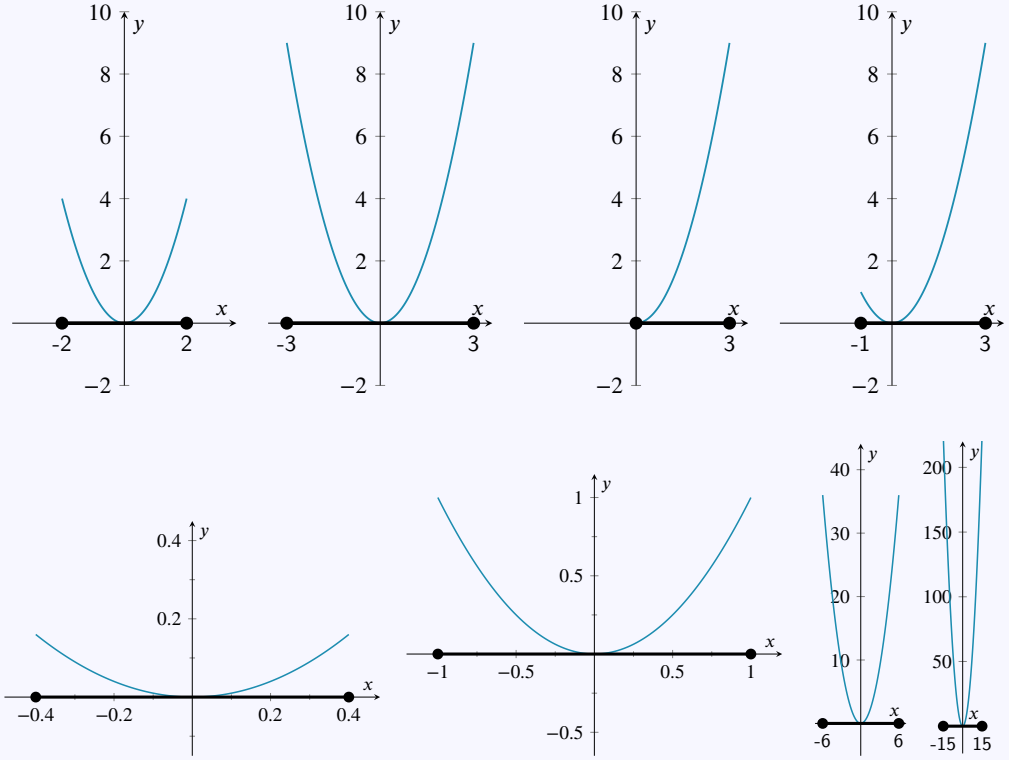


CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Grafieken van functies



- Soms kiezen we andere schalen op de x-as en de y-as. Samen met verschillende domeinen, leidt dat tot erg uiteenlopende grafieken voor 'dezelfde' functie. Dit zijn allemaal grafieken van functies $x \mapsto x^2$ op verschillende intervallen:



CC BY-NC-SA 4.0

1.5.A Oefeningen grafieken van functies

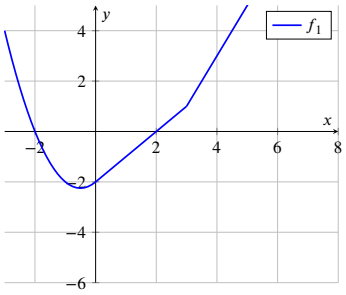
Oefening 1.5.2. Teken (zonder een grafisch rekenmachine te gebruiken) de grafiek van de functies met volgende voorschriften.

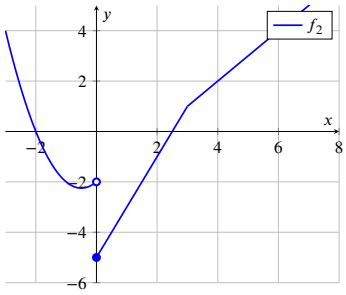
1. $f(x) = |x|$
2. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$
3. $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$
4. $f(x) = \dfrac{x-|x|}{2}$
5. $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$

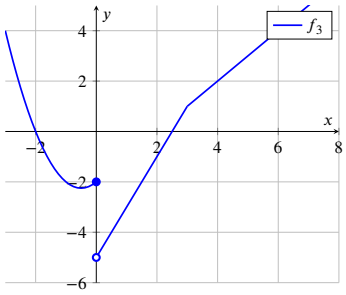
Oefening 1.5.3. Schets de grafieken van volgende functies met *meervoudige functievoorschriften*:

1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \neq 0 \\ 1 & \text{als } x = 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{als } x < 0 \\ x & \text{als } x \geq 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \leq 1 \\ x-1 & \text{als } x > 1 \end{cases}$

Oefening 1.5.4. Welk functievoorschrift hoort bij welke grafiek ?







1. $\boxed{f_1}\boxed{f_2}\boxed{f_3} = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{als } x \leq 0 \\ 2x-5 & \text{als } 0 < x < 3 \\ x-2 & \text{als } x \geq 3 \end{cases}$
2. $\boxed{f_1}\boxed{f_2}\boxed{f_3} = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{als } x < 0 \\ x-2 & \text{als } 0 \leq x < 3 \\ 2x-5 & \text{als } x \geq 3 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

1.5.A Oefeningen grafieken van functies

3. $\boxed{f_1}\boxed{f_2}\boxed{f_3} = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{als } x < 0 \\ 2x - 5 & \text{als } 0 \leq x < 3 \\ x - 2 & \text{als } x \geq 3 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

1.6 Som en verschil van functies

Bij 'rekenen' denken we in eerste instantie aan 'rekenen met getallen', maar je kan ook 'rekenen met functies'. We beschouwen hier eerst de som en het verschil van *functies*, later volgen product en quotiënt. Er bestaan ook complexe operaties die geen veralgemeningen meer zijn voor operaties op getallen, zoals functies samenstellen, inverteren, afleiden en integreren.

We bestuderen de som en het verschil van *reële* functies $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. We gebruiken meestal de korte schrijfwijze, dus $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ voor de functie met het grootst mogelijke domein $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Definitie 1.6.1 (Som, verschil en tegengestelde van reële functies)**.** Voor reële functies f en g geldt:

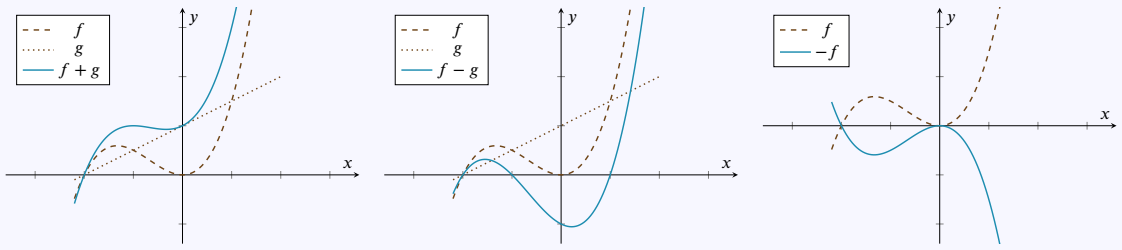
$$\begin{array}{rcccc} f+g & : & x \mapsto & (f+g)(x) & \overset{\text{def}}{=} & f(x)+g(x) \\ f-g & : & x \mapsto & (f-g)(x) & \overset{\text{def}}{=} & f(x)-g(x) \\ -f & : & x \mapsto & (-f)(x) & \overset{\text{def}}{=} & -f(x) \end{array}$$

Som en verschil van functies zijn gedefinieerd waar *beide functies* gedefinieerd zijn, en er geldt:

De	**som**	$f+g$	beeldt x af op de	som	$f(x)+g(x)$.
Het	**verschil**	$f-g$	beeldt x af op het	verschil	$f(x)-g(x)$.
De	**tegengestelde**	$-f$	beeldt x af op het tegengestelde		$-f(x)$.

Voorbeeld 1.6.1. Voor de functies $f : x \mapsto x^3 + 2x^2$ en $g : x \mapsto x + 2$ is

$$\begin{array}{rcl} \text{de som} & f+g: & x \mapsto x^3+2x^2+x+2 \\ \text{het verschil} & f-g: & x \mapsto x^3+2x^2-x-2 \\ \text{de tegengestelde} & -f: & x \mapsto -x^3-2x^2 \end{array}$$



Opmerking 1.6.1. Deze definitie bevat niets spectaculairs: de som van functies is wat iedereen verwacht wat een som van functies moet zijn. Merk wel op:

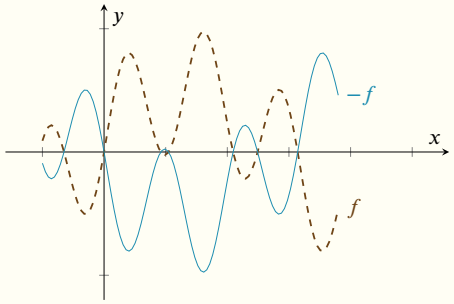
(a) De functies $f+g$ en $f-g$ zijn enkel gedefinieerd voor x-waarden waarvoor zowel f als g gedefinieerd is. Je kan dit ook formuleren als: het domein van de som en van het verschil is gelijk aan de doorsnede van het domein van f en het domein van g.

(b) De som van twee functies f en g wordt 'puntsgewijs' gedefinieerd. Dat betekent dat de functiewaarde van $f+g$ in een punt enkel afhangt van de functiewaarden van f en g in dat punt. Voor andere operaties op functies zal dat niet steeds het geval zijn. Zo hangt de afgeleide van een functie in een bepaald punt af van de functiewaarden van de functie in de omgeving van dat punt, en de waarde van een primitieve functie hangt af van de waarden over een interval.

(c) De grafiek van $-f$ is de spiegeling van de grafiek van f over de x-as.

CC BY-NC-SA 4.0

1.6 Som en verschil van functies



(d) De tegengestelde functie is een speciaal geval van het verschil: $-f = 0 - f$. (Merk op dat de 0 hier staat voor de nul*functie*: de functie die elke getal afbeeldt op het getal 0).

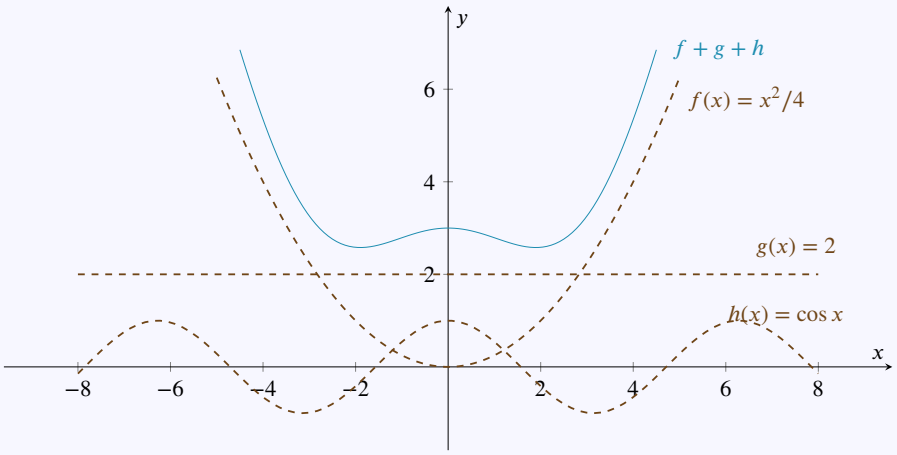
(e) Het verschil van functies is een speciaal geval van de som: $f - g = f + (-g)$.
Elk verschil is dus ook een som, namelijk de som met het tegengestelde.

(f) Waar de functiewaarde van g strikt negatief is, ligt de grafiek van $f - g$ boven de grafiek van f.

(g) De *nulpunten* van $f - g$ zijn precies de snijpunten van de grafieken van f en g.

Voorbeeld 1.6.2 (Som van drie functies)**.**

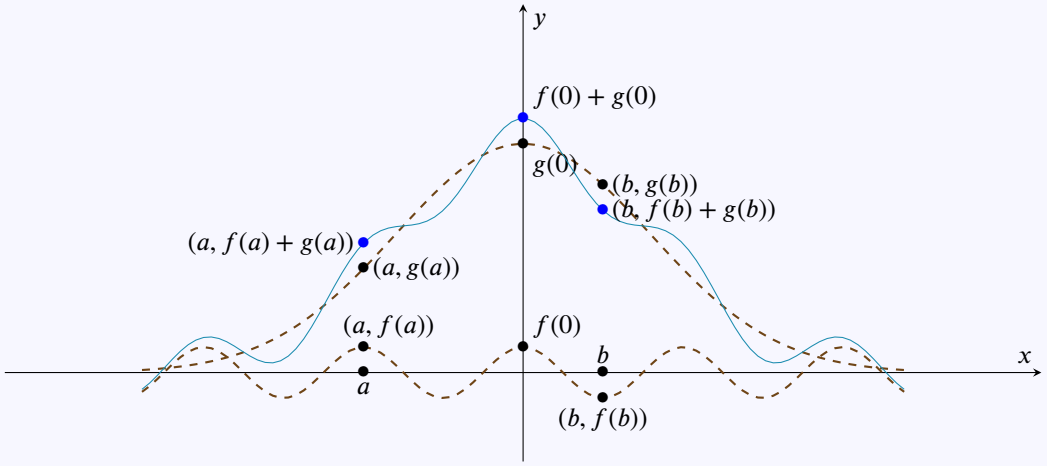
$$f : x \mapsto x^2/4, \quad g : x \mapsto 2, \quad h : x \mapsto \cos(x)$$
$$f + g + h : x \mapsto x^2 + 2 + \cos(x).$$



Voorbeeld 1.6.3 (Grafiek van een som, geen functievoorschrift gegeven)**.** De volgende figuur toont de grafiek van twee functies f en g (in het rood) en hun som (in het blauw). Voor elke waarde van x vinden we de functiewaarden $f(x)$ en $g(x)$ terug op de grafieken van f en g en de som van deze functiewaarden $f(x) + g(x)$ op de grafiek van $f + g$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.6 Som en verschil van functies

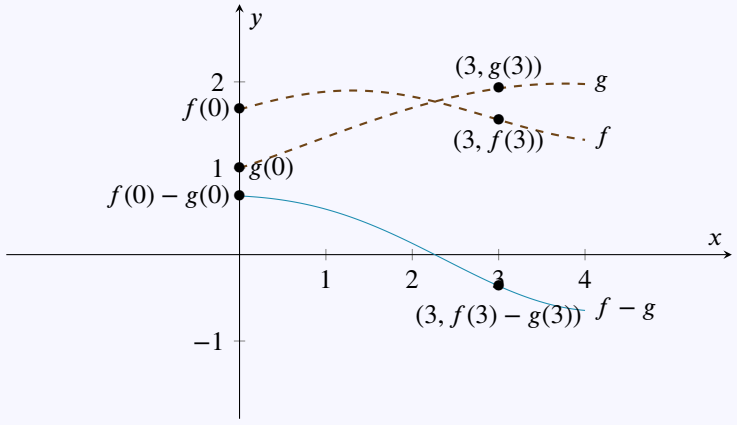


Hier zijn de grafieken van beide functies f en g symmetrisch ten opzichte van de y-as en $f+g$ is ook symmetrisch ten opzichte van de y-as.

Voor willekeurige optelbare functies geldt dat

- Als de grafieken van f en g symmetrisch zijn ten opzichte van de y-as, dan is de grafiek van $f+g$ altijd symmetrisch ten opzichte van de y-as.
- Als de grafiek van $f+g$ symmetrisch is ten opzichte van de y-as, dan is de grafiek van f en die van g soms symmetrisch ten opzichte van de y-as.
- Als de grafieken van f en $f+g$ symmetrisch zijn ten opzichte van de y-as, dan is de grafiek van g altijd symmetrisch te opzichte van de y-as.

Voorbeeld 1.6.4 (Grafiek van een verschil)**.** De volgende figuur toont de grafiek van twee functies f en g en hun verschil. Voor elke waarde van x vinden we de functiewaarden $f(x)$ en $g(x)$ terug op de grafieken van f en g en het verschil van deze functiewaarden $f(x)-g(x)$ op de grafiek van $f-g$.



Merk op dat de grafieken van f en g elkaar snijden boven de punten waar de grafiek van $f-g$ de x-as snijdt: in die punten is inderdaad $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 0$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.7 Product en quotiënt van functies

Definitie 1.7.1 (Product, quotiënt en omgekeerde van reële functies)**.**
Voor reële functies f en g geldt:

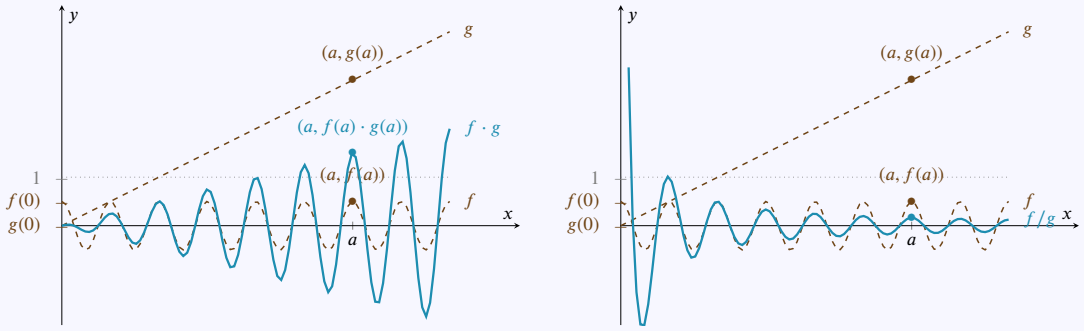
$$\begin{array}{rcccc} f\cdot g & : & x\mapsto & (f\cdot g)(x) & \overset{\text{def}}{=} & f(x)\cdot g(x) \\ \dfrac{f}{g} & : & x\mapsto & \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) & \overset{\text{def}}{=} & \dfrac{f(x)}{g(x)} \\ \dfrac{1}{f} & : & x\mapsto & \dfrac{1}{f}(x) & \overset{\text{def}}{=} & \dfrac{1}{f(x)}. \end{array}$$

Merk op dat $\dfrac{f}{g}$ en $\dfrac{1}{f}$ niet gedefinieerd zijn in de punten waar de noemer nul wordt, en er geldt:

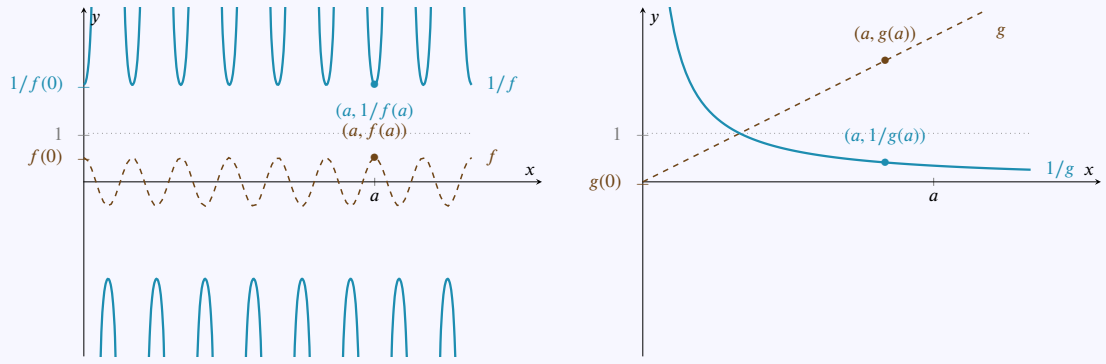
Het **product** $f\cdot g$ beeldt x af op het product $f(x)\cdot g(x)$.
Het **quotiënt** $\dfrac{f}{g}$ beeldt x af op het quotiënt $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.
Het **omgekeerde** $\dfrac{1}{f}$ beeldt x af op het omgekeerde $\dfrac{1}{f(x)}$.

Voorbeeld 1.7.1.

1. De grafiek van twee functies f en g en hun product $f\cdot g$ en quotiënt $\dfrac{f}{g}$:



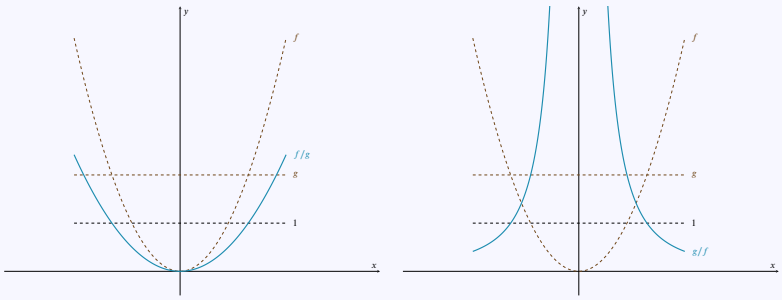
2. De grafiek van twee functies f en g en hun omgekeerden $\dfrac{1}{f}$ en $\dfrac{1}{g}$:



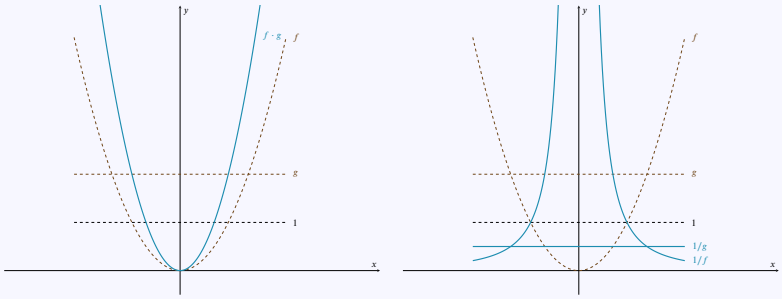
1.7 Product en quotiënt van functies

Voorbeeld 1.7.2. Beschouw de functies $f : x \mapsto x^2$ en $g : x \mapsto 2$.

1. De grafieken f en g en de quotiënten $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ en $\frac{g}{f} : x \mapsto \frac{2}{x^2}$:



2. De grafieken f en g, hun product $f \cdot g : x \mapsto 2x^2$ en hun omgekeerden $\frac{1}{f} : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en $\frac{1}{g} : x \mapsto \frac{1}{2}$:



Opmerking 1.7.1.

(a) Net als bij de functies $f + g$ en $f - g$ is de functie $f \cdot g$ enkel gedefinieerd voor x-waarden waarvoor zowel f als g gedefinieerd is. Het domein is dus gelijk aan de doorsnede van het domein van f en het domein van g.

(b) Het quotiënt $\frac{f}{g}$ is enkel gedefinieerd voor x-waarden waarvoor zowel f als g gedefinieerd zijn en $g(x) \neq 0$. Het domein van het quotiënt is dus gelijk aan de doorsnede van het domein van f en het domein van g zonder de x-waarden waarbij $g(x) = 0$.

(c) De omgekeerde functie bekomt men door de functie te 'kantelen' over de rechte $y = 1$, waarbij alles tussen $y = 0$ en $y = 1$ wordt uitgesmeerd over het gebied tussen $y = 1$ en $y = +\infty$, en alles tussen $y = 1$ en $= +\infty$ wordt samengedrukt in het gebied tussen $y = 0$ en $y = 1$.

(d) De omgekeerde functie is een speciaal geval van het quotiënt: $\frac{1}{f}$ is het quotiënt van de constante functie 1 en de functie f.

(e) Het quotiënt van functies is een speciaal geval van het product: : $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. Dus, elk quotiënt is ook een product, namelijk het product met het omgekeerde.

(f) PAS OP: we gebruiken NIET de notatie f^{-1} voor de omgekeerde functie, want die notatie is voorbehouden voor de *inverse* functie die we verder zullen bespreken. De *omgekeerde* functie en de *inverse* functie zijn twee *verschillende* begrippen!

(g) Op haar domein wordt de functie $f \cdot g$ nul in de nulpunten van f *en* in de nulpunten van g. Inderdaad, $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ en dit product is enkel nul als $f(x) = 0$ of $g(x) = 0$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.7 Product en quotiënt van functies

(h) De nulpunten van de functie $\frac{f}{g}$ zijn iets lastiger. Voor een nulpunt van f waar de functie g niet nul is, is er geen probleem: dat nulpunt van f is ook een nulpunt van $\frac{f}{g}$. Neem bijvoorbeeld $f : x \mapsto x - 1$ en $g : x \mapsto 2x$, dan hebben zowel f als $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x-1}{2x}$ een nulpunt in $x = 1$.
Maar voor $f : x \mapsto x - 1$ en $g : x \mapsto (x-1)^2$ is $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{1}{x-1}$, en deze functie is niet gedefinieerd in $x = 1$, en $x = 1$ is dus zeker geen nulpunt.
Ook de functies $f : x \mapsto x^2 - 1$ en $g : x \mapsto x - 1$ zijn beiden nul in het punt $x = 1$, maar hun quotiënt $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$ heeft waarde 2 voor $x = 1$, en $x = 1$ is dus *geen nulpunt* van $\frac{f}{g}$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.8 Samenstellen van functies

Bewerkingen zoals $a+b$, $a-b$ en $a\cdot b$ met twee reële getallen a en b kan je makkelijk uitbreiden tot bewerkingen met reële functies f en g, en dat levert dan de *functies* $f+g$, $f-g$ en $f\cdot g$ op. Je kan deze operaties voor functies dus beschouwen als veralgemeningen van die voor getallen. Er is echter ook een fundamenteel andere manier om een nieuwe functie te maken van twee bestaande functies, die geen analoog heeft voor reële getallen. Je kan sommige functies namelijk eenvoudig *samenstellen*, dat betekent ze *na elkaar* toe te passen: *eerst* neem je $g(x)$, en dan pas je f toe *op het resultaat* $g(x)$ van g. Dat geeft als eindresultaat $f(g(x))$.

Definitie 1.8.1 (Samenstelling van twee functies)**.**

De **samengestelde functie** van twee reële functies f en g, genoteerd met $f\circ g$ en gelezen als 'f *na* g' (of soms ook 'f van g'), is per definitie de functie die *eerst* g toepast, en dan f, dus

$$f\circ g : x \mapsto (f\circ g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(g(x)).$$

Merk op dat $f\circ g$ enkel gedefinieerd is waar de uitdrukking $f(g(x))$ betekenis heeft. Dat is voor de x waarvoor $g(x)$ bestaat en bovendien ook $f(g(x))$ bestaat.

Voorbeeld 1.8.1.

Beschouw de functies $f : x \mapsto x^2$ en $g : x \mapsto x+2$. Dan is

1. $f(g(3)) = 25$
2. $g(f(3)) = 11$
3. $f(f(3)) = 81$
4. $g(g(3)) = 7$
5. $g(g(g(3))) = 9$
6. $f(g(3)-5) = 0$
7. $f(g(3))-5 = 20$
8. $f(g(3)+g(2)) = 81$
9. $f(g(3+2)) = 49$

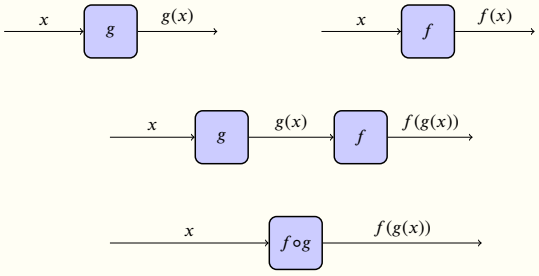
Oefening 1.8.1.

Beschouw de functies $f : x \mapsto x^2$ en $g : x \mapsto x+2$. Dan is

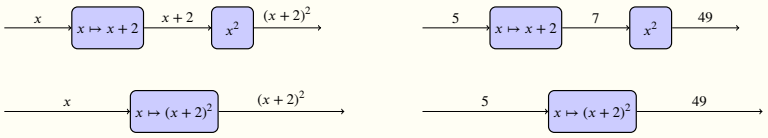
1. $f\circ g : x \mapsto$ | x^2+2 | $(x+2)^2$ | x^2+2^2 | $2x^2$ |
2. $g\circ f : x \mapsto$ | x^2+2 | $(x+2)^2$ | x^2+2^2 | $2x^2$ |
3. $g\circ g : x \mapsto$ | x^2+2 | $2(x+2)$ | $x+4$ | 4 |
4. $f\circ f : x \mapsto$ | x^2 | x^4 | $4x$ | $2x^2$ |

Opmerking 1.8.1.

- In de machine-voorstelling van functies is *samenstellen* de machines *achter elkaar plaatsen*:

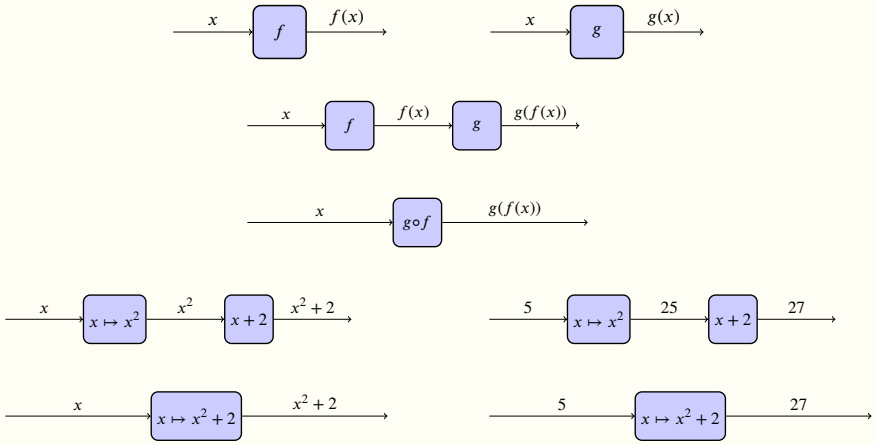


1.8 Samenstellen van functies



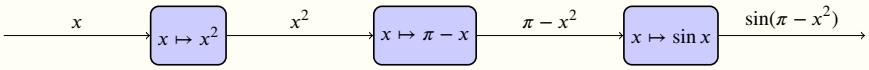
Let op de volgorde van de functies in de samenstelling. Om $(f \circ g)(x)$ (f *na* g van x) te vinden, moeten we *eerst* g toepassen op x en *daarna* f toepassen op het resultaat $g(x)$. Maar in de machinevoorstelling betekent dit dat de functie g links staat en f rechts: g is immers de functie die we eerst gebruiken en daarna de functie f.

- We kunnen ook $g \circ f$ bekijken, dus de functie $g \circ f : x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$.



Uit het voorbeeld blijkt al dat $f \circ g$ en $g \circ f$ verschillende functies zijn. De uitdrukking 'de samenstelling van f en g' kan dus dubbelzinnig zijn: wordt $f \circ g$ bedoeld, of $g \circ f$?

- De samengestelde functie $f \circ g$ is enkel gedefinieerd in x als x tot het domein van g behoort en $g(x)$ tot het domein van f. In de andere volgorde is de samengestelde functie $g \circ f$ enkel gedefinieerd in x als x tot het domein van f behoort en $f(x)$ tot het domein van g.
- Samengestelde functies komen erg veel voor, want heel veel functies kunnen worden gelezen als een samenstelling van eenvoudigere functies. Zo is de functie $x \mapsto \sin(\pi - x^2)$ de samengestelde functie van eerst $x \mapsto x^2$ gevolgd door $x \mapsto \pi - x$ en ten slotte $x \mapsto \sin(x)$.



Voorbeeld 1.8.2. Bepaal de samenstellingen van volgende reële functies

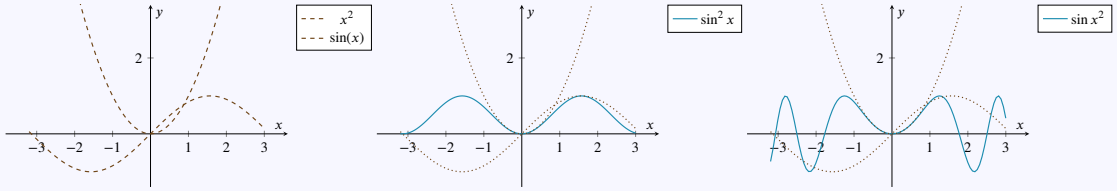
f	g	$f \circ g$	$g \circ f$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x - 3$	$x \mapsto (x-3)^2$	$x \mapsto x^2 - 3$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x^4$	$x \mapsto x^4$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2$	$x \mapsto 4$	$x \mapsto 2$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto -x$	$x \mapsto x^2$	$x \mapsto -x^2$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto 2x$	$x \mapsto \sin(2x)$	$x \mapsto 2\sin(x)$

In het algemeen kan het verband tussen f en g enerzijds, en $f \circ g$ anderzijds erg complex zijn. Enkel in eenvoudige gevallen kan je het verband gemakkelijk zien.

CC BY-NC-SA 4.0

1.8 Samenstellen van functies

Voorbeeld 1.8.3 (Voorbeeld grafiek)**.** Er is niet onmiddellijk een duidelijk verband tussen de grafieken van de functies $f : x \mapsto x^2$ en $g : x \mapsto \sin x$ en die van hun samengestelde functies $f \circ g$ en $g \circ f$, zoals onderstaande grafieken aantonen. Let op: voor de goniometrische functies noteren we vaak $(\sin x)^2$ als $\sin^2 x$:



Oefening 1.8.2. Zij f en g twee functies die samenstelbaar zijn. Zijn volgende beweringen waar of fout?

1. Elk nulpunt van f is ook een nulpunt van $g \circ f$ | Waar | Niet waar |.

2. Elk nulpunt van $g \circ f$ is ook een nulpunt van f | Waar | Niet waar |

3. De grafiek van $g \circ f$ ligt altijd boven de grafiek van f | Waar | Niet waar |

1.8.1 Domein van samengestelde functies

In de vorige voorbeelden en oefeningen hadden alle functies $\mathbb{R}$ als domein en als codomein, en was samenstellen nooit een probleem. Als het domein of codomein (of beide) een strikte deelverzameling van de reële getallen is, wordt samenstellen wat subtieler, en in sommige gevallen zelfs onmogelijk .

Stel dat twee functies $g : A \to B$ en $f : C \to D$ gegeven zijn, met A, B, C, D deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Onder welke voorwaarden kunnen we dan f en g samenstellen, en wat is het domein en codomein van $f \circ g$?

Om het beeld $f(g(x))$ van een getal x onder $f \circ g$ te bepalen, moeten we eerst $g(x)$ bepalen, en dus moet zeker $x \in A$. Vervolgens moet f worden toegepast op $g(x)$, en dat kan alleen als $g(x) \in C$. Het domein van $f \circ g$ is dus de deelverzameling van A die wordt afgebeeld in C:

$$f \circ g : \{x \in A \mid g(x) \in C\} \to D : x \mapsto f(g(x))$$

Als $B \subseteq C$ (en dus in het bijzonder als $B = C$) is de voorwaarde $g(x) \in C$ automatisch voldaan, en geldt de eenvoudigere formule

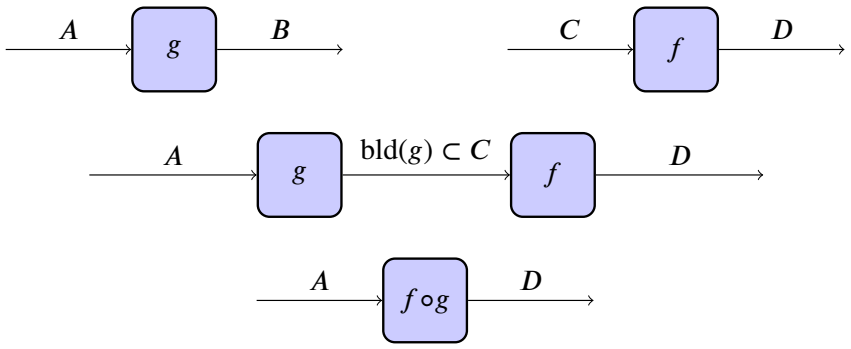
$$f \circ g : A \to D : x \mapsto f(g(x))$$

In het algemeen is het domein van $f \circ g$ (als deze samenstelling bestaat) dus een *deelverzameling* van A, het codomein is *gelijk* aan D en het beeld is een *deelverzameling* van D.

In de machinevoorstelling ziet de samenstelling er **in het geval** $\text{bld}(g) \subset C$ als volgt uit:

CC BY-NC-SA 4.0

1.8 Samenstellen van functies



Een voorbeeld van twee functies waarvoor de samenstelling niet bestaat omdat ze nergens gedefinieerd is:

Voorbeeld 1.8.4. Beschouw

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$$

en

$$g : \mathbb{R}^+ \to]-\infty, -1] : x \mapsto -x - 1.$$

Je kan zelf nagaan dat in dit voorbeeld de codomeinen van f en g ook de beelden van f en g zijn. De functie $f \circ g$ is nergens gedefinieerd: voor elke $x \in \mathbb{R}^+$ geldt dat $g(x) \in]-\infty, -1]$, zodat $g(x)$ niet tot het domein van de functie f behoort. Dus kunnen we op geen enkele $g(x)$ uit het beeld van g de functie f toepassen. Inderdaad: voor elke x in het domein van g is $g(x)$ een strikt negatief getal, en hiervan kunnen we onmogelijk de vierkantswortel nemen.

Een voorbeeld van twee functies waarvoor de samenstelling wel bestaat maar niet overal gedefinieerd is:

Voorbeeld 1.8.5. Beschouw

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$$

en

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x.$$

Dan is $f \circ g : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{-x}$. De samenstelling is niet voor alle x in het domein van de functie g gedefinieerd: voor strikt positieve x is immers $-x$ strikt kleiner dan nul en van dit getal kunnen we geen vierkantswortel nemen. Voor $x \in \mathbb{R}^-$, een deelverzameling van het domein van g, is de samenstelling wel goed gedefinieerd. Ga zelf na dat de beelden van f en g telkens hun codomein zijn, en dat het beeld van de samenstelling $f \circ g$ hier gelijk is aan het beeld van f, namelijk $\mathbb{R}^+$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.8.A Basisoefeningen samenstellen van functies

Oefening 1.8.3. Bepaal de samenstellingen van volgende reële functies.

1. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto 7$, dan is $f \circ g : x \mapsto \ldots\ldots$
2. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto 7$, dan is $g \circ f : x \mapsto \ldots\ldots$
3. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $f \circ g : x \mapsto \ldots\ldots$
4. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $g \circ f : x \mapsto \ldots\ldots$
5. Als $f : x \mapsto \cos(x)$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $f \circ g : x \mapsto \ldots\ldots$
6. Als $f : x \mapsto \cos(x)$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $g \circ f : x \mapsto \ldots\ldots$

Oefening 1.8.4.

1. Als $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto x^2$ en $h : x \mapsto 2x + 2$, dan is $h \circ (f \circ g) : x \mapsto \ldots\ldots$
2. Als $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto x^2$ en $h : x \mapsto 2x + 2$, dan is $(h \circ f) \circ g : x \mapsto \ldots\ldots$
3. Als $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto x^2$ en $h : x \mapsto 2x + 2$, dan is $(f \circ g) \circ h : x \mapsto \ldots\ldots$
4. Als $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto x^2$ en $h : x \mapsto 2x + 2$, dan is $f \circ (g \circ h) : x \mapsto \ldots\ldots$

Oefening 1.8.5.

1. Als $f : x \mapsto \sin(x + 2)$ en $g : x \mapsto x + 1$, dan is $f \circ g : x \mapsto \ldots\ldots$
2. Als $g : x \mapsto \sin(x + 2)$ en $f : x \mapsto x + 1$, dan is $f \circ g : x \mapsto \ldots\ldots$
3. Als $f : x \mapsto x + e^x$ en $g : x \mapsto 2x + 1$, dan is $f \circ g : x \mapsto \ldots\ldots$
4. Als $f : x \mapsto x + e^x$ en $g : x \mapsto 2x + 1$, dan is $g \circ f : x \mapsto \ldots\ldots$
5. Als $f : x \mapsto x^2 + x$ en $g : x \mapsto e^x + \cos(x^2)$, dan is $f \circ g : x \mapsto \ldots\ldots$
6. Als $f : x \mapsto x^2 + x$ en $g : x \mapsto e^x + \cos(x^2)$, dan is $g \circ f : x \mapsto \ldots\ldots$

Oefening 1.8.6 (Samenstellingen van functies herkennen)**.**
Schrijf volgende uitdrukkingen als samenstellingen van twee functies:

1. $\sin x^2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$
2. $\sin^2 x = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$
3. $(x+2)^2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$
4. $x^2 + 2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$
5. $x^4 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$
6. $2x^2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$
7. $4x^2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$

CC BY-NC-SA 4.0

1.8.A Basisoefeningen samenstellen van functies

Merk op: volgende functies zijn niet als echte samenstellingen te schrijven (want het zijn telkens sommen of producten):

(a) $\sin x \cos x$
(b) $x^2 \sin x$
(c) $\sin x + \cos x$
(d) $\cos^2 x + \sin^2 x$

Oefening 1.8.7. Bepaal, indien mogelijk, de samengestelde functies $g \circ f$ en $f \circ g$, samen met hun domein. Als codomein nemen we telkens $\mathbb{R}$.

1. Voor de functies $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x-1}$ en $g : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$
is $f \circ g$: ... ...
en $g \circ f$: ... .

2. Voor de functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x + 3$
is $f \circ g$: ... ...
en $g \circ f$: ... .

3. Voor de functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x$ en $g : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{-x}$
is $f \circ g$: ... ...
en $g \circ f$: ... .

Oefening 1.8.8. Gegeven zijn de functies $f : [0, 1] : x \mapsto x^2$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 5x$.

1. $\operatorname{dom} f \circ g =$ ... .

2. $\operatorname{dom} g \circ f =$ ... .

Oefening 1.8.9. Gegeven zijn de volgende twee functievoorschriften voor f en g:

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto \sqrt{-x}$$

1. $\operatorname{dom} f =$ $\boxed{\mathbb{R}}$ $\boxed{\mathbb{R}^+}$ $\boxed{\mathbb{R}^-}$ $\boxed{\mathbb{R}_0}$ en $\operatorname{dom} g =$ $\boxed{\mathbb{R}}$ $\boxed{\mathbb{R}^+}$ $\boxed{\mathbb{R}^-}$ $\boxed{\mathbb{R}_0}$.
$\operatorname{bld} f =$ $\boxed{\mathbb{R}}$ $\boxed{\mathbb{R}^+}$ $\boxed{\mathbb{R}^-}$ $\boxed{\mathbb{R}_0}$ en $\operatorname{bld} g =$ $\boxed{\mathbb{R}}$ $\boxed{\mathbb{R}^+}$ $\boxed{\mathbb{R}^-}$ $\boxed{\mathbb{R}_0}$.

2. Waar of niet waar: de functie $f \circ g$ bestaat: $\boxed{\text{Juist}}$ $\boxed{\text{Fout}}$. Zo ja, bepaal ook het domein, beeld en functievoorschrift van deze functie.

3. Waar of niet waar: de functie $g \circ f$ bestaat: $\boxed{\text{Juist}}$ $\boxed{\text{Fout}}$. Zo ja, bepaal ook het domein, beeld en functievoorschrift van deze functie.

Oefening 1.8.10. Gegeven zijn de volgende twee functievoorschriften voor f en g:

$$f : x \mapsto \sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}$$
$$g : x \mapsto \sqrt{x}$$

1. $\operatorname{dom} f =$ $\boxed{\mathbb{R}}$ $\boxed{\mathbb{R}^+}$ $\boxed{\mathbb{R}^-}$ $\boxed{\mathbb{R}_0}$ $\boxed{[0,1]}$ $\boxed{]0,1]}$ $\boxed{[2,+\infty[}$ $\boxed{]2,+\infty[}$.

2. $\operatorname{dom} g =$ $\boxed{\mathbb{R}}$ $\boxed{\mathbb{R}^+}$ $\boxed{\mathbb{R}^-}$ $\boxed{\mathbb{R}_0}$ $\boxed{[0,1]}$ $\boxed{]0,1]}$ $\boxed{[2,+\infty[}$ $\boxed{]2,+\infty[}$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.8.A Basisoefeningen samenstellen van functies

3. Waar of niet waar: de functie $f \circ g$ bestaat: | Juist | Fout |. Zo ja, bepaal ook het domein en functievoorschrift van deze functie.

4. Waar of niet waar: de functie $g \circ f$ bestaat: | Juist | Fout |. Zo ja, bepaal ook het domein en functievoorschrift van deze functie.

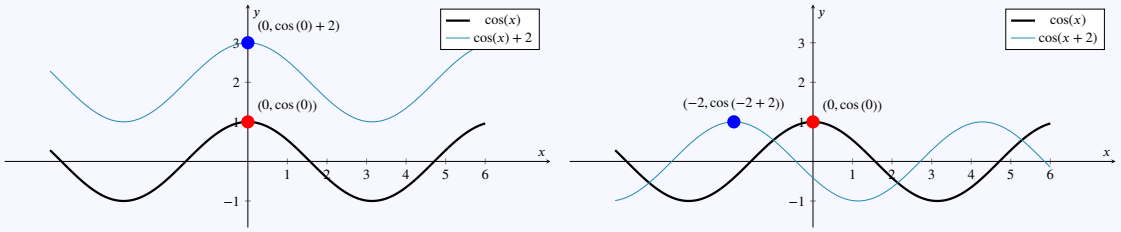
CC BY-NC-SA 4.0

1.9 Transformaties van functies

In het algemeen kan het verband tussen twee functies f en g enerzijds, en de samengestelde functie $f \circ g$ anderzijds erg complex zijn. Maar als één van de functies zelf eenvoudig is, kan het verband wel intuïtief duidelijk zijn, en kunnen we het zelfs aflezen op de grafiek. We spreken in dit speciale geval soms van *transformaties* van functies, of de transformatie van één functie door een andere in plaats van het algemenere *samenstelling* van twee functies. We noteren hier de 'eenvoudige' functie met de letter T (voor Transformatie). Als voorbeelden van zulke 'eenvoudige' functies bekijken we in eerste instantie eerstegraadsfuncties zoals $x \mapsto x+2$, $x \mapsto 2x$, $x \mapsto 2x+2$, ... maar later ook bijvoorbeeld de absolute waarde functie.

Voorbeeld 1.9.1. Verschuivingen: bestudeer voor $f : x \mapsto \cos(x)$ en $T_1 : x \mapsto x+2$ de grafieken van

$$T_1 \circ f : x \mapsto \cos(x)+2 \text{ en } f \circ T_1 : x \mapsto \cos(x+2).$$



- De grafiek van $x \mapsto \cos(x)+2$ is 2 naar *boven* verschoven t.o.v. de grafiek van f.

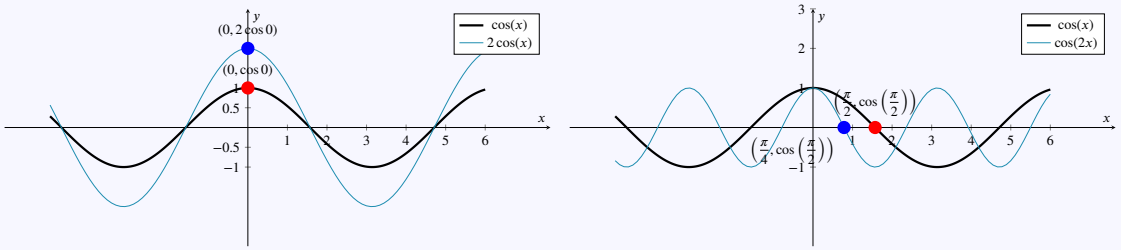
  Dit is eenvoudig te begrijpen want de x die door f wordt afgebeeld op $\cos(x)$, wordt door $T_1 \circ f$ afgebeeld op $\cos(x)+2$, dus 2 eenheden hoger.

- De grafiek van $x \mapsto \cos(x+2)$ is 2 naar *links* verschoven t.o.v. de grafiek van f.

  Dit is wat subtieler: als x door f wordt afgebeeld op $\cos(x)$, dan wordt $x-2$ door $T_1 \circ f$ afgebeeld op dezelfde $\cos((x-2)+2) = \cos(x)$. Dus, je moet 2 eenheden vroeger vertrekken om op dezelfde functiewaarde terecht te komen.

Voorbeeld 1.9.2. Expansies: bestudeer voor $f : x \mapsto \cos(x)$ en $T_2 : x \mapsto 2x$ de grafieken van

$$T_2 \circ f : x \mapsto 2\cos(x) \text{ en } f \circ T_2 : x \mapsto \cos(2x).$$



- De grafiek van $x \mapsto 2\cos(x)$ is een factor 2 'uitgerokken' in de y-richting t.o.v. de grafiek van $\cos x$.

  Dit is eenvoudig te begrijpen want de functiewaarden worden door T_2 met 2 vermenigvuldigd. De x die door f wordt afgebeeld op $\cos(x)$, wordt door $T_2 \circ f$ afgebeeld op $2\cos(x)$, dus 2 keer groter.

1.9 Transformaties van functies

- De grafiek van $x \mapsto \cos(2x)$ is een factor 2 'ingedrukt' in de x-richting t.o.v. de grafiek van $\cos x$.

  Dit is wat subtieler: als x door f wordt afgebeeld op $\cos(x)$, dan wordt $x/2$ door $f \circ T_2$ afgebeeld op dezelfde $\cos(2(x/2)) = \cos(x)$. Dus, je moet met $x/2$ vertrekken om op dezelfde functiewaarde terecht te komen.

Voor sommige eenvoudige functies T is er dus een duidelijk verband tussen de grafieken van f en de samengestelde functies $T \circ f$ en $f \circ T$. We stellen vast dat

Eigenschap 1.9.1 (Transformaties van een functie)**.**

De (transformatie-)functies T hebben volgend effect op (de grafiek van) een willekeurige functie f:

- $f \circ T : x \mapsto f(T(x))$: pas T toe langs de x-as
- $T \circ f : x \mapsto T(f(x))$: pas T toe langs de y-as

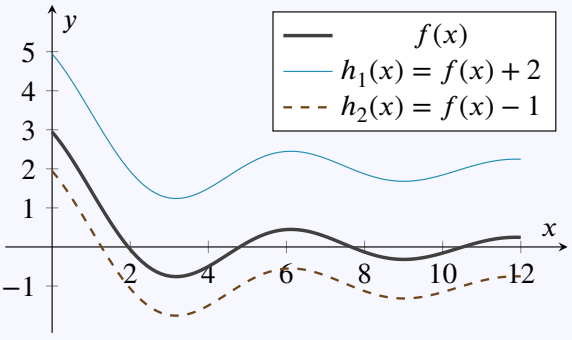
In het bijzonder hebben de transformaties $T_+ : x \mapsto x + a$ ('plus a') en $T_\times : x \mapsto ax$ ('maal a') volgende effecten:

$T \circ f : x \mapsto f(x) + a$	grafiek a naar *boven* verschuiven
$f \circ T : x \mapsto f(x + a)$	grafiek a naar *links* verschuiven
$T \circ f : x \mapsto a \cdot f(x)$	grafiek met factor a *uitrekken* in de y-richting
$f \circ T : x \mapsto f(a \cdot x)$	grafiek met factor a *indrukken* in de x-richting

Opmerking 1.9.1. '-2 naar boven schuiven' betekent natuurlijk hetzelfde als '2 naar beneden schuiven' en 'met factor $\frac{1}{2}$ uitrekken' betekent hetzelfde als 'met factor 2 indrukken'.

Voorbeeld 1.9.3 (Verschuiving langs y-as)**.**

Een functie f kan je langs de y-as verschuiven door (langs *links*) samen te stellen met functies zoals $T_1 : x \mapsto x + 2$ en $T_2 : x \mapsto x - 1$. Dit resulteert in onderstaande functies $h_1 : x \mapsto (T_1 \circ f)(x) = f(x) + 2$ en $h_2 : x \mapsto (T_2 \circ f)(x) = f(x) - 1$:



Oefening 1.9.1. Welke transformatie verschuift de grafiek van f met π eenheden naar beneden ?

$f \circ T$ met $T : x \mapsto x + \pi$, dus $x \mapsto f(x + \pi)$

$T \circ f$ met $T : x \mapsto x + \pi$, dus $x \mapsto f(x) + \pi$

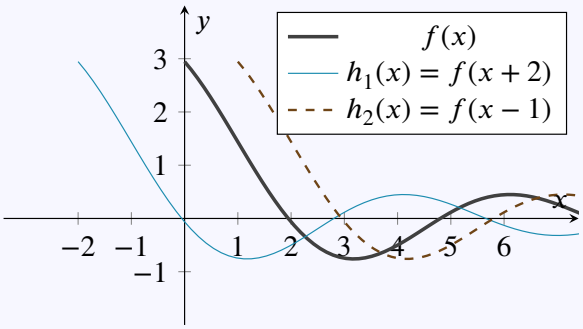
CC BY-NC-SA 4.0

1.9 Transformaties van functies

$f \circ T$ met $T : x \mapsto x - \pi$, dus $x \mapsto f(x - \pi)$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto x - \pi$, dus $x \mapsto f(x) - \pi$

Voorbeeld 1.9.4 (Verschuiving langs x-as)**.**

Een functie f kan je langs de x-as verschuiven door (langs *rechts*) samen te stellen met functies zoals $T_1 : x \mapsto x + 2$ en $T_2 : x \mapsto x - 1$. Dit resulteert in volgende functies $h_1 : x \mapsto (f \circ T_1)(x) = f(x + 2)$ en $h_2 : x \mapsto (f \circ T_2)(x) = f(x - 1)$:



Het domein van $f \circ T_1$ is niet hetzelfde als het domein van f: als $f : [0, 12] \to \mathbb{R}$ dan is $h_1 = f \circ T_1 : [-2, 10] \to \mathbb{R}$, want bijvoorbeeld $h_1(11) = f(13)$ bestaat dan niet.

Oefening 1.9.2.

Welke transformatie verschuift de grafiek van een functie f een halve eenheid naar links ?

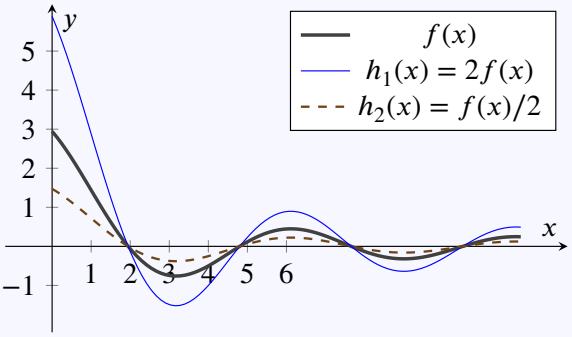
$f \circ T$ met $T : x \mapsto x - \frac{1}{2}$, dus $x \mapsto f(x - \frac{1}{2})$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto x - \frac{1}{2}$, dus $x \mapsto f(x) - \frac{1}{2}$
$f \circ T$ met $T : x \mapsto x + \frac{1}{2}$, dus $x \mapsto f(x + \frac{1}{2})$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto x + \frac{1}{2}$, dus $x \mapsto f(x) + \frac{1}{2}$

Voorbeeld 1.9.5 (Schalen langs y-as)**.**

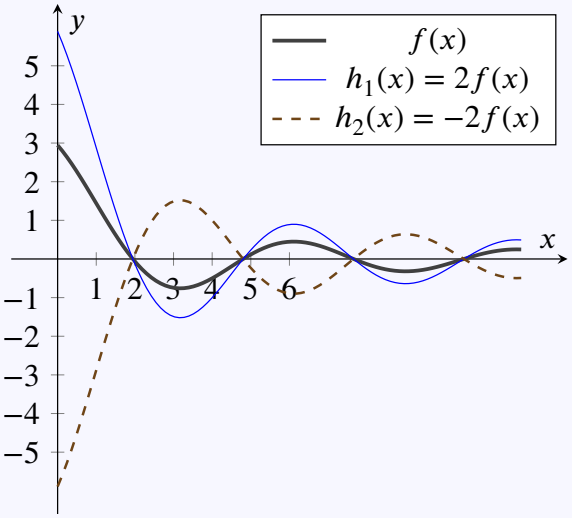
Een functie f kan je langs de y-as herschalen door (langs *links*) samen te stellen met functies zoals $T_1 : x \mapsto 2x$ en $T_2 : x \mapsto x/2$. Dit resulteert in volgende functies $h_1 : x \mapsto (T_1 \circ f)(x) = 2f(x)$ en $h_2 : x \mapsto (T_2 \circ f)(x) = f(x)/2$:

CC BY-NC-SA 4.0

1.9 Transformaties van functies



Merk op dat schalen met een negatieve factor zorgt voor een spiegeling rond de x-as:



Oefening 1.9.3.

Hoe kan je de grafiek van een functie f met een factor $2/3$ samendrukken langs de y-as?

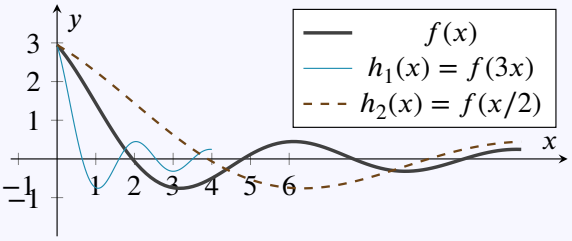
$f \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{3}{2}x$, dus $x \mapsto f(\frac{3}{2}x)$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto \frac{3}{2}x$, dus $x \mapsto \frac{3}{2}f(x)$
$f \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{2}{3}x$, dus $x \mapsto f(\frac{2}{3}x)$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto \frac{2}{3}x$, dus $x \mapsto \frac{2}{3}f(x)$

Voorbeeld 1.9.6 (Schalen langs de x-as)**.**

Een functie f kan je langs de x-as herschalen door (langs *rechts*) samen te stellen met de functies zoals $T_1 : x \mapsto 3x$ en $T_2 : x \mapsto x/2$. Dit resulteert in volgende functies $h_1 : x \mapsto (f \circ T_1)(x) = f(3x)$ en $h_2 : x \mapsto (f \circ T_2)(x) = f(x/2)$:

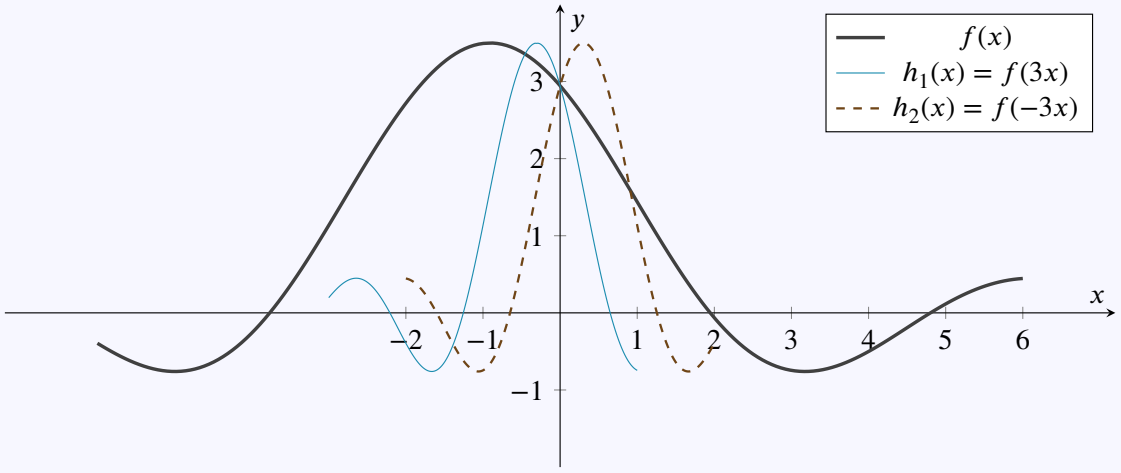
CC BY-NC-SA 4.0

1.9 Transformaties van functies



Het domein van $f \circ T_1$ is niet hetzelfde als het domein van f: als $f : [0,12] \to \mathbb{R}$ dan is $h_1 = f \circ T_1 : [0,4] \to \mathbb{R}$, want bijvoorbeeld $h_1(5) = f(15)$ bestaat dan niet.

Merk op dat schalen met een negatieve factor zorgt voor een spiegeling rond de y-as:



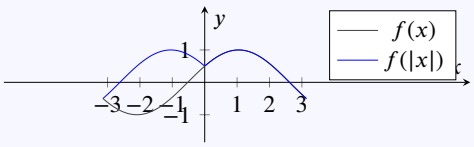
Oefening 1.9.4.

Hoe kan je de grafiek van een functie f uitrekken langs de x-as met een factor 2 ?

$f \circ T$ met $T : x \mapsto 2x$, dus $x \mapsto f(2x)$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto 2x$, dus $x \mapsto 2f(x)$
$f \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$, dus $x \mapsto f(x/2)$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$, dus $x \mapsto f(x)/2$

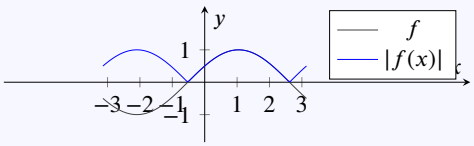
Voorbeeld 1.9.7 (Absolute waarde)**.**

Je kan een functie f ook samenstellen met de transformatie $T : x \mapsto |x|$. Dit resulteert in de functies $x \mapsto f(|x|)$ en $|f(x)|$. Onderstaande figuur toont telkens de grafieken:



CC BY-NC-SA 4.0

1.9 Transformaties van functies



- De grafiek van $x \mapsto f(|x|)$ is gelijk aan de grafiek van $f(x)$ voor positieve x, en je spiegelt het deel voor positieve x over de y-as. Het resultaat is dus symmetrisch ten opzichte van de y-as, en dat is eenvoudig te begrijpen omdat negatieve x-waarden worden omgezet naar hun absolute waarde, voordat ze ingevoerd worden in f.

  In symbolen: $f(|-x|) = f(x) = f(|x|)$ voor $x \geq 0$.
  De eventuele waarden van f voor negatieve x spelen dus geen enkele rol meer in de functie $f(|x|)$.

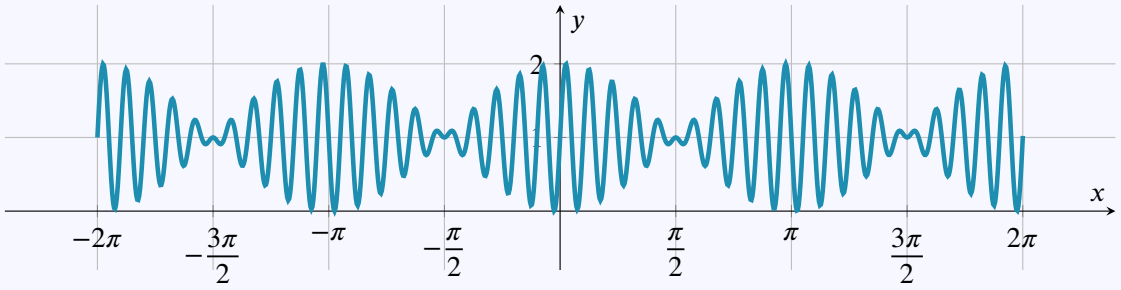
- De grafiek van $x \mapsto |f(x)|$ komt overeen met de grafiek van f waarbij alle negatieve y-waarden, vervangen worden door hun tegengestelde.
  Dus, je spiegelt de negatieve onderste helft naar de positieve bovenste helft .
  De grafiek van $|f|$ heeft hierdoor meestal hoekpunten op de x-as. Dat zal later nog problemen opleveren bij de studie van afgeleiden

CC BY-NC-SA 4.0

1.10 Grafieken van functies interpreteren

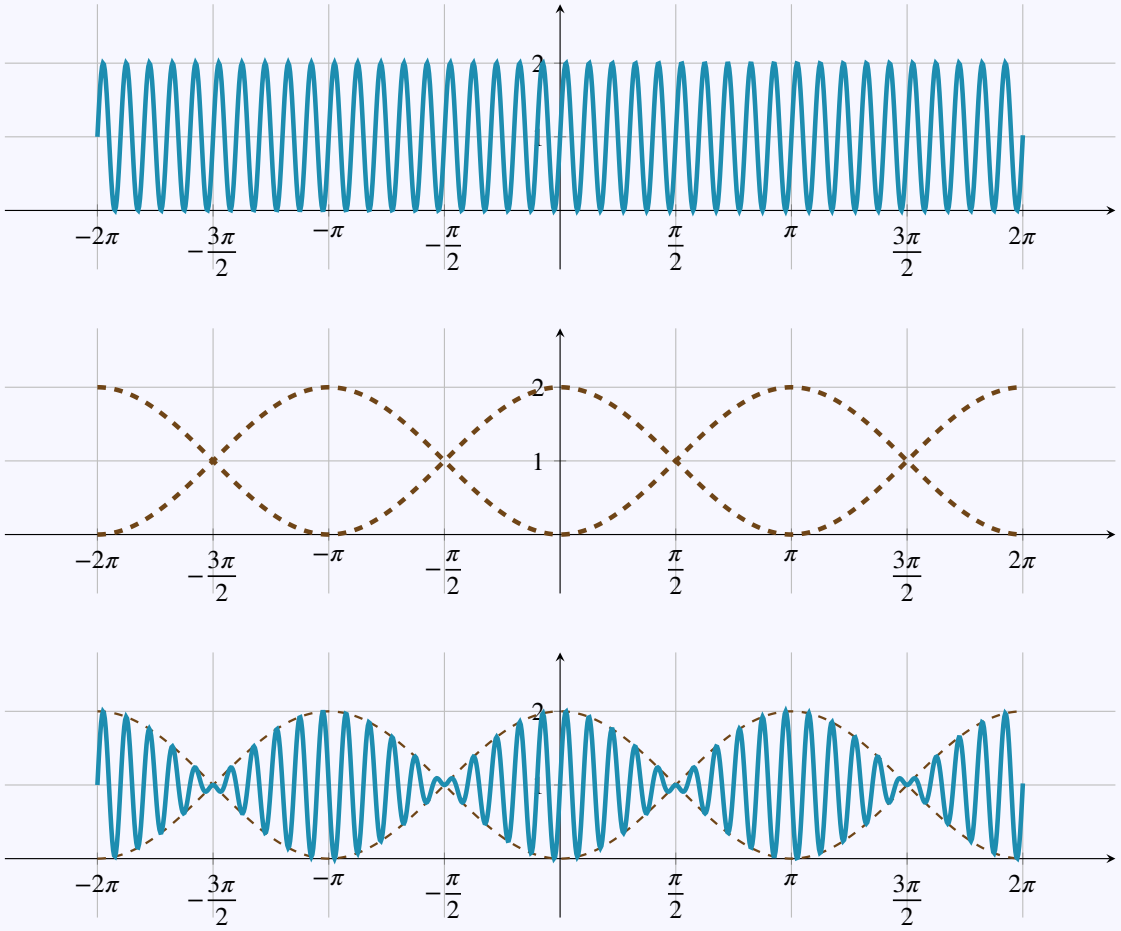
Het is dikwijls belangrijk om het verband te zien tussen functie*voorschriften* en functie*grafieken*.

Voorbeeld 1.10.1. Geef een functievoorschrift dat hoort bij volgende grafiek:



Uitwerking:

Je kan opmerken dat de grafiek een combinatie lijkt van twee trillingen. Er is een 'snelle' trilling, waarvan de hoogte echter niet constant is, maar die zelf varieert als een golffunctie.



De snelle trilling heeft geen uitwijking voor $x = 0$, en bereikt 20 keer terug die toestand tussen $x = 0$ en $x = \pi$. Dergelijke trilling is een cosinus die met een factor 20 is samengedrukt, en wordt beschreven door $y = \cos 20x$ of in dit geval door $y = 1 + \cos 20x$ omdat de grafiek één eenheid naar boven is geschoven.

CC BY-NC-SA 4.0

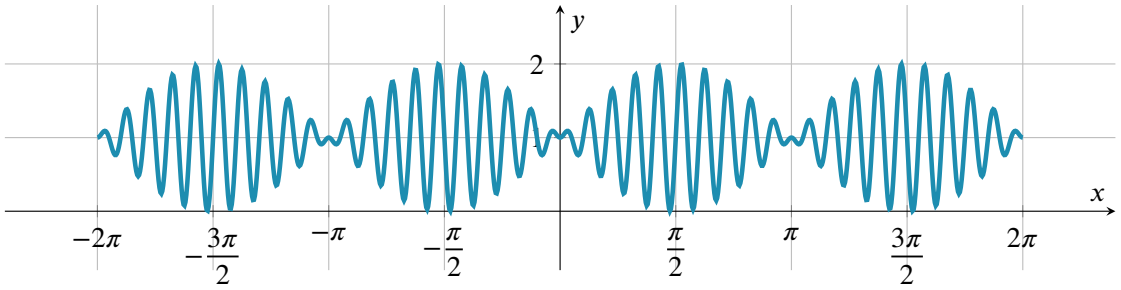
1.10 Grafieken van functies interpreteren

Om de amplitude te variëren, volstaat het de $\cos 20x$ te vermenigvuldigen met een gepaste factor. Die factor moet één zijn voor $x \in \{-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi\}$, en nul voor $x \in \{-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$. De factor wordt dus beschreven door een cosinusfunctie $\cos x$.

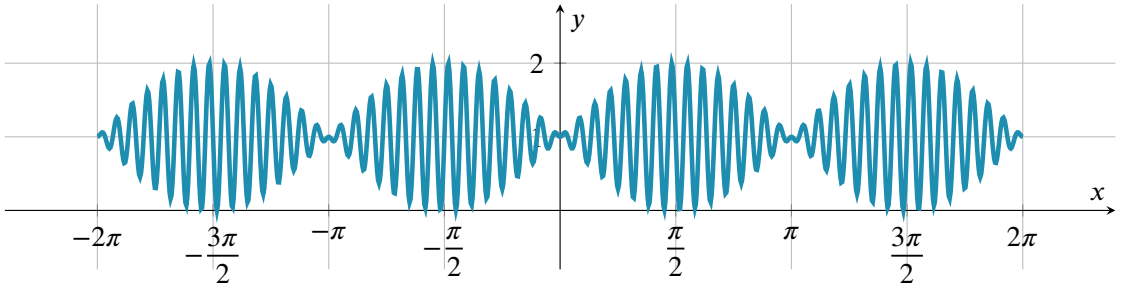
De grafiek hoort dus bij de functie $y = 1 + \cos x \sin 20x$.

Oefening 1.10.1. Geef het functievoorschrift dat hoort bij volgende grafieken:

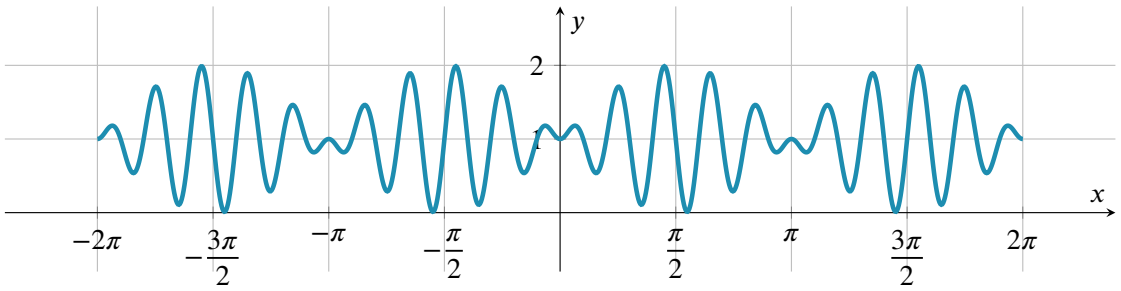
1. | $1 + \sin x \cos 20x$ | $1 + \sin x \sin 20x$ | $1 + \cos x \cos 20x$ |



2. | $1 + \sin x \cos 20x$ | $1 + \sin x \sin 20x$ | $1 + \cos x \cos 20x$ |



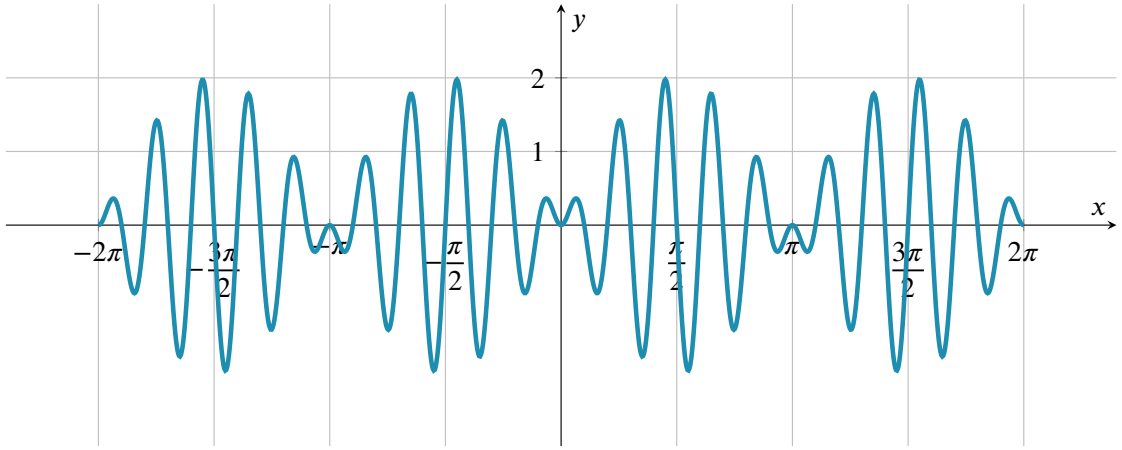
3. | $1 + \sin x \cos 20x$ | $1 + \sin x \sin 20x$ | $1 + \cos x \cos 20x$ |



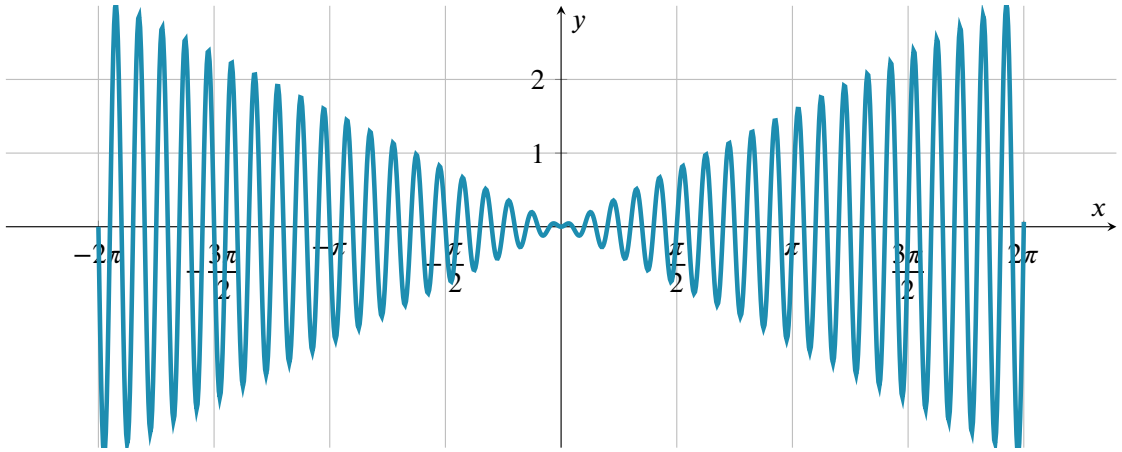
4. | $1 + \sin x \cos 20x$ | $1 + \sin x \sin 20x$ | $1 + \cos x \cos 20x$ |

CC BY-NC-SA 4.0

1.10 Grafieken van functies interpreteren



5. | $1+\sin x \cos 20x$ | $1+\sin x \sin 20x$ | $1+\cos x \cos 20x$ |



CC BY-NC-SA 4.0

1.10.A Oefeningen transformaties van functies

Oefening 1.10.2.

Gegeven zijn de drie reële functies:
$$\begin{array}{lll} f & : x & \mapsto x^2 \\ g & : x & \mapsto x+2 \\ h & : x & \mapsto 2x \end{array}$$

1. Schets op papier de grafiek van de functie f.

2. Schets op papier de grafiek van de functie $g \circ f$.

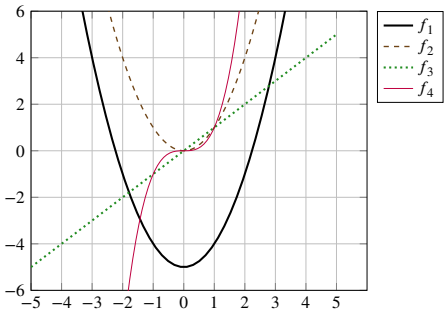
3. Schets op papier de grafiek van de functie $h \circ f$.

4. Schets op papier de grafiek van de functie $f \circ g$.

5. Schets op papier de grafiek van de functie $f \circ h$.

Oefening 1.10.3.

1. Onderstaande figuur toont de grafieken van f_1, f_2, f_3 en f_4:

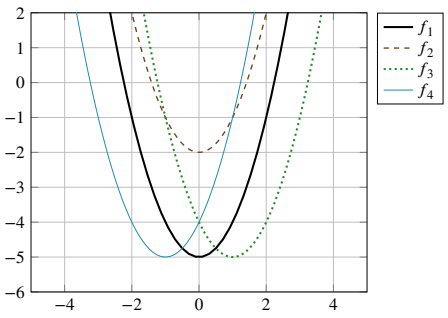


Welke van bovenstaande functies is gelijk aan $f_1 \circ T_1$ met $T_1 : x \mapsto x$?

Meerkeuze:

(a) f_1
(c) f_3
(b) f_2
(d) f_4

2. Onderstaande figuur toont de grafieken van f_1, f_2, f_3 en f_4:



Welke van bovenstaande functies is gelijk aan $f_1 \circ T_1 \circ T_2$ met $T_1 : x \mapsto x$ en $T_2 : x \mapsto x-1$?

CC BY-NC-SA 4.0

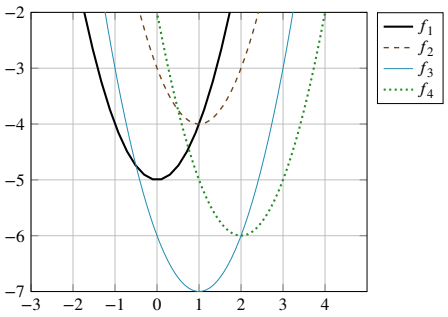
1.10.A Oefeningen transformaties van functies

Meerkeuze:

(a) f_1 (c) f_3

(b) f_2 (d) f_4

3. Onderstaande figuur toont de grafieken van f_1, f_2, f_3 en f_4:



Welke van bovenstaande functies is gelijk aan $T_3 \circ f_1 \circ T_1 \circ T_2$ met $T_1 : x \mapsto x-1$, $T_2 : x \mapsto x-1$ en $T_3 : x \mapsto x-1$?

Meerkeuze:

(a) f_1 (c) f_3

(b) f_2 (d) f_4

Oefening 1.10.4. Teken (zonder gebruik van een grafisch rekenmachine) de grafiek van de functies met volgende voorschriften

1. $f(x) = |\sin x|$

2. $f(x) = \sin |x|$

Oefening 1.10.5. Stel f een functie waarvan de grafiek gegeven is. Is het mogelijk om in het algemeen te beschrijven hoe de grafiek van de volgende functies eruit zien? Zo ja, leg uit.

1. $g(x) = |f(x)|$ | Ja | Nee |

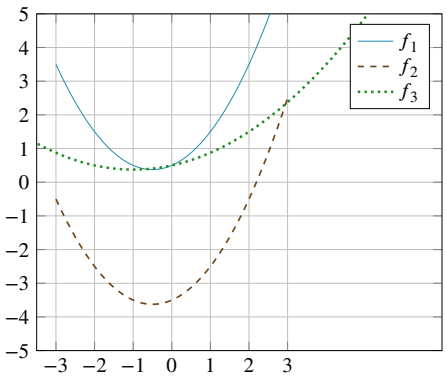
2. $g(x) = f(|x|)$ | Ja | Nee |

Oefening 1.10.6.

1. Bekijk onderstaande grafiek:

CC BY-NC-SA 4.0

1.10.A Oefeningen transformaties van functies



Selecteer alle juiste gelijkheden:

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) $f_1 = T \circ f_2$ met $T : x \mapsto x + 4$

(b) $f_1 = f_3 \circ T$ met $T : x \mapsto 2x$

(c) $f_1 = f_2 \circ T$ met $T : x \mapsto x - 4$

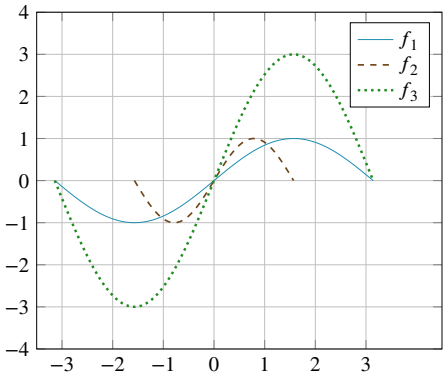
(d) $f_2 = f_1 \circ T$ met $T : x \mapsto x - 4$

(e) $f_2 = T \circ f_1$ met $T : x \mapsto x - 4$

(f) $f_3 = f_1 \circ T$ met $T : x \mapsto 2x$

(g) $f_3 = f_1 \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$

2. Bekijk onderstaande grafiek:



Selecteer alle juiste gelijkheden:

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) $f_1 = f_3 \circ T$ met $T : x \mapsto 3x$

(b) $f_1 = T \circ f_2$ met $T : x \mapsto x + 4$

(c) $f_1 = T \circ f_3$ met $T : x \mapsto \frac{x}{3}$

CC BY-NC-SA 4.0

1.10.A Oefeningen transformaties van functies

(d) $f_1 = f_2 \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$

(e) $f_2 = f_1 \circ T$ met $T : x \mapsto 2x$

(f) $f_2 = T \circ f_1$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$

(g) $f_3 = T \circ f_1$ met $T : x \mapsto 3x$

(h) $f_3 = f_1 \circ T$ met $T : x \mapsto 3x$

Oefening 1.10.7. Teken (zonder gebruik van een grafisch rekenmachine) de grafiek van de functies met volgend voorschrift. Vertrek telkens van de grafiek van de absolute waarde functie $|x|$.

1. $f(x) = |x - 3|$
2. $f(x) = |x| - 3$
3. $f(x) = |x + 3|$
4. $f(x) = -|x - 3|$
5. $f(x) = ||x| - 3|$
6. $f(x) = ||x| + 3|$

CC BY-NC-SA 4.0

1.11 Inverse functies

Een functie f is een machine die een invoer x omzet in een uitvoer $f(x)$. Die uitvoer wordt soms ook met de letter y aangeduid en dan schrijven we $y = f(x)$. De machine berekent dus voor elke x een bijhorende y. Men kan zich afvragen of er ook een 'undo-machine' bestaat die de berekening van f ongedaan maakt, en de uitvoer y terug omzet in de invoer x.

We noemen een functie g **een inverse functie** voor f als g uit elke uitkomst y van f terug de input x kan berekenen: $g(y) = x$. Omdat $y = f(x)$, kunnen we $g(y) = x$ ook schrijven als $g(f(x)) = x$. Als een dergelijke functie g bestaat noemen we f *inverteerbaar* en g *de inverse functie* van f (eigenlijk *links*inverteerbaar en *linker*inverse maar dat is voorlopig niet belangrijk).

We bekijken eerst enkele voorbeelden. De voorbeelden tonen ook aan dat het voorschrift van de inverse van een functie f in een aantal gevallen te bepalen is uit het voorschrift van f. Het vinden van de inverse functie komt eigenlijk neer op het *oplossen van een vergelijking*: vind voor een gegeven functie $y = f(x)$ een nieuwe formule g die voor elk getal y de unieke $x = g(y)$ oplevert waarvoor geldt dat $f(x) = f(g(y)) = y$. Die functie levert dus voor elke y de unieke oplossing van de vergelijking $f(x) = y$.

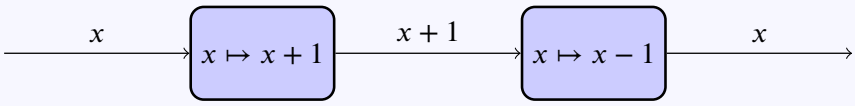
Voorbeeld 1.11.1. Zijn volgende functies inverteerbaar? Welke functie is de inverse?

1. Juist ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x + 1$

Uitwerking:

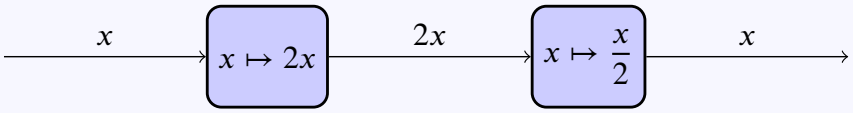
Deze functie f telt bij elk getal één op, dat kan dus ongedaan gemaakt worden door die één er weer af te trekken. De undo-functie van 'plus één' is dan uiteraard 'min één'. In formules: de inverse functie van $x \mapsto x + 1$ is de functie $x \mapsto x - 1$. Of nog, met de notatie $y = f(x)$: voor de functie $f(x) = x + 1$ geldt dan $y = x + 1$. Daaruit kunnen we berekenen dat $x = y - 1$. Als we de inverse functie g noemen, moeten we dus $g(y) = y - 1$ berekenen om de oorspronkelijke x terug te krijgen. Als we die functie g nu toch ook schrijven met als variabele x wordt dat $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = x - 1$. We kunnen dan nagaan dat $g(f(x))$ inderdaad terug x geeft: $g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1) - 1 = x$.

Merk op dat we uit het verband $f(x) = y$ een voorschrift voor g hebben gevonden door 'op te lossen naar x', en dus een formule kregen van de vorm $x = g(y)$. Daarna hebben we, omdat dat gebruikelijk is, in de definitie van g de variabele toch weer terug x genoemd en niet y.



2. Juist ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x$

Uitwerking: De undo-functie van 'vermenigvuldigen met twee' is 'delen door twee'. Dus $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x/2$ is de inverse functie van f, want $g(f(x)) = g(2x) = (2x)/2 = x$.



3. Fout ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2$

Uitwerking: Alle input wordt naar 2 gestuurd. Dat kan niet ongedaan gemaakt worden, want als je enkel de output 2 kent, kan je natuurlijk niet meer weten wat er precies in de machine werd gestopt: *elke input* geeft output 2.

Iets wiskundiger vinden we dat $f(x) = y = 2$ voor alle x, en dit functievoorschrift kan niet herschreven worden naar een voorschrift van de vorm $x = g(y)$, aangezien deze formule geen x bevat.

CC BY-NC-SA 4.0

1.11 Inverse functies

4. Juist ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x$

Uitwerking: De inverse is $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x$, en is dus gelijk aan f. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x$ is dus haar eigen inverse.

5. Juist ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x + 3$

Uitwerking: De inverse is $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x-3}{2}$.

Deze f stuurt x naar $y = 2x + 3$. Uit $y = 2x + 3$ kunnen we echter eenvoudig x berekenen door de 3 naar het ander lid te brengen en te delen door twee: $y = 2x + 3 \iff y - 3 = 2x \iff \dfrac{y-3}{2} = x \iff x = \dfrac{y-3}{2}$.

Dus als we voor g de functie nemen die $y \mapsto g(y) = \dfrac{y-3}{2}$ dan geldt inderdaad dat $g(f(x)) = g(2x+3) = \dfrac{(2x+3)-3}{2} = x$.

De letter die we gebruiken als variabele van de inverse functie is niet belangrijk, we kunnen de inverse functie even goed noteren als $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x-3}{2}$

6. Fout ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

Uitwerking: Er bestaat geen inverse, want de input 2 en de input -2 worden beide afgebeeld op $f(2) = f(-2) = 4$. De output 4 hoort dus zowel bij input 2 als bij -2. Er kan geen inverse functie g bestaan, want die moet dan 4 zowel op 2 afbeelden als op -2, en dat is onmogelijk want een functie kan een getal maar afbeelden op één ander getal.

We noemen twee functies *inversen* van elkaar, als ze elkaars actie ongedaan maken. We eisen dus niet alleen dat g de actie van de functie f ongedaan maakt, maar ook dat f op zijn beurt de actie van g ongedaan maakt. Als f en g inverse functies zijn van elkaar dan noteren we g ook als f^{-1}, *de inverse functie* van f. Omdat het precieze domein en codomein bij inverse functies erg belangrijk kunnen zijn, gebruiken we hier steeds de uitgebreide notatie $f : A \to B$ voor functies.

Definitie 1.11.1 (Inverse functie)**.**

Als $A, B \subset \mathbb{R}$, en $f : A \to B$ en $g : B \to A$ reële functies zijn, dan geldt:

- we noemen f en g **inverse functies van elkaar** (en f de **inverse** van g en g de **inverse** van f) als

$$g(f(x)) = x \quad \text{voor alle } x \in A \text{ en}$$
$$f(g(x)) = x \quad \text{voor alle } x \in B$$

- we noemen f **inverteerbaar** als er een inverse functie bestaat.
- we noteren de (unieke) **inverse functie** van een inverteerbare functie $f : A \to B$ als

$$f^{-1} : B \to A : x \mapsto f^{-1}(x)\,.$$

Dan geldt voor alle x in A, en alle y in B:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$
$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.11 Inverse functies

Merk op dat spreken over *de* inverse functie alleen zinvol is als een inverse functie uniek is. Dat is echter het geval, zoals blijkt uit volgende eigenschap:

Eigenschap 1.11.1.

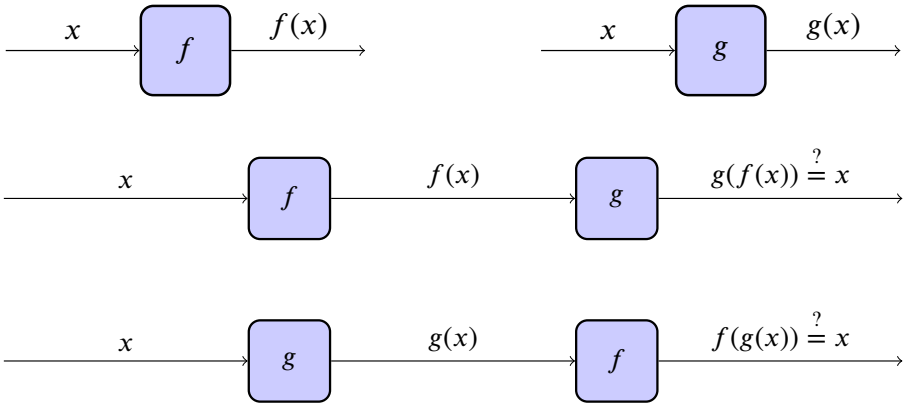
- Als een functie een inverse functie heeft, dan is die inverse uniek.
- Voor een inverteerbare functie $f : A \to B$ geldt voor elke $x \in A$ en $y \in B$ dat

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

Je kan de voorwaarde voor inverse functies ook schrijven als

$$(g \circ f)(x) = x \quad \text{voor alle } x \in A \text{ en}$$
$$(f \circ g)(x) = x \quad \text{voor alle } x \in B$$

Twee functies zijn dus elkaars inverse als hun samenstelling de identieke functie $x \mapsto x$ is, dus iedere x afbeeldt op zichzelf. De grafiek van de identieke functie is de eerste bissectrice in het vlak met vergelijking $y = x$. Schematisch wordt dat:



Opmerking 1.11.1.

- Niet elke functie is inverteerbaar. Voor een gegeven functie f bestaat f^{-1} dus niet altijd. Bijvoorbeeld de functie $x \mapsto 1$ heeft geen inverse.
- Je mag kiezen welke letter je neemt als variable voor de inverse functie. Neem je bijvoorbeeld de variabele y voor f^{-1} dan noteren we

$$f^{-1} : B \to A : y \mapsto f^{-1}(y)$$

en dat betekent precies hetzelfde als

$$f^{-1} : B \to A : x \mapsto f^{-1}(x)$$

Het gebruik van de letter y is afhankelijk van de context eerder nuttig of eerder verwarrend. Het is daarbij belangrijk op te merken dat $x \mapsto x^2, y \mapsto y^2$ en $z \mapsto z^2$ drie keer *precies* dezelfde functie zijn. De *naam van de variable* veranderen, verandert de *functie* niet.

Voorbeeld 1.11.2. De functies $f : x \mapsto \frac{1}{2}x+1$ en $g : x \mapsto 2x-2$ zijn elkaars inverse. We kunnen dat

CC BY-NC-SA 4.0

1.11 Inverse functies

algebraïsch bekijken door $f(g(x))$ en $g(f(x))$ te berekenen en aan te tonen dat beide uitdrukkingen gelijk zijn aan x:

$$f(g(x)) = f(2x-2) = \frac{1}{2}(2x-2)+1 = x \tag{1}$$

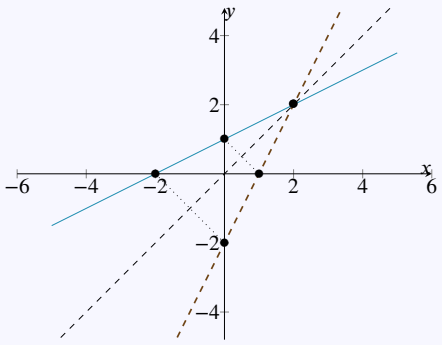
$$g(f(x)) = g(\frac{1}{2}x+1) = 2(\frac{1}{2}x+1)-2 = x \tag{2}$$

We kunnen dus schrijven dat $g = f^{-1}$ en dat $f = g^{-1}$.

We kunnen ook *meetkundig* onderzoeken wat dat betekent voor de grafiek van f en g.

Onderstaande tabel en grafiek van de functies f en g toont dat voor elk paar (x, y) op de grafiek van f, het punt (y, x) op de grafiek van g ligt, en omgekeerd. De grafiek van g krijgen we dus door in de grafiek van f de x en y van plaats te verwisselen. Grafisch komt dat overeen met spiegelen over de eerste bissectrice. De eerste bissectrice is de grafiek van $x \mapsto x$, dus de rechte met vergelijking $y = x$. Spiegelen ten opzichte van die bissectrice komt overeen met x en y omwisselen: het punt $(2, 3)$ wordt gespiegeld naar het punt $(3, 2)$.

$f : x \mapsto x/2+1$	$f^{-1} : x \mapsto 2x-2$
$(-4,-1)$	$(-1,-4)$
$(-2,0)$	$(0,-2)$
$(0,1)$	$(1,0)$
$(2,2)$	$(2,2)$
$(4,3)$	$(3,4)$



Voorbeeld 1.11.3. De functies $f : x \mapsto x+1$ en $g : x \mapsto x-1$ zijn inversen van elkaar.

We kunnen dat *algebraïsch* bekijken door $f(g(x)$ en $g(f(x))$ te berekenen, en aan te tonen dat beide uitdrukkingen gelijk zijn aan x:

$$f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)+1 = x \tag{3}$$

$$g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)-1 = x \tag{4}$$

We kunnen dus schrijven dat $g = f^{-1}$ en dat $f = g^{-1}$.

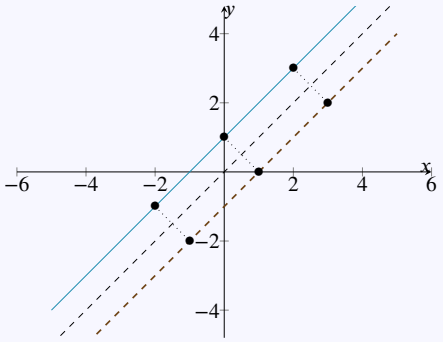
We kunnen ook *meetkundig* onderzoeken wat dat betekent voor de grafiek van f en g.

Onderstaande tabel en grafiek van de functies f en g toont dat voor elk paar (x, y) op de grafiek van f, het punt (y, x) op de grafiek van g ligt, en omgekeerd. De punten (x, y) van de grafiek van f komen dus overeen met de punten (y, x) van de grafiek van g. Meetkundig betekent x en y van plaats verwisselen spiegelen over de eerste bissectrice.

CC BY-NC-SA 4.0

1.11 Inverse functies

$f : x \mapsto x+1$	$f^{-1} : x \mapsto x-1$
$(-4,-3)$	$(-3,-4)$
$(-3,-2)$	$(-2,-3)$
$(-2,-1)$	$(-1,-2)$
$(-1,0)$	$(0,-1)$
$(0,1)$	$(1,0)$
$(1,2)$	$(2,1)$
$(2,3)$	$(3,2)$
$(3,4)$	$(4,3)$
$(4,5)$	$(5,4)$



Opmerking 1.11.2. Als f^{-1} bestaat, dan wordt de grafiek van f^{-1} bekomen door de grafiek van f te spiegelen rond de eerste bissectrice.

Om de inverse functie te vinden kunnen we volgend stappenplan volgen:

Algoritme 1.11.1 (Berekenen de inverse functie)**.**

In sommige gevallen kunnen we een inverse functie expliciet berekenen:

(a) Schrijf de functie $f : A \to B : x \mapsto f(x)$ in de vorm $y = f(x)$.

(b) Probeer x op te lossen uit $y = f(x)$.
Dit betekent: probeer x te schrijven als functie van y.
Op die manier vind je een functie g zodat $x = g(y)$.

(c) Deze g is de inverse functie: $f^{-1} : B \to A : y \mapsto g(y)$.

(d) Vervang indien gewenst de variabele van de inverse functie door x.

(e) Die nieuwe formule geeft dan $f^{-1} : B \to A : x \mapsto g(x)$.

Voorbeeld 1.11.4. Bereken indien mogelijk de inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 5x+3$.

$$y = 5x+3 \iff y-3 = 5x \iff \frac{y-3}{5} = x$$

De inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 5x+3$ is dus $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \frac{y-3}{5}$ of ook $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x-3}{5}$.

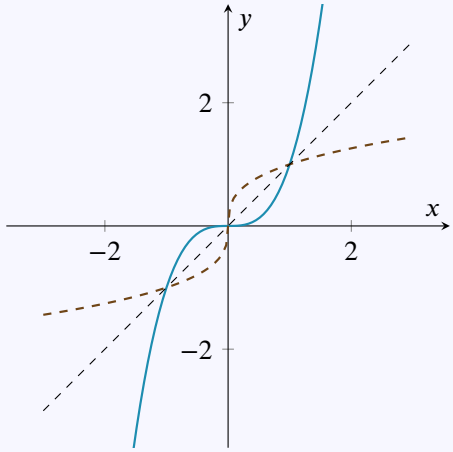
Voorbeeld 1.11.5. Bereken indien mogelijk de inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$.

$$y = x^3 \iff y^{\frac{1}{3}} = x$$

De inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ is dus $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto y^{\frac{1}{3}}$ of ook $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.11 Inverse functies

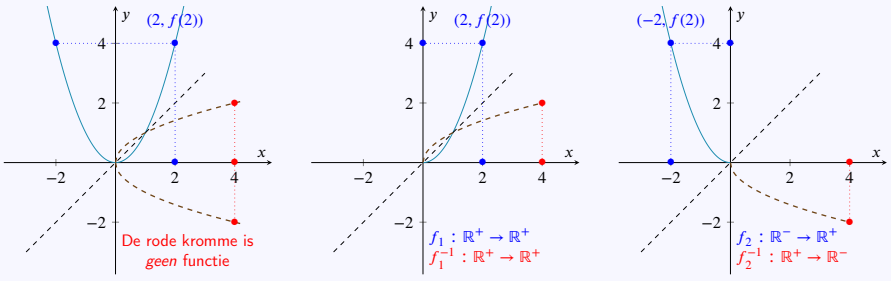


Voorbeeld 1.11.6. Bereken indien mogelijk de inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$.

$$y = x^2 \iff x = \pm\sqrt{y}$$

Deze functie is *niet inverteerbaar*:

- Voor $y < 0$ bestaat de vierkantswortel niet. De oplossing voor dit probleem is het codomein beperken tot het beeld $\mathbb{R}^+$. Wanneer we het codomein wijzigen krijgen we een andere functie, dus geven we die een andere naam: $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$
- Voor $y > 0$ zijn er twee oplossingen, $x = \sqrt{y}$ en $x = -\sqrt{y}$. Er zijn 2 mogelijke manieren om toch een inverse functie te definiëren:
  - Als je het domein van $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ beperkt tot $\mathbb{R}^+$, dus $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ dan is $f_1^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$.
  - Als je het domein van $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ beperkt tot $\mathbb{R}^-$, dus $f_2 : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ dan is $f_2^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : x \mapsto -\sqrt{x}$.



Het is dus mogelijk dat een functie f geen inverse heeft, maar dat een beperking van die functie tot een kleiner (co)domein – wat een nieuwe functie oplevert – *wel* een inverse heeft. Typische voorbeelden zijn de inversen van de sinus, cosinus en tangens.

Opmerking 1.11.3 (Grafisch criterium voor inverteerbaarheid)**.**

Uit bovenstaande voorbeelden leiden we volgend verband af tussen de inverteerbaarheid van een functie en haar grafiek:

Een functie f is *inverteerbaar*

CC BY-NC-SA 4.0

1.11 Inverse functies

als en slechts als
elke horizontale rechte $y = c$ met c in het codomein van f snijdt de grafiek van f *in juist één punt*.

Als zo'n horizontale rechte in meer dan één punt snijdt met de grafiek van f dan kan je dikwijls een inverteerbare functie verkrijgen door het *domein* van f te beperken.

Als zo'n horizontale rechte geen snijpunt heeft met de grafiek van f dan kan je dikwijls een inverteerbare functie verkrijgen door het *codomein* van f te beperken.

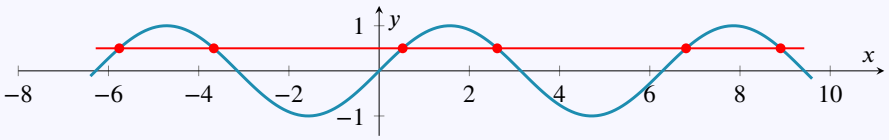
Typische voorbeelden zijn de inverse functies van de goniometrische en exponentiële functies. Als je nog niet vertrouwd bent met goniometrische, exponentiële en logaritmische functies kan je de details van onderstaande voorbeelden overslaan.

Voorbeeld 1.11.7 (Sinusfunctie)**.**

We kunnen ons afvragen of er een inverse functie bestaat voor de sinusfunctie

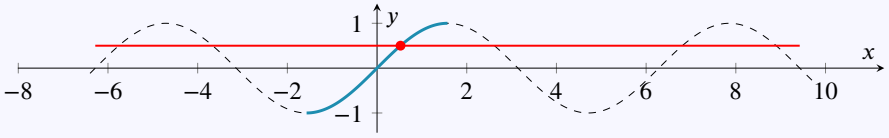
$$\sin : \mathbb{R} \mapsto [-1, 1] : x \mapsto \sin x\,.$$

In tegenstelling tot de meeste voorbeelden die we zijn tegengekomen, is het hier minder makkelijk om uit de formule $y = f(x)$ een verband $x = g(y)$ vinden. We kunnen hier daarentegen aantonen dat er *geen inverse* kan bestaan voor de sinusfunctie. Uit de gekende grafiek van de sinusfunctie



volgt wegens vorige opmerking dat de sinus niet inverteerbaar is: iedere horizontale rechte op een hoogte tussen -1 en 1 snijdt de grafiek van de sinus immers meer dan één keer.

Het probleem kan worden opgelost door het *domein* te beperken tot een goed gekozen interval, bijvoorbeeld $[-\pi/2, \pi/2]$. Op dit interval heeft de sinus wel een inverse.



De verdere studie van dit soort inverse functies leidt tot de zogenaamde cyclometrische functies.

Voorbeeld 1.11.8 (Logaritmische en exponentiële functies zijn elkaars inversen)**.**

Bereken indien mogelijk de inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2^x$.

Deze functie is *niet inverteerbaar* want voor $y \leq 0$ bestaat er geen x zodat $y = 2^x$. We kunnen een inverteerbare functie vinden door het *codomein* te beperken tot het beeld van f, namelijk $\mathbb{R}_0^+$.

Dan bestaat er wel voor elk getal $y \in \mathbb{R}_0^+$ een unieke $x \in \mathbb{R}$ zodat $y = 2^x$. We noemen deze x de *2-logaritme* van y, en noteren dat als $x = \log_2(y)$. Er geldt dus

$$y = 2^x \iff x = \log_2(y)$$

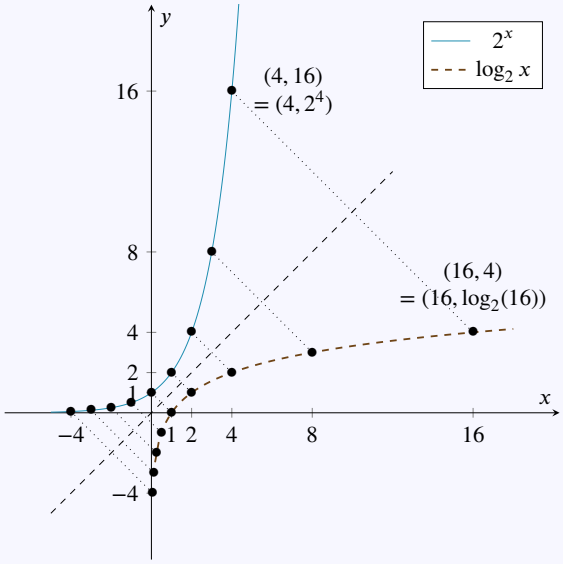
De functies $\exp_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto 2^x$ en $\log_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \log_2(x)$ zijn elkaars inverse.

De grafiek van de inverse functie is de spiegeling rond de eerste bissectrice. Inderdaad, spiegelen over

CC BY-NC-SA 4.0

1.11 Inverse functies

de eerste bissectrice komt overeen met (x, y) vervangen door (y, x):



CC BY-NC-SA 4.0

1.11.A Oefeningen inverse functies

Oefening 1.11.1. Ga na welke van de volgende functies inverteerbaar zijn. Indien een functie niet inverteerbaar is, bepaal dan het grootst mogelijke domein waarop een beperking van de functie wel inverteerbaar is. Bepaal, eventueel na het domein te beperken, de inverse functie en maak telkens een schets van de functie en haar inverse.

1. Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$. Is deze functie inverteerbaar? Ja | Nee

2. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$. Is deze functie inverteerbaar? Ja | Nee

3. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto |x|$. Is deze functie inverteerbaar? Ja | Nee

4. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2 - 2x + 1$. Is deze functie inverteerbaar? Ja | Nee

5. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\} : x \mapsto \dfrac{x+2}{x-3}$. Is deze functie inverteerbaar? Ja | Nee

Oefening 1.11.2. Voor welke $m, c \in \mathbb{R}$ is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto mx + c$ inverteerbaar?

Oefening 1.11.3. Zijn de volgende functies met meervoudig functievoorschrift inverteerbaar? Zo ja, bepaal dan de inverse functie. Maak om te beginnen een grafiek van de gegeven functie.

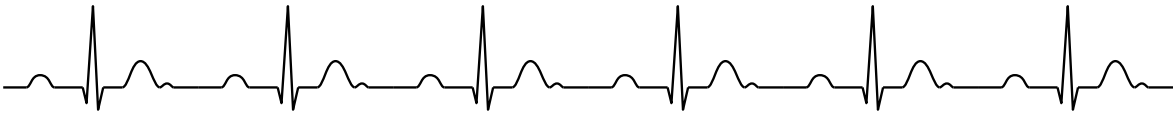
1. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^3 & \text{als } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{als } x > 0 \end{cases}$ is inverteerbaar | niet inverteerbaar .

2. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{als } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{als } x > 1 \end{cases}$ is inverteerbaar | niet inverteerbaar .

3. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$ is inverteerbaar | niet inverteerbaar

CC BY-NC-SA 4.0

1.12 Periodieke functies



Definitie 1.12.1 (Periodieke functie)**.**

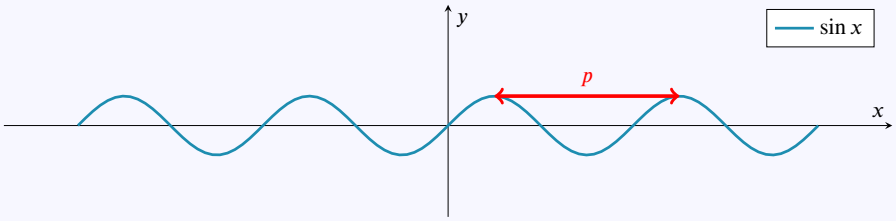
We noemen een reële functie f **periodiek** (soms ook **periodisch**) als er een getal $c > 0$ bestaat zodat

$$\text{voor alle } x \in \mathbb{R} : f(x+c) = f(x)$$

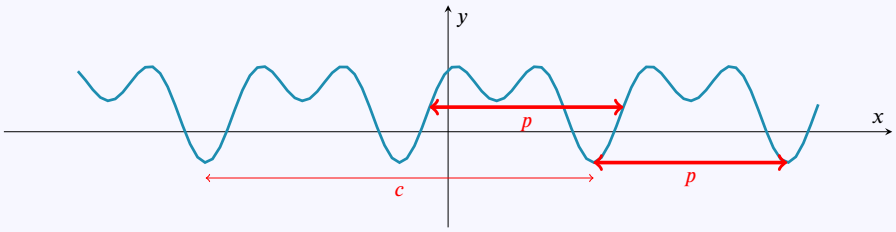
De **periode** p van f is de *kleinste* strikt positieve c waarvoor deze eigenschap geldt.

Voorbeeld 1.12.1 (Basisvoorbeeld)**.**

Wie al vertrouwd is met de goniometrische functies zoals sinus, cosinus,... zal hoogstwaarschijnlijk bij de term periodieke functie in eerste instantie aan deze functies denken. Ze vormen dan ook de standaardvoorbeelden voor periodieke functies, met periode $p = 2\pi$.

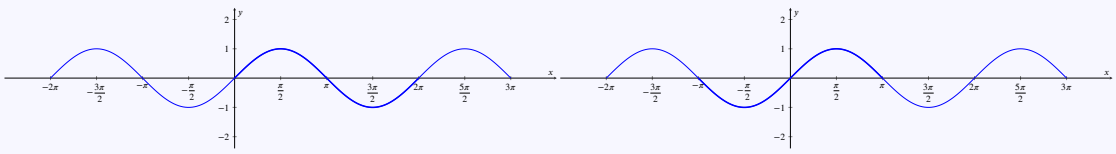


Maar ook sommen van sinussen en cosinussen zijn periodieke functies:



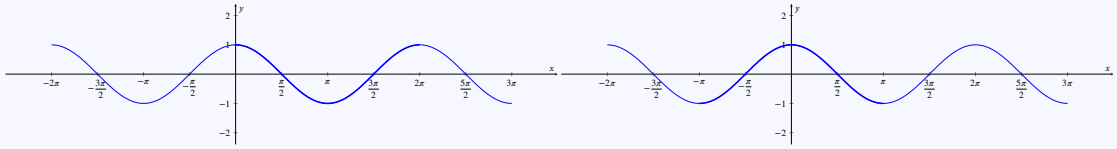
Voorbeeld 1.12.2. De belangrijkste voorbeelden van periodieke functies zijn de goniometrische functies:

1. De functie $\sin(x)$ met periode 2π

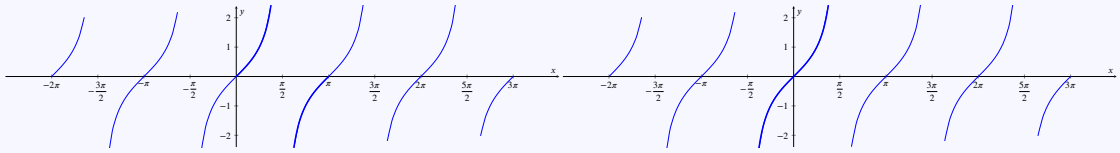


2. De functie $\cos(x)$ met periode 2π

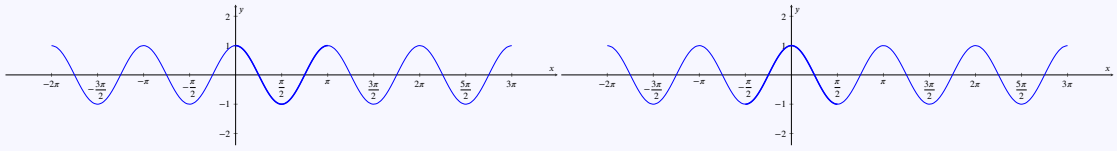
1.12 Periodieke functies



3. De functie $\tan(x)$ met periode π



4. De functie $\cos(2x)$ met periode π



Opmerking 1.12.1.

- De grafiek van een periodieke functie herhaalt zich dus op elk interval van lengte p.
- Als $f(x+c) = f(x)$ voor *elke* x, dan is ook $f(x-c) = f(x)$ omdat $f(x-c) = f((x-c)+c) = f(x)$.
- Als $f(x+c) = f(x)$ voor *elke* x, dan is ook $f(x+2c) = f((x+c)+c) = f(x+c) = f(x)$.
- Als $f(x+c) = f(x)$ voor *elke* x, dan is dus ook $f(x+kc) = f(x)$ voor elke geheel getal k.
- Als $f(x+c) = f(x)$ voor *sommige* x, dan zegt dat niets over het al dan niet periodiek zijn van f.
- Soms spreekt men ook af om elke c waarvoor altijd geldt dat $f(x+c) = f(x)$ een *periode* te noemen van f. Met die afspraak is *de* periode van een periodieke functie dus niet uniek bepaald.

Omdat voor een periodieke functie f met periode p voor alle x geldt dat $f(x+p) = f(x)$, volstaat het f te kennen op een interval van de vorm $[a, a+p[$, met a eender welk getal. In de praktijk blijkt het handig om te werken met intervallen van de vorm $[0, p[$, of $[-p/2, p/2[$.

Eigenschap 1.12.1.

- Als je een periodieke functie f met periode p kent op een halfopen interval van lengte p, dan ken je ze overal.
- Elke functie op een halfopen interval van lengte p kan op unieke wijze worden uitgebreid tot een periodieke functie op $\mathbb{R}$.

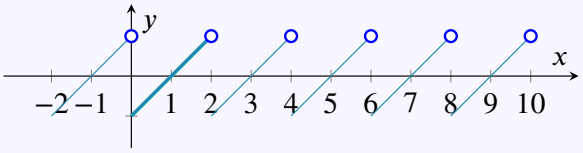
We kunnen een functie f die enkel gedefinieerd is op een interval $[a, a+p[$ uitbreiden tot $\mathbb{R}$ als volgt. Een willekeurig reëel getal x schrijven we als $x = x_0 + kp$, met $x_0 \in [a, a+p[$ en $k \in \mathbb{Z}$. Dan definiëren we:

$$f(x) = f(x_0 + kp) \overset{\text{def}}{=} f(x_0)$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.12 Periodieke functies

Voorbeeld 1.12.3 (Basisvoorbeeld uitbreiden van functies)**.** Beschouw de functie $f : [0,2[\to \mathbb{R} : x \mapsto x-1$. We kunnen die functie op unieke wijze uitbreiden tot een periodieke functie op $\mathbb{R}$ door te definiëren dat $f(x+2k) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$ voor alle $x \in [0,2[$ en $k \in \mathbb{Z}_0$.



Merk op dat de periodieke uitbreiding van f sprongen vertoont. De periodieke uitbreiding van f is *niet continu*.

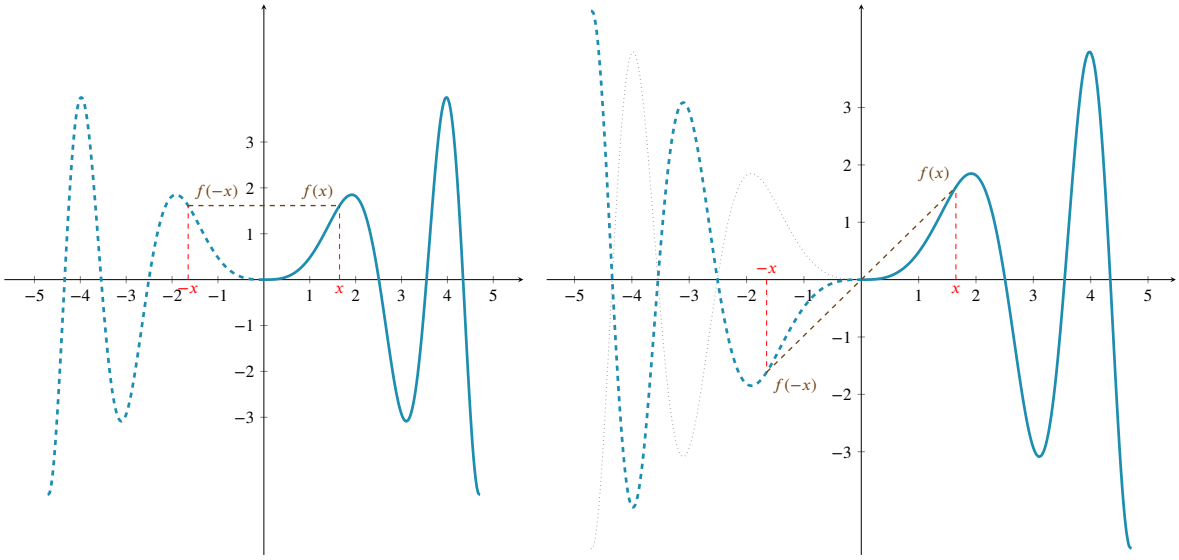
CC BY-NC-SA 4.0

1.13 Even en oneven functies

Definitie 1.13.1 (Even en oneven functies)**.**

Een reële functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is **even** als voor elke getal $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $f(x) = f(-x)$

Een reële functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is **oneven** als voor elke getal $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $f(x) = -f(-x)$



Opmerking 1.13.1.

- De grafiek van een even functie f wordt bij spiegeling over de y-as op zichzelf afgebeeld.
- De grafiek van een oneven functie f wordt bij spiegeling over de y-as en daarna over de x-as op zichzelf afgebeeld. Eerst spiegelen over de y-as en daarna over de x-as komt neer op spiegelen tegenover de oorsprong.
- Een functie hoeft niet even of oneven te zijn.

Oefening 1.13.1. Welke van de volgende functies zijn even/oneven of geen van beide?

1.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto x^2$
2.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto x^3$
3.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto x + 1$
4.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto x$
5.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto \sin x$
6.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto \cos x$
7.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto \tan x$

CC BY-NC-SA 4.0

1.13 Even en oneven functies

8. | Even | Oneven | Geen van beiden | $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ als f, g even zijn

9. | Even | Oneven | Geen van beiden | $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ als f, g oneven zijn

10. | Even | Oneven | Geen van beiden | $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ als f even en g oneven is

CC BY-NC-SA 4.0

1.14 Uitkomsten van de oefeningen

1.2.A Oefeningen domein functie (uitkomsten)

Oefening 1.2.1. (uitkomst)

1. $f(x) = \sqrt{x}$.
Antwoord: dom $f =$

2. $f(x) = \sqrt{1+x}$.
Antwoord: dom $f =$

3. $f(x) = \sqrt{1-x}$.
Antwoord: dom $f =$

4. $f(x) = |x|$.
Antwoord: dom $f =$

5. $f(x) = 1 - |x|$.
Antwoord: dom $f =$

6. $f(x) = \sqrt{1-|x|}$.
Antwoord: dom $f =$

7. $f(x) = \sqrt{-|x|}$.
Antwoord: dom $f =$

8. $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Antwoord: dom $f =$

9. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
Antwoord: dom $f =$

10. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
Antwoord: dom $f =$

11. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$.
Antwoord: dom $f =$

12. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
Antwoord: dom $f =$

13. $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$.
Antwoord: dom $f =$

$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

1.2.B Oefeningen beeld functie (uitkomsten)

Oefening 1.2.2. (uitkomst)

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$.
Antwoord: bld $f =$

2. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$.
Antwoord: bld $f =$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$.
Antwoord: bld $f =$

4. $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$.
Antwoord: bld $f =$

5. $f : [-1,2] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$.
Antwoord: bld $f =$

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$.
Antwoord: bld $f =$

7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto cx^2 + a$, $a \in \mathbb{R}$ en $c \in \mathbb{R}_0^+$.
Antwoord: bld $f =$

$]-\infty, -a]$

8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -cx^2 - a$, $a \in \mathbb{R}$ en $c \in \mathbb{R}_0^+$. Antwoord: bld $f =$

1.3.A Oefeningen grafieken van functies (uitkomsten)

Oefening 1.3.3. (uitkomst)

1. $f(x) = |x|$

2. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

3. $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

4. $f(x) = \dfrac{x-|x|}{2}$

5. $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$

Oefening 1.3.4. (uitkomst)

1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \neq 0 \\ 1 & \text{als } x = 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{als } x < 0 \\ x & \text{als } x \geq 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \leq 1 \\ x-1 & \text{als } x > 1 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

1.8.A Basisoefeningen samenstellen van functies (uitkomsten)

Oefening 1.3.5. (uitkomst)

1. $= \begin{cases} x^2+x-2 & \text{als } x \leq 0 \\ 2x-5 & \text{als } 0 < x < 3 \\ x-2 & \text{als } x \geq 3 \end{cases}$ **2.** $= \begin{cases} x^2+x-2 & \text{als } x < 0 \\ x-2 & \text{als } 0 \leq x < 3 \\ 2x-5 & \text{als } x \geq 3 \end{cases}$ **3.** $= \begin{cases} x^2+x-2 & \text{als } x < 0 \\ 2x-5 & \text{als } 0 \leq x < 3 \\ x-2 & \text{als } x \geq 3 \end{cases}$

f_2

1.8.A Basisoefeningen samenstellen van functies (uitkomsten)

Oefening 1.8.6. (uitkomst)

1. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto 7$, dan is $f \circ g : x \mapsto$

2. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto 7$, dan is $g \circ f : x \mapsto$

3. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $f \circ g : x \mapsto$

4. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $g \circ f : x \mapsto$

5. Als $f : x \mapsto \cos(x)$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $f \circ g : x \mapsto$

6. Als $f : x \mapsto \cos(x)$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $g \circ f : x \mapsto$

$\cos^2(x)$

Oefening 1.8.7. (uitkomst)

1. Als $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto x^2$ en $h : x \mapsto 2x+2$, dan is $h \circ (f \circ g) : x \mapsto$

2. Als $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto x^2$ en $h : x \mapsto 2x+2$, dan is $(h \circ f) \circ g : x \mapsto$

3. Als $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto x^2$ en $h : x \mapsto 2x+2$, dan is $(f \circ g) \circ h : x \mapsto$

4. Als $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto x^2$ en $h : x \mapsto 2x+2$, dan is $f \circ (g \circ h) : x \mapsto$

$\cos((2x+2)^2)$

Oefening 1.8.8. (uitkomst)

1. Als $f : x \mapsto \sin(x+2)$ en $g : x \mapsto x+1$, dan is $f \circ g : x \mapsto$

2. Als $g : x \mapsto \sin(x+2)$ en $f : x \mapsto x+1$, dan is $f \circ g : x \mapsto$

3. Als $f : x \mapsto x + e^x$ en $g : x \mapsto 2x+1$, dan is $f \circ g : x \mapsto$

4. Als $f : x \mapsto x + e^x$ en $g : x \mapsto 2x+1$, dan is $g \circ f : x \mapsto$

5. Als $f : x \mapsto x^2 + x$ en $g : x \mapsto e^x + \cos(x^2)$, dan is $f \circ g : x \mapsto$

6. Als $f : x \mapsto x^2 + x$ en $g : x \mapsto e^x + \cos(x^2)$, dan is $g \circ f : x \mapsto$

$e^{(x^2+x)} + \cos\left((x^2+x)^2\right)$

Oefening 1.8.9. (uitkomst)

1. $\sin x^2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ en $g(x) =$

2. $\sin^2 x = f(g(x))$ met $f(x) =$ en $g(x) =$

3. $(x+2)^2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ en $g(x) =$

4. $x^2+2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ en $g(x) =$

5. $x^4 = f(g(x))$ met $f(x) =$ en $g(x) =$

6. $2x^2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ en $g(x) =$

7. $4x^2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ en $g(x) =$

$2x$

CC BY-NC-SA 4.0

1.9.A Oefeningen transformaties van functies (uitkomsten)

Oefening 1.8.10. (uitkomst)

1. Voor de functies $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x-1}$ en $g : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$
is $f \circ g$:
en $g \circ f$:.

2. Voor de functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x+3$
is $f \circ g$:
en $g \circ f$:.

$\mathbb{R} : x \mapsto 3x$ en $g : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{-x}$
is $f \circ g$:
en $g \circ f$:.

3. Voor de functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^- \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{-3x}$

Oefening 1.8.11. (uitkomst)

Gegeven zijn de functies $f : [0,1] : x \mapsto x^2$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 5x$.

1. $\operatorname{dom} f \circ g =$.

2. $\operatorname{dom} g \circ f =$.

$[0,1]$

Oefening 1.8.12. (uitkomst)

Gegeven zijn de volgende twee functievoorschriften voor f en g:

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto \sqrt{-x}$$

1. $\operatorname{dom} f =$
en $\operatorname{dom} g =$
.
$\operatorname{bld} f =$
en $\operatorname{bld} g =$
.

2. Waar of niet waar: de functie $f \circ g$ bestaat:
. Zo ja, bepaal ook het domein, beeld en functievoorschrift van deze functie.

3. Waar of niet waar: de functie $g \circ f$ bestaat:
. Zo ja, bepaal ook het domein, beeld en functievoorschrift van deze functie.

Juist

Oefening 1.8.13. (uitkomst)

Gegeven zijn de volgende twee functievoorschriften voor f en g:

$$f : x \mapsto \sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}$$
$$g : x \mapsto \sqrt{x}$$

1. $\operatorname{dom} f =$
.

2. $\operatorname{dom} g =$
.

3. Waar of niet waar: de functie $f \circ g$ bestaat:
. Zo ja, bepaal ook het domein en functievoorschrift van deze functie.

4. Waar of niet waar: de functie $g \circ f$ bestaat:
. Zo ja, bepaal ook het domein en functievoorschrift van deze functie.

Fout

1.9.A Oefeningen transformaties van functies (uitkomsten)

Oefening 1.9.14. (uitkomst)

1.9.A Oefeningen transformaties van functies (uitkomsten)

1. Schets op papier de grafiek van de functie f.

2. Schets op papier de grafiek van de functie $g \circ f$.

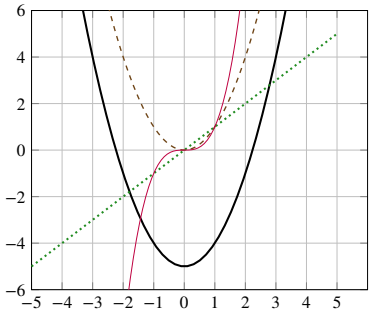
3. Schets op papier de grafiek van de functie $h \circ f$.

4. Schets op papier de grafiek van de functie $f \circ g$.

5. Schets op papier de grafiek van de functie $f \circ h$.

Oefening 1.9.15. (uitkomst)

1. Onderstaande figuur toont de grafieken van f_1, f_2, f_3 en f_4:



Welke van bovenstaande functies is gelijk aan $f_1 \circ T_1$ met $T_1 : x \mapsto x$?

Meerkeuze:

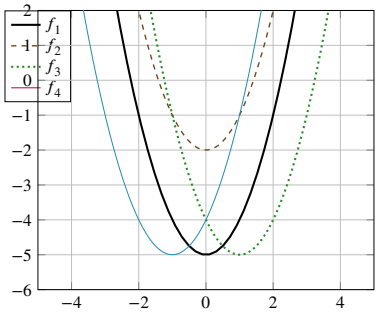
(a) f_1 ✓

(b) f_2

(c) f_3

(d) f_4

2. Onderstaande figuur toont de grafieken van f_1, f_2, f_3 en f_4:



Welke van bovenstaande functies is gelijk aan $f_1 \circ T_1 \circ T_2$ met $T_1 : x \mapsto x$ en $T_2 : x \mapsto x - 1$?

Meerkeuze:

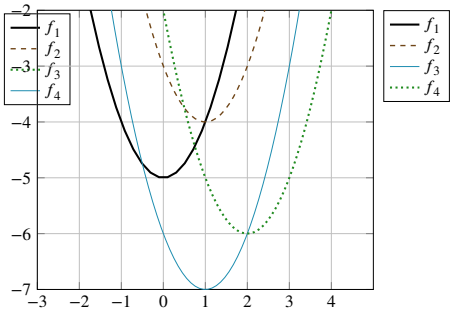
(a) f_1

(b) f_2

(c) f_3 ✓

(d) f_4

3. Onderstaande figuur toont de grafieken van f_1, f_2, f_3 en f_4:



Welke van bovenstaande functies is gelijk aan $T_3 \circ f_1 \circ T_1 \circ T_2$ met $T_1 : x \mapsto x - 1$, $T_2 : x \mapsto x - 1$ en $T_3 : x \mapsto x - 1$?

Meerkeuze:

(a) f_1

(b) f_2

(c) f_3

(d) f_4 ✓

Oefening 1.9.16. (uitkomst)

1. $f(x) = |\sin x|$

2. $f(x) = \sin |x|$

Oefening 1.9.17. (uitkomst)

1. $g(x) = |f(x)|$

2. $g(x) = f(|x|)$

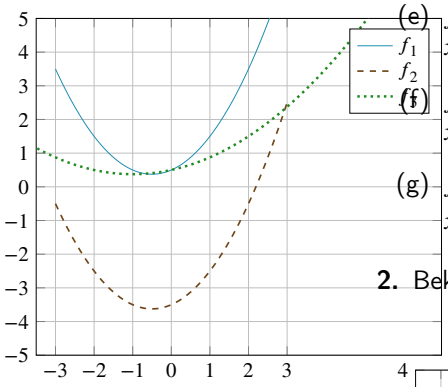
Ja

CC BY-NC-SA 4.0

1.10.A Oefeningen inverse functies (uitkomsten)

Oefening 1.9.18. (uitkomst)

1. Bekijk onderstaande grafiek:



Selecteer alle juiste gelijkheden:

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) $f_1 = T \circ f_2$ met $T : x \mapsto x + 4$ ✓

(b) $f_1 = f_3 \circ T$ met $T : x \mapsto 2x$ ✓

(c) $f_1 = f_2 \circ T$ met $T : x \mapsto x - 4$

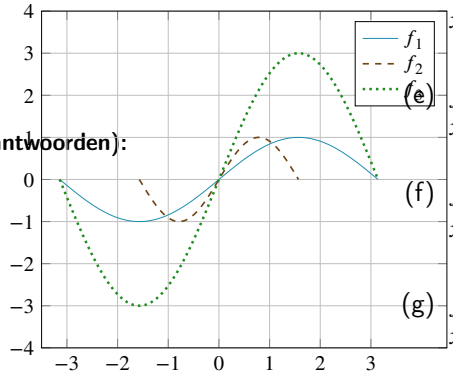
(d) $f_2 = f_1 \circ T$ met $T : x \mapsto x - 4$

(e) $f_2 = T \circ f_1$ met $T : x \mapsto x - 4$ ✓

(f) $f_3 = f_1 \circ T$ met $T : x \mapsto 2x$

(g) $f_3 = f_1 \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$ ✓

2. Bekijk onderstaande grafiek:



Selecteer alle juiste gelijkheden:

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) $f_1 = f_3 \circ T$ met $T : x \mapsto 3x$

(b) $f_1 = T \circ f_2$ met $T : x \mapsto x + 4$

(c) $f_1 = T \circ f_3$ met $T : x \mapsto \frac{x}{3}$ ✓

(d) $f_1 = f_2 \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$ ✓

(e) $f_2 = f_1 \circ T$ met $T : x \mapsto 2x$ ✓

(f) $f_2 = T \circ f_1$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$

(g) $f_3 = T \circ f_1$ met $T : x \mapsto 3x$ ✓

(h) $f_3 = f_1 \circ T$ met $T : x \mapsto 3x$

Oefening 1.9.19. (uitkomst)

1. $f(x) = |x - 3|$

2. $f(x) = |x| - 3$

3. $f(x) = |x + 3|$

4. $f(x) = -|x - 3|$

5. $f(x) = ||x| - 3|$

6. $f(x) = ||x| + 3|$

1.10.A Oefeningen inverse functies (uitkomsten)

Oefening 1.10.20. (uitkomst)

1. Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$. Is deze functie inverteerbaar?

2. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$. Is deze functie inverteerbaar?

3. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto |x|$. Is deze functie inverteerbaar?

4. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2 - 2x + 1$. Is deze functie inverteerbaar?

5. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\} : x \mapsto \frac{x+2}{x-3}$. Is deze functie inverteerbaar?

Ja

CC BY-NC-SA 4.0

Oefening 1.10.21. (uitkomst)

Oefening 1.10.22. (uitkomst)

1. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^3 & \text{als } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{als } x > 0 \end{cases}$ is
.

2. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{als } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{als } x > 1 \end{cases}$ is
.

3. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$ is

niet inverteerbaar

2.1 Intuïtieve definitie van het begrip functie

Functies zijn erg fundamentele objecten in de wiskunde, die erg diverse fenomenen kunnen beschrijven.

Definitie 2.1.1 (Pseudo-definities van het begrip functie)**.**

Een **functie** is iets dat voldoet aan volgende (allemaal min of meer equivalente) karakteriseringen:

- een *machine* of *black box* die voor elke toegelaten *input* telkens exact één *output* genereert.
- een bepaald soort *verband* tussen een *onafhankelijke variabele* en een *afhankelijke variabele*.
- een soort *formule* die *iets* verandert in *iets anders*.
- een *wiskundig object* dat een *functioneel verband* uitdrukt tussen andere *wiskundige objecten*.

Deze pseudo-definities zijn enigszins vaag, maar met de volgende voorbeelden, definities en eigenschappen zal het concept 'functie' een steeds duidelijkere en concretere invulling krijgen. Een typisch eerste voorbeeld om in gedachten te houden is de functie 'kwadrateer', die met elk getal zijn kwadraat associeert.

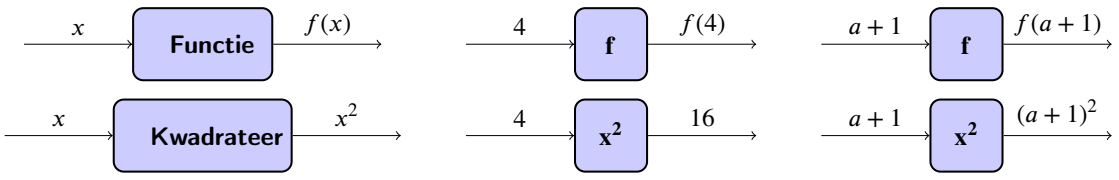
Een nuttige initiële voorstellingswijze van een functie bestaat uit een (in dit geval blauwe!) *black box*, die voor een bepaalde input I een bepaalde output O genereert:



Een **functie** is dus een ding dat een *input* omzet in een *output*. Ongeveer alles kan dienen als input en output van wiskundige functies, maar in wat volgt zullen we ons meestal concentreren op *reële functies*: dat zijn die functies waarvan zowel de input als de output reële getallen zijn. Voor dergelijke reële functies zijn er allerlei interessante begrippen en eigenschappen die niet zomaar van toepassing zijn op meer algemene functies, zoals nulpunten, minima en maxima, grafieken, afgeleiden, integralen,....

Een functie heeft meestal een **naam**, soms gewoon f van $f$unctie maar ook h, g, f_1, f_2 komen regelmatig voor. Enkele functies hebben standaardnamen of 'eigennamen': de vierkantswortel, sinus, logaritme, ...

Als symbool voor een willekeurige **input** gebruiken we meestal de letter x, maar ook andere letters zoals t, n, x_1,x_2 of y en y_1 komen voor. In plaats van een willekeurige x kan de input echter ook een concreet getal als 4 of zelfs een andere formule als $a+1$ zijn.



De **output** of het resultaat van de functie noteren we soms als een concrete formule, bijvoorbeeld $(x+3)^2$ als de input x is. Dikwijls gebruiken we de naam van de functie, dus $f(x)$ of $h(t)$. Soms geven we ook een generieke naam aan de output, en dan is de letter y daarvoor een erg populaire keuze. We schrijven dan typisch $y = f(x)$, en we bedoelen daarmee dat f een functie is waar je x kan instoppen en wat er dan uitkomt noemen we y, of $f(x)$.

In de formule $y = f(x)$ staat x dus voor de input, f voor de functie en y voor de output. Pas op: die generieke naam y voor de output veroorzaakt dikwijls verwarring, want de letter y wordt bijvoorbeeld ook gebruikt voor de tweede coördinaat van een punt in het vlak en dat heeft weinig te maken met functiewaarden. Daarom vermijden we in deze cursus waar mogelijk om de output een naam te geven, en

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Intuïtieve definitie van het begrip functie

we noteren de functie die x afbeeldt op $f(x)$ liefst als

$$f : x \mapsto f(x) \quad \text{of} \quad x \mapsto f(x),$$

maar niet als $x \to f(x)$. Let op het pijltje dat we hierboven gebruiken: dit heeft een voetje. Het pijltje zonder voet $\to$ gebruiken we in deze notatie dus niet.

We *lezen* de uitdrukking $f(x)$ als
$$\begin{cases} f \text{ van } x \\ \text{de functiewaarde van } f \text{ in } x \\ \text{het beeld van } f \text{ in } x \\ \text{het beeld van } x \text{ onder } f \text{ (of door } f) \end{cases}$$

Men zegt ook dat f het element x '*afbeeldt op* $f(x)$' of dat 'f *toepassen op* x' het element $f(x)$ oplevert.

Voorbeeld 2.1.1. Als we de 'kwadrateer'-functie k noemen schrijven we dus:

$$k : x \mapsto x^2 \quad \text{of} \quad k : x \mapsto k(x) = x^2.$$

Voor deze functie k geldt dat $k(2) = 2^2 = 4$, $k(4) = 4^2 = 16$ en $k(a+1) = (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$.
We *moeten* de functie geen naam geven, en schrijven ook $x \mapsto x^2$, $2 \mapsto 4$ en $a+1 \mapsto (a+1)^2$.

De functie $f : x \mapsto x^2 + 3$ heeft bijvoorbeeld volgende *functiewaarden*:

$f(0) = 0^2 + 3 = 3$		of	$0 \mapsto 0^2 + 3 = 3$
$f(5) = 5^2 + 3 = 28$			$5 \mapsto 5^2 + 3 = 28$
$f(-5) = (-5)^2 + 3 = 28$			$-5 \mapsto (-5)^2 + 3 = 28$
$f(a+1) = (a+1)^2 + 3 = a^2 + 2a + 4$			$a+1 \mapsto (a+1)^2 + 3 = a^2 + 2a + 4$

Opmerking 2.1.1. Bij elke inputwaarde moet precies één welbepaalde outputwaarde horen. Volgende constructies zijn dus *geen* functies:

- $f : x \mapsto$(de som van het aantal ogen van x worpen met een dobbelsteen): de outputwaarden liggen niet vast.
- $f : x \mapsto$(een getal a zodat $a^2 = x$): de outputwaarde is hierbij niet uniek bepaald, want 4 heeft zowel 2 als -2 als mogelijke outputwaarde.

Voorbeeld 2.1.2 (Enkele reële functies)**.**

De functie 'plus 5':	$f(x) = x + 5$	of	$x \mapsto x + 5$	
De functie 'maal 6':	$f(x) = 6x$		$x \mapsto 6x$	
De functie '7':	$f(x) = 7$		$x \mapsto 7$	(een *constante* functie)
De functie '0':	$f(x) = 0$		$x \mapsto 0$	(de *nulfunctie*)
De functie 'doe niets':	$f(x) = x$		$x \mapsto x$	(de *identieke* functie)
De functie 'kwadrateer':	$f(x) = x^2$		$x \mapsto x^2$	
De functie 'tegengestelde':	$f(x) = -x$		$x \mapsto -x$	
De functie 'n-de macht':	$f(x) = x^n$		$x \mapsto x^n$	met $n \in \mathbb{N}$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Domein en beeld van een functie

Functies veranderen *inputs* in *outputs*, en om te bepalen welk type inputs en outputs kunnen of mogen voorkomen voeren we twee belangrijke begrippen in: het *domein* en het *beeld* van een functie.

Definitie 2.2.1 (Domein en beeld van een functie)**.**

Het **domein** $\operatorname{dom} f$ van een functie f is de verzameling van alle ***toegelaten inputs*** van de functie.
Het **beeld** $\operatorname{bld} f$ van een functie f is de verzameling van alle ***effectieve outputs*** van de functie.

Een functie f van een verzameling A naar een verzameling B noteren we als

$$f : A \to B, x \mapsto f(x) \quad \text{of} \quad \begin{array}{rl} f : A & \to B \\ x & \mapsto f(x) \end{array}$$

en we lezen: f is een functie van A naar B die (een willekeurige) x afbeeldt op $f(x)$.

Pas op: we gebruiken het woord *beeld* dus zowel voor

het *beeld van een functie*	dus voor de *verzameling* $\operatorname{bld} f$, als voor
het *beeld van een getal* x *onder de functie* f	dus voor het *getal* $f(x)$.

Het pijltje $\to$ staat tussen *verzamelingen*, terwijl pijltje $\mapsto$ aangeeft *waarop* een functie iets afbeeldt.

Voorbeeld 2.2.1.

Het *domein* van de functie $x \mapsto x^2$ is $\mathbb{R}$, want elk reëel getal *heeft* een uniek kwadraat.
Het *beeld* van de functie $x \mapsto x^2$ is $\mathbb{R}^+$, want elk *positief* reëel getal *is* een kwadraat.

Let op: sommige getallen *zijn* het kwadraat van *twee* getallen, bijvoorbeeld $9 = 3^2 = (-3)^2$, maar dat is hier niet relevant. En andere getallen zoals -1 *zijn geen* kwadraat van een reëel getal, maar dat betekent hier enkel dat bijvoorbeeld -1 niet tot het beeld behoort.
We schrijven dus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$, of ook $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ wat soms handig is omdat het dikwijls niet eenvoudig is om het precieze beeld van een functie te bepalen. Je kan ook de functie $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$ definiëren, waarbij je dan expliciet enkel positieve getallen toelaat als input.

In de notatie $f : A \to B, x \mapsto f(x)$

moet elk element van A een beeld hebben:	$f : \cancel{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$	(want $-1 \mapsto ???$)
mag A *kleiner* zijn dan *alle mogelijke inputs*:	$f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$	
moet B *alle beelden* uit A bevatten:	$f : \mathbb{R} \to \cancel{[0,1]}, x \mapsto x^2$	(want $f(2) = 2^2 \notin [0,1]$)
mag B *groter* zijn dan de effectieve outputs:	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$	(maar $-1 \notin \operatorname{bld}(f)$)

Bij $f : A \to B, x \mapsto f(x)$ kan je het domein (alle toegelaten inputs) en de doelverzameling (alle toegelaten outputs) direct aflezen, maar het *beeld*, de effectief voorkomende outputs, moet je berekenen.
Bij $f : x \mapsto f(x)$ veronderstellen we steeds het *grootst mogelijke domein*, dus de grootst mogelijke verzameling waarop f is gedefinieerd, en kiezen meestal $\mathbb{R}$ als doelverzameling. Dus, met $f : x \mapsto 1/x$ bedoelen we $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$.

Oefening 2.2.1. Bepaal het *grootst mogelijke domein* met *bijhorend beeld* van volgende functies:

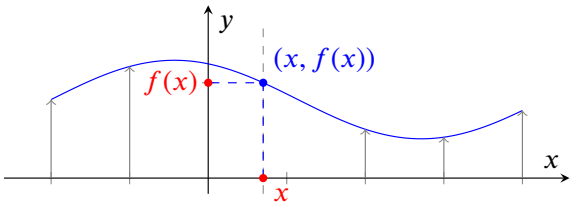
1. $f :$ ..... $\to$ ....., $x \mapsto x + 5$
2. $g :$ ..... $\to$ ....., $x \mapsto \sqrt{x - 5}$
3. $h_1 :$ ..... $\to$ ....., $x \mapsto -\sqrt{x}$
4. $h_2 :$ ..... $\to$ ....., $x \mapsto -\sqrt{-x}$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Grafiek van een functie

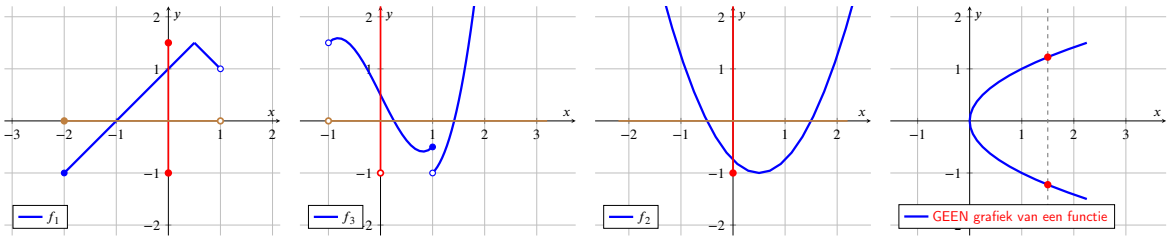
Een *reële functie* is een functie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ waarbij dus zowel de input als de output reële getallen zijn. Dergelijke functie kan worden voorgesteld door een *grafiek*, waarop een aantal belangrijke eigenschappen direct kunnen worden afgelezen. In de praktijk worden functies dikwijls geïdentificeerd met hun grafiek.

Definitie 2.3.1. De **grafiek van een reële functie** f is de kromme in het xy-vlak gevormd door de punten $(x, f(x))$ waarbij x loopt over alle waarden van het domein.



De grafiek van de functie f duidt dus boven elke x in het domein via het punt $(x, f(x))$ aan op welk getal $f(x)$ op de y-as deze x wordt afgebeeld. Als je de grafiek kent, *vind* je $f(x)$ als de *hoogte* van de grafiek in x, en als je de grafiek moet maken, *bepaalt* $f(x)$ de hoogte van die grafiek boven x. Daarbij ligt de grafiek *onder* de x-as als $f(x)$ negatief is.

Voor de meeste reële functies is de grafiek een vloeiende kromme, die eventueel wel kniks en gaten kan hebben of sprongen kan maken. De grafiek voldoet wel altijd aan de **'verticale-snijlijn-test**': elke verticale lijn snijdt de grafiek van een functie ten hoogste één keer, namelijk in het punt $(x, f(x))$ voor de verticale lijn door $(x, 0)$. Dit volgt uit de voorwaarde dat bij elke x uit het domein van de functie f slechts één functiewaarde $f(x)$ hoort. Voor x *buiten* het domein snijdt de verticale door $(x, 0)$ de grafiek *niet*.



Per afspraak behoort een 'vol bolletje' tot de grafiek, terwijl een 'open bolletje' er geen deel van uitmaakt.

Domein en beeld zijn de projecties van de grafiek op de coördinaatassen:

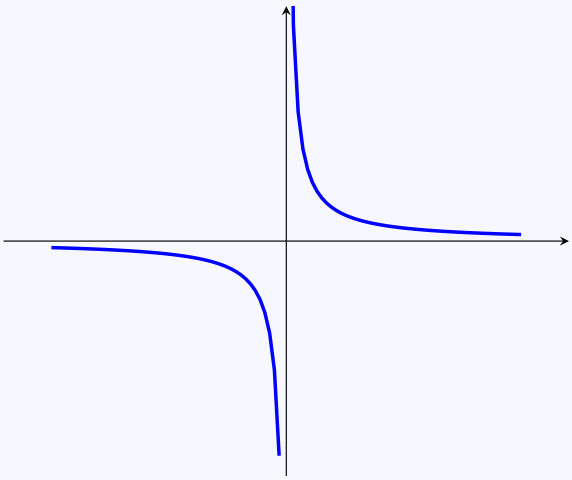
Eigenschap 2.3.1.

Het *domein* van een functie is de *verticale projectie* van haar grafiek op de *horizontale* x-as.
Het *beeld* van een functie is de *horizontale projectie* van haar grafiek op de *verticale* y-as.

Voorbeeld 2.3.1. De functie $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ heeft volgende grafiek en functietabel:

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Grafiek van een functie



Voor $x = 0$ is de functiewaarde $\frac{1}{x}$ niet gedefinieerd. Het domein is dus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ook het beeld van f is gelijk aan $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. De horizontale projectie van de grafiek op de *verticale* y-as toont immers dat de waarde $y = 0$ niet bereikt zal worden (hoewel voor zeer grote x-waarden de corresponderende y-waarden zeer dicht $y = 0$ naderen).

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Som en verschil van functies

Bij 'rekenen' denken we in eerste instantie aan 'rekenen met getallen', maar je kan ook 'rekenen met functies'. We beschouwen hier eerst de som en het verschil van *functies*, later volgen product en quotiënt. Er bestaan ook complexe operaties die geen veralgemeningen meer zijn voor operaties op getallen, zoals functies samenstellen, inverteren, afleiden en integreren.

We bestuderen de som en het verschil van *reële* functies $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. We gebruiken meestal de korte schrijfwijze, dus $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ voor de functie met het grootst mogelijke domein $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Definitie 2.4.1 (Som, verschil en tegengestelde van reële functies)**.** Voor reële functies f en g geldt:

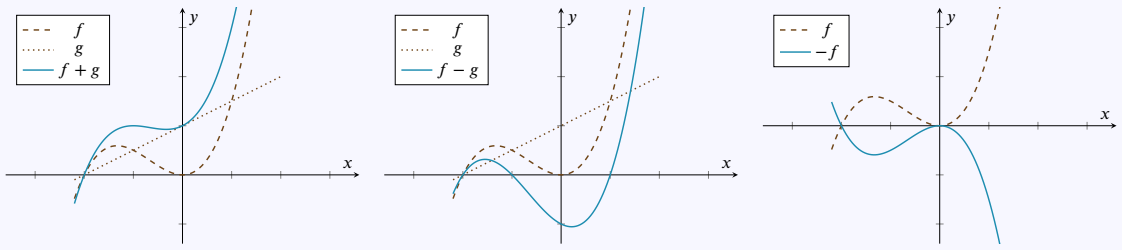
$$\begin{array}{rcccc} f+g & : & x \mapsto & (f+g)(x) & \overset{\text{def}}{=} & f(x)+g(x) \\ f-g & : & x \mapsto & (f-g)(x) & \overset{\text{def}}{=} & f(x)-g(x) \\ -f & : & x \mapsto & (-f)(x) & \overset{\text{def}}{=} & -f(x) \end{array}$$

Som en verschil van functies zijn gedefinieerd waar *beide functies* gedefinieerd zijn, en er geldt:

De	**som**	$f+g$	beeldt x af op de	som	$f(x)+g(x)$.
Het	**verschil**	$f-g$	beeldt x af op het	verschil	$f(x)-g(x)$.
De	**tegengestelde**	$-f$	beeldt x af op het tegengestelde		$-f(x)$.

Voorbeeld 2.4.1. Voor de functies $f : x \mapsto x^3 + 2x^2$ en $g : x \mapsto x + 2$ is

$$\begin{array}{rcl} \text{de som} & f+g: & x \mapsto x^3+2x^2+x+2 \\ \text{het verschil} & f-g: & x \mapsto x^3+2x^2-x-2 \\ \text{de tegengestelde} & -f: & x \mapsto -x^3-2x^2 \end{array}$$



Opmerking 2.4.1. Deze definitie bevat niets spectaculairs: de som van functies is wat iedereen verwacht wat een som van functies moet zijn. Merk wel op:

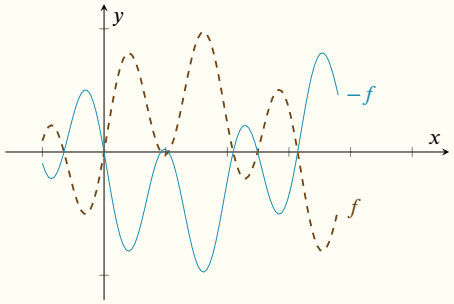
(a) De functies $f+g$ en $f-g$ zijn enkel gedefinieerd voor x-waarden waarvoor zowel f als g gedefinieerd is. Je kan dit ook formuleren als: het domein van de som en van het verschil is gelijk aan de doorsnede van het domein van f en het domein van g.

(b) De som van twee functies f en g wordt 'puntsgewijs' gedefinieerd. Dat betekent dat de functiewaarde van $f+g$ in een punt enkel afhangt van de functiewaarden van f en g in dat punt. Voor andere operaties op functies zal dat niet steeds het geval zijn. Zo hangt de afgeleide van een functie in een bepaald punt af van de functiewaarden van de functie in de omgeving van dat punt, en de waarde van een primitieve functie hangt af van de waarden over een interval.

(c) De grafiek van $-f$ is de spiegeling van de grafiek van f over de x-as.

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Som en verschil van functies



(d) De tegengestelde functie is een speciaal geval van het verschil: $-f = 0 - f$. (Merk op dat de 0 hier staat voor de nul*functie*: de functie die elke getal afbeeldt op het getal 0).

(e) Het verschil van functies is een speciaal geval van de som: $f - g = f + (-g)$.
Elk verschil is dus ook een som, namelijk de som met het tegengestelde.

(f) Waar de functiewaarde van g strikt negatief is, ligt de grafiek van $f - g$ boven de grafiek van f.

(g) De *nulpunten* van $f - g$ zijn precies de snijpunten van de grafieken van f en g.

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Product en quotiënt van functies

Definitie 2.5.1 (Product, quotiënt en omgekeerde van reële functies)**.**

Voor reële functies f en g geldt:

$$\begin{array}{rcccc} f\cdot g & : & x\mapsto & (f\cdot g)(x) & \overset{\text{def}}{=} & f(x)\cdot g(x) \\ \dfrac{f}{g} & : & x\mapsto & \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) & \overset{\text{def}}{=} & \dfrac{f(x)}{g(x)} \\ \dfrac{1}{f} & : & x\mapsto & \dfrac{1}{f}(x) & \overset{\text{def}}{=} & \dfrac{1}{f(x)}. \end{array}$$

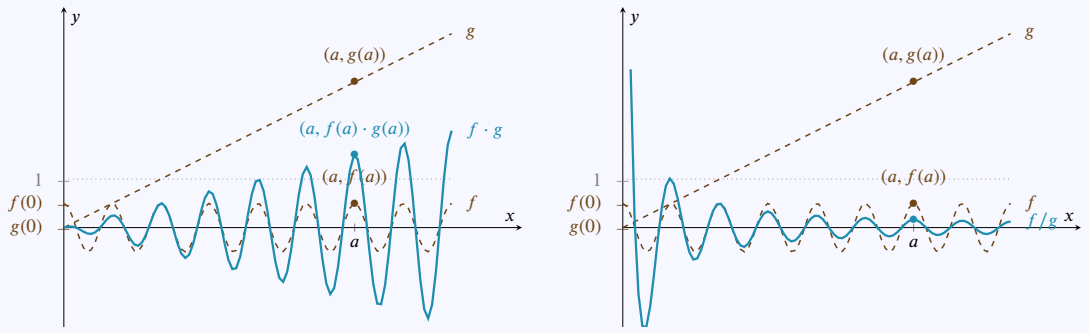
Merk op dat $\frac{f}{g}$ en $\frac{1}{f}$ niet gedefinieerd zijn in de punten waar de noemer nul wordt, en er geldt:

Het **product** $f\cdot g$ beeldt x af op het product $f(x)\cdot g(x)$.

Het **quotiënt** $\frac{f}{g}$ beeldt x af op het quotiënt $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Het **omgekeerde** $\frac{1}{f}$ beeldt x af op het omgekeerde $\frac{1}{f(x)}$.

Voorbeeld 2.5.1. De grafiek van twee functies f en g en hun product $f\cdot g$ en quotiënt $\frac{f}{g}$:



Opmerking 2.5.1.

(a) Net als bij de functies $f+g$ en $f-g$ is de functie $f\cdot g$ enkel gedefinieerd voor x-waarden waarvoor zowel f als g gedefinieerd is. Het domein is dus gelijk aan de doorsnede van het domein van f en het domein van g.

(b) Het quotiënt $\frac{f}{g}$ is enkel gedefinieerd voor x-waarden waarvoor zowel f als g gedefinieerd zijn en $g(x)\neq 0$. Het domein van het quotiënt is dus gelijk aan de doorsnede van het domein van f en het domein van g zonder de x-waarden waarbij $g(x)=0$.

(c) PAS OP: we gebruiken NIET de notatie f^{-1} voor de omgekeerde functie, want die notatie is voorbehouden voor de *inverse* functie die we verder zullen bespreken. De *omgekeerde* functie en de *inverse* functie zijn twee *verschillende* begrippen!

(d) Op haar domein wordt de functie $f\cdot g$ nul in de nulpunten van f *en* in de nulpunten van g. Inderdaad, $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$ en dit product is enkel nul als $f(x)=0$ of $g(x)=0$.

CC BY-NC-SA 4.0

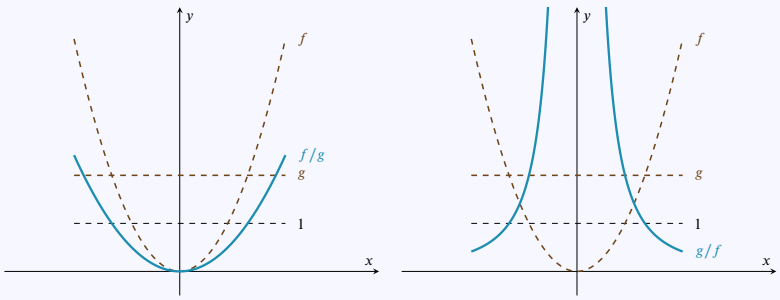
2.5 Product en quotiënt van functies

(e) De nulpunten van de functie $\frac{f}{g}$ zijn iets lastiger. Voor een nulpunt van f waar de functie g niet nul is, is er geen probleem: dat nulpunt van f is ook een nulpunt van $\frac{f}{g}$. Neem bijvoorbeeld $f : x \mapsto x-1$ en $g : x \mapsto 2x$, dan hebben zowel f als $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x-1}{2x}$ een nulpunt in $x = 1$.
Maar voor $f : x \mapsto x-1$ en $g : x \mapsto (x-1)^2$ is $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{1}{x-1}$. Deze functie is niet gedefinieerd in $x = 1$, en $x = 1$ is dus zeker geen nulpunt.
Ook de functies $f : x \mapsto x^2 - 1$ en $g : x \mapsto x - 1$ zijn beiden nul in het punt $x = 1$, maar hun quotiënt $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$ heeft waarde 2 voor $x = 1$, en $x = 1$ is dus *geen nulpunt* van $\frac{f}{g}$.

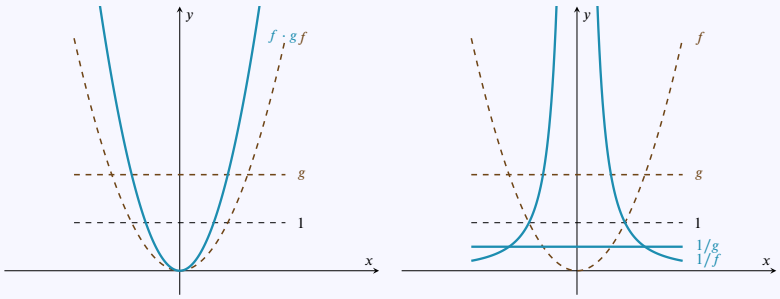
Voorbeeld 2.5.2 (Extra voorbeeld met de functies $x \mapsto x^2$ en $x \mapsto 2$)**.**

Beschouw de functies $f : x \mapsto x^2$ en $g : x \mapsto 2$.

1. De grafieken van f en g en de quotiënten $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ en $\frac{g}{f} : x \mapsto \frac{2}{x^2}$:



2. De grafieken van f en g, hun product $f \cdot g : x \mapsto 2x^2$ en hun omgekeerden $\frac{1}{f} : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en $\frac{1}{g} : x \mapsto \frac{1}{2}$:



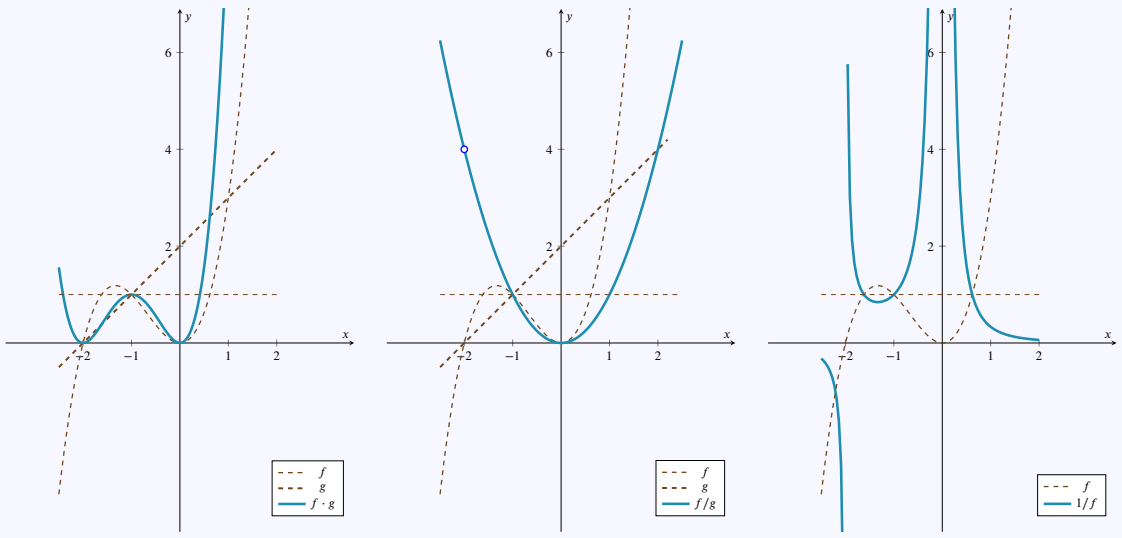
Voorbeeld 2.5.3 (Nog meer extra voorbeelden)**.**

1. Voor de functies $f : x \mapsto x^3 + 2x^2$ en $g : x \mapsto x + 2$ is

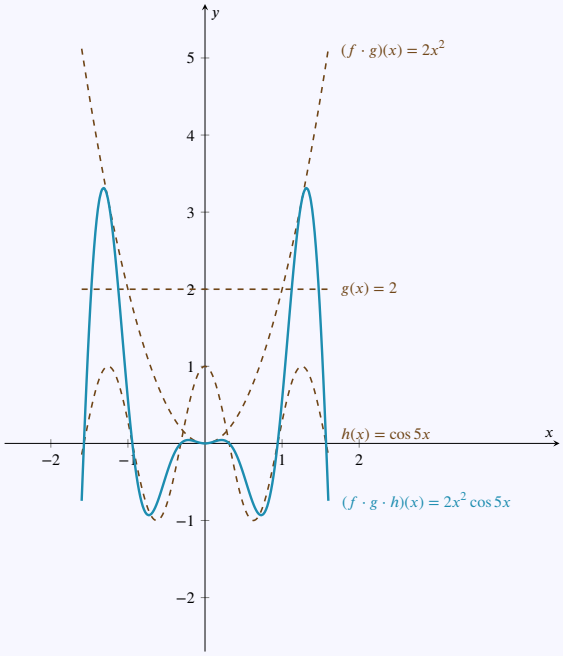
- het product $f \cdot g$ gelijk aan de functie $f \cdot g : x \mapsto (x^3 + 2x^2)(x+2) = x^4 + 4x^3 + 4x^2$
- het quotiënt $\frac{f}{g}$ gelijk aan de functie $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x^3+2x^2}{x+2}$
- de omgekeerde $\frac{1}{f}$ gelijk aan de functie $\frac{1}{f} : x \mapsto \frac{1}{x^3+2x^2}$

CC BY-NC-SA 4.0

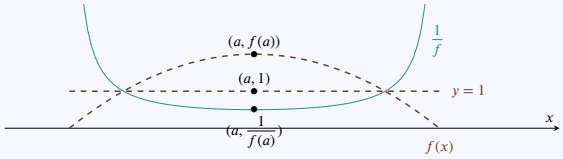
2.5 Product en quotiënt van functies



2. Het product van de drie functies $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto 2$, $h : x \mapsto \cos(5x)$ is de functie $f \cdot g \cdot h : x \mapsto 2x^2 \cos(5x)$.



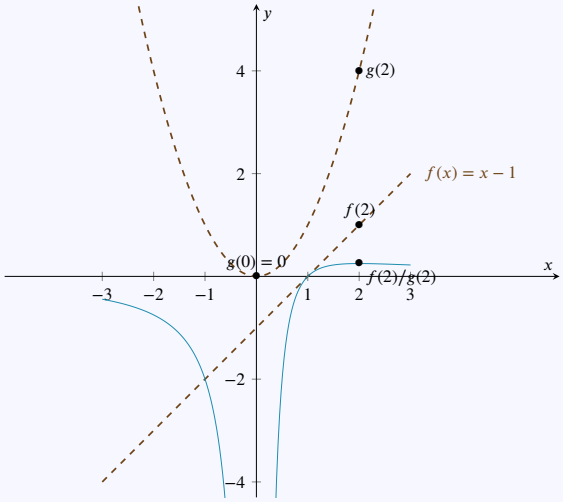
3. De grafiek van een functie f en de omgekeerde functie $\frac{1}{f}$.



4. De grafiek van een functie $f : x \mapsto x - 1$, een functie $g : x \mapsto x^2$ en de functie $f/g : x \mapsto \frac{x-1}{x^2}$.

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Product en quotiënt van functies



Merk op dat voor $x = 0$ is $g(x) = x^2 = 0$ dus is $\frac{f}{g}$ niet gedefinieerd in $x = 0$.

2.6 Samenstellen van functies

Bewerkingen zoals $a+b$, $a-b$ en $a\cdot b$ met twee reële getallen a en b kan je eenvoudig uitbreiden tot bewerkingen met reële functies f en g, en dat levert dan de *functies* $f+g$, $f-g$ en $f\cdot g$ op. Je kan deze operaties voor functies dus beschouwen als veralgemeningen van die voor getallen. Indien $f(x)=x+3$ en $g(x)=x^2$ krijgen we bijvoorbeeld:

$$(f+g)(x)=x^2+x+3 \qquad (f-g)(x)=-x^2+x+3 \qquad (f\cdot g)(x)=(x+3)x^2=x^3+3x^2$$

Er is echter ook een fundamenteel andere manier om een nieuwe functie te maken van twee bestaande functies. Je kan sommige functies namelijk eenvoudig *samenstellen*, dat betekent ze *na elkaar* toe te passen: *eerst* neem je $g(x)$, en dan pas je f toe *op het resultaat* $g(x)$ van g, met als eindresultaat $f(g(x))$. Deze operatie is eigen aan functies en er is geen analoge operatie voor getallen.

Definitie 2.6.1 (Samenstelling van twee functies)**.**

De **samengestelde functie** van twee reële functies f en g, genoteerd met $f\circ g$ en gelezen als 'f *na* g' (of soms ook 'f van g'), is per definitie de functie die *eerst* g toepast, en dan f, dus

$$f\circ g : x \mapsto \boxed{(f\circ g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(g(x))}.$$

Merk op dat $f\circ g$ enkel gedefinieerd is waar de uitdrukking $f(g(x))$ betekenis heeft. Dat is voor de x waarvoor $g(x)$ bestaat en bovendien ook $f(g(x))$ bestaat. Anders gezegd: het domein van $f\circ g$ bestaat uit alle x in het domein van g waarvoor $g(x)$ tot het domein van f behoort.

Voorbeeld 2.6.1. Bekijk de twee functies: $f(x)=x+3$ en $g(x)=x^2$. De functie g kwadrateert een getal terwijl de functie f bij een getal drie optelt. De twee bewerkingen *na elkaar uitvoeren*, dus eerst x kwadrateren (d.i. g toepassen) en dan drie optellen bij het resultaat (d.i. f toepassen op de uitkomst van g), levert *een nieuwe functie*:

$$x \overset{g}{\mapsto} x^2 \overset{f}{\mapsto} x^2+3 \quad \text{of} \quad f(g(x))=x^2+3.$$

Deze functie wordt de *samenstelling* van f en g genoemd en genoteerd als $f\circ g$ (lees: 'f na g').

Merk op dat de functie die *eerst* wordt uitgevoerd *laatst* staat in de notatie! Als je de bewerkingen omkeert (eerst drie optellen en dan kwadrateren), dan krijg je een andere functie:

$$x \overset{f}{\mapsto} x+3 \overset{g}{\mapsto} (x+3)^2 \quad \text{of} \quad g(f(x))=(x+3)^2=x^2+6x+9$$

De volgorde van de samenstelling speelt dus een belangrijke rol:

$$f\circ g : x \mapsto x^2+3 \qquad \text{en} \qquad g\circ f : x \mapsto (x+3)^2.$$

Voorbeeld 2.6.2. Bepaal de samenstellingen van volgende reële functies

f	g	$f\circ g$	$g\circ f$
$x\mapsto x^2$	$x\mapsto x-3$	$x\mapsto(x-3)^2$	$x\mapsto x^2-3$
$x\mapsto x^2$	$x\mapsto x^2$	$x\mapsto x^4$	$x\mapsto x^4$
$x\mapsto x^2$	$x\mapsto 2$	$x\mapsto 4$	$x\mapsto 2$
$x\mapsto x^2$	$x\mapsto -x$	$x\mapsto x^2$	$x\mapsto -x^2$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26H.4)

2.7 De inverse functie

Een functie $x \mapsto f(x)$ is een machine die een invoer x omzet in een uitvoer $f(x)$. Die uitvoer noteert men soms met de letter y, en dan schrijft men $y = f(x)$. De machine f berekent voor elke x een bijhorende y. Men kan zich afvragen of er ook een 'undo-machine' bestaat die de berekening van f *ongedaan maakt*, en uit de uitvoer y terug de invoer x berekent.

Voor dergelijke 'undo-machine' moet dus gelden dat

$$y = f(x) \iff g(y) = x.$$

Een undo-machine kan niet bestaan als de functie f twee inputs x_1 en x_2 op dezelfde y afbeeldt, want een machine g kan dan onmogelijk weten of de output y komt van input x_1, dan wel van input x_2.
Dit is bijvoorbeeld het geval voor de functie 'kwadrateer' $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, die zowel 2 als -2 afbeeldt op 4. Als je enkel de output 4 kent, kan je onmogelijk weten of de input 2 was, dan wel -2.
Als je voor de machine 'kwadrateer' de inputs en outputs zou beperken tot de *positieve* getallen, dus $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$, dan bestaat er *wel* een undo-functie, namelijk de vierkantswortel $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto \sqrt{x}$. Er geldt dan inderdaad

$$y = x^2 \iff x = \sqrt{y}.$$

Als $y = f(x)$, kunnen we $g(y) = x$ ook schrijven als $g(f(x)) = x$, en
omgekeerd als $g(y) = x$, dan kunnen we $f(x) = y$ schrijven als $f(g(y)) = y$.
Men kan aantonen dat als dergelijke undo-machine bestaat, ze ook uniek is. Als f een undo-machine heeft noemen we die de *inverse functie* van f:

Definitie 2.7.1. De **inverse functie** van $f : A \to B, x \mapsto f(x)$, genoteerd $f^{-1} : B \to A, y \mapsto f^{-1}(y)$ is de functie die de actie van f ongedaan maakt, dus zodat dat

$$y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x.$$

Niet elke functie heeft een inverse functie, maar als f een inverse f^{-1} heeft dan geldt

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{en} \quad f(f^{-1}(x)) = x$$

Merk op: je kan de functie f^{-1} natuurlijk ook met variabele x schrijven: $f^{-1} : B \to A, x \mapsto f^{-1}(x)$.

Eigenschap 2.7.1.

- Als functie f inverteerbaar is, is ook functie f^{-1} inverteerbaar en geldt $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
- Twee functies f en g zijn elkaars inverse als en slechts als voor alle x en y geldt dat

$$y = f(x) \iff x = g(y)$$

We bekijken enkele voorbeelden. Deze tonen aan hoe het voorschrift van de inverse van een functie f in een aantal gevallen te bepalen is uit het voorschrift van f. Het vinden van de inverse functie komt eigenlijk neer op het oplossen van een vergelijking: bekijk het voorschrift $y = f(x)$ als een vergelijking voor de onbekende x en probeer deze op te lossen. De oplossing hangt natuurlijk af van y: als het lukt en en er een unieke oplossing is voor x, dan krijg je een formule $x = g(y)$ waarvoor geldt $y = f(x) = f(g(y))$. Op die manier kan het voorschrift van de inverse functie g soms gevonden worden. Als de vergelijking $y = f(x)$ niet tot een unieke oplossing voor x leidt, dan bestaat de inverse functie niet. In oefening 2 wordt dat geïllustreerd.

Voorbeeld 2.7.1. De inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 5x + 3$ is $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \dfrac{y-3}{5}$.

CC BY-NC-SA 4.0

2.7 De inverse functie

Uitwerking:

Inderdaad, de uitdrukking $y = 5x + 3$ zegt hoe y afhangt van x. Door deze uitdrukking te beschouwen als een vergelijking in de onbekende x, en die op te lossen naar x, vinden we hoe x afhangt van y:

$$y = 5x + 3 \iff y - 3 = 5x \iff \frac{y-3}{5} = x.$$

De functie $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \dfrac{y-3}{5}$ kan je natuurlijk ook schrijven met een andere naam voor de variabele, dus ook als

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x-3}{5} \quad \text{of} \quad f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \frac{t-3}{5}.$$

Welke naam het meest handig is hangt af van de context. Soms kies je best terug x, en soms behoud je best de naam y.

Oefening 2.7.1. De inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ is de functie

$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto y^{-3}$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x^3$	
$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \sqrt[3]{y}$	de inverse bestaat niet	

Opmerking 2.7.1. Als de inverse f^{-1} bestaat, dan is de grafiek van f^{-1} de spiegeling van die van f over de eerste bissectrice. Inderdaad, spiegelen rond de eerste bissectrice is de rol van x en y omwisselen, en dat is precies wat ook de inverse functie doet.

Oefening 2.7.2. De inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ is de functie

$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : y \mapsto y^{-2}$		
$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x^2$	$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : y \mapsto \sqrt{y}$	de inverse bestaat niet

CC BY-NC-SA 4.0

2.8 Veeltermfuncties

Een functie waarvan het voorschrift een veelterm is, noemen we een **veeltermfunctie**. Een veeltermfunctie van **graad** n wordt genoteerd als:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

met $a_n \in \mathbb{R}_0, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$.

Opmerking 2.8.1.

(a) Het domein van een veeltermfunctie is altijd $\mathbb{R}$.

(b) De functie met voorschrift $f(x) = 0$ wordt de **nulfunctie** genoemd. Deze functie heeft geen graad.

(c) Als $f(x) = c$ voor een $c \in \mathbb{R}_0$, spreken we van een **constante functie**. Deze heeft graad 0.

(d) Een veeltermfunctie van de n-de graad heeft hoogstens n verschillende nulpunten.

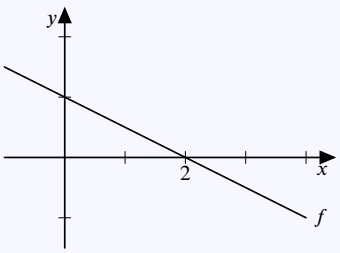
2.8.1 Eerstegraadsfuncties

Functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = ax + b$ met $a \neq 0$ worden **eerstegraadsfuncties** genoemd. Dit zijn veeltermfuncties van graad één. Het domein en bereik zijn altijd $\mathbb{R}$. De grafische voorstelling van deze functie is een rechte. We noemen a de **richtingscoëfficiënt** of **rico**. Indien $a > 0$ dan is de rechte stijgend, indien $a < 0$ dan is de rechte dalend. De rechte snijdt de y-as in het punt $(0, b)$.

We bespreken enkele belangrijke karakteristieken aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld 2.8.1. Stel $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

(a) **Grafische voorstelling:** omdat de rico $a = -\frac{1}{2}$ negatief is, zal de rechte dalend zijn.



(b) **Nulpunt:**

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$$

(c) Een **tekentabel** vat samen waar de functie positief, negatief of nul wordt:

x		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$

(d) Het **functieverloop** vat in een tabel eigenschappen zoals stijgen, dalen, maximum, en minimum samen. In het geval van een rechte is de situatie eenvoudig.

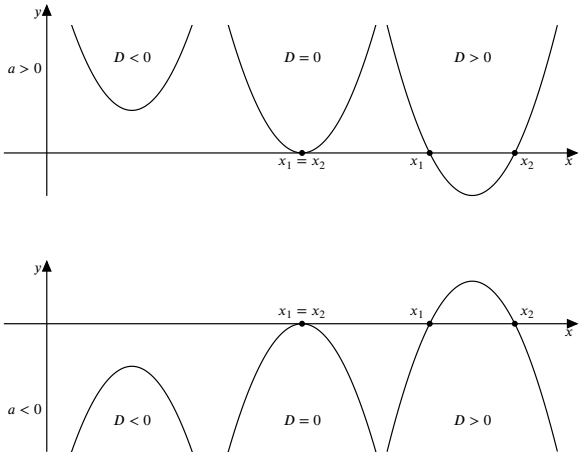
x	
$f(x)$	$\searrow$

CC BY-NC-SA 4.0

2.8 Veeltermfuncties

2.8.2 Tweedegraadsfuncties

Functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = ax^2+bx+c$ met $a \neq 0$ worden **tweedegraadsfuncties** of **kwadratische** functies genoemd. Dit zijn veeltermfuncties van graad twee. Het domein is altijd $\mathbb{R}$. Het beeld of bereik is echter niet de volledig verzameling $\mathbb{R}$ – we komen hierop terug in de onderstaande opmerking. De grafische voorstelling van deze functie is een **parabool** met top $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$. Indien $a > 0$ spreken we van een **dalparabool** en indien $a < 0$ spreken we van een **bergparabool**. Afhankelijk van het aantal nulpunten verschilt de grafiek.



Het berekenen van de discriminant $D = b^2 - 4ac$ zegt iets over het aantal nulpunten.

- Indien $D > 0$ dan zijn $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ of $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ nulpunten.
- Indien $D = 0$ is er slechts één nulpunt, $x = \dfrac{-b}{2a}$.
- Indien $D < 0$ dan zijn er geen reële nulpunten.

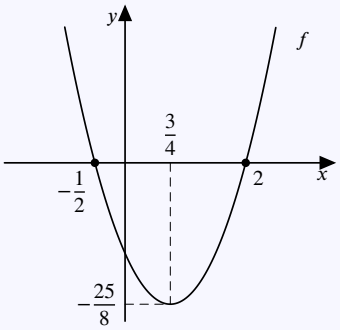
Opmerking 2.8.2. De top van een parabool heeft als coördinaten $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$. Bij een bergparabool noemt men dit ook het **maximum** van de functie, bij een dalparabool het **minimum**. Het bereik van een kwadratische functie strekt zich uit van min oneindig tot het maximum voor een bergparabool en van het minimum tot plus oneindig voor een dalparabool.

Voorbeeld 2.8.2. Stel $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$.

(a) **Grafische voorstelling**: een dalparabool want $a = 2 > 0$, met vergelijking: $y = 2x^2 - 3x - 2$. Berekenen we de top via de bovenstaande formule, dan krijgen we $\left(\frac{3}{4}, f\left(\frac{3}{4}\right)\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{-25}{8}\right)$. De top is handig bij het tekenen van de grafiek.

CC BY-NC-SA 4.0

2.8 Veeltermfuncties



De twee andere punten aangeduid op de grafiek (i.e. de nulpunten) worden hieronder berekend.

(b) Het **domein** is zoals bij alle veeltermfuncties $\mathbb{R}$. Het **bereik** is $\left[-\frac{25}{8}, +\infty\right[$.

(c) De nulpunten zijn:

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{4} = \frac{-1}{2}$$
$$x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{4} = 2$$

(d) **Tekentabel**:

x		$-\frac{1}{2}$		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

(e) **Functieverloop**:

x		$\frac{3}{4}$	
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{25}{8}$	$\nearrow$

2.8.3 Derdegraadsfuncties

Functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ met $a \neq 0$ worden **derdegraadsfuncties** genoemd. Dit zijn veeltermfuncties van graad drie.

Aangezien er veel verschillende derdegraadsfuncties zijn (afhankelijk van de vorm, de ligging, het aantal nulpunten,...) kiezen we ervoor om geen algemeen voorbeeld te geven, maar deze functie te bespreken aan de hand van twee voorbeelden. Merk op dat het domein en bereik voor elke derdegraadsfunctie $\mathbb{R}$ is.

Voorbeeld 2.8.3. Stel $f(x) = x^3$.

(a) **Nulpunt**: $x = 0$

(b) **Tekentabel:**

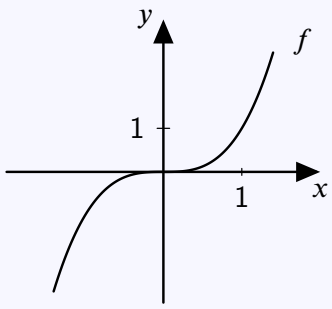
x		0	
$f(x)$	$-$	0	$+$

(c) **Functieverloop:**

x	
$f(x)$	$\nearrow$

CC BY-NC-SA 4.0

2.8 Veeltermfuncties



Voorbeeld 2.8.4. Stel $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 2$.

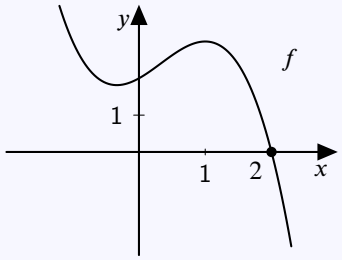
(a) **Nulpunt**: $x = 2$

(b) **Tekentabel:**

x		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$

(c) **Functieverloop:**

x		x_{dal}		x_{top}	
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$



Op de grafiek zien we een lokaal minimum en maximum (er is geen absoluut minimum of maximum). We zullen later nog zien hoe we x_{dal} en x_{top} kunnen vinden met de theorie van afgeleiden.

CC BY-NC-SA 4.0

2.9 Rationale functies

Definitie 2.9.1. Een **rationale functie** is een functie met functievoorschrift $f(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$, met $t(x)$ en $n(x)$ veeltermen en $n(x)$ niet de nulveelterm.

Vooral omwille van mogelijke nulpunten van de noemer treden bij rationale functies enkele nieuwe fenomenen op zoals asymptoten, maar we beperken ons hier tot het domein, de nulpunten en het tekenverloop.

Eigenschap 2.9.1. Enkele eigenschappen van rationale functies:

(a) **Domein**: $\mathbb{R}$ zonder de nulpunten van de noemer

(b) **Nulpunten**: de nulpunten van de teller $t(x)$ die geen nulpunt zijn van de noemer $n(x)$

(c) **Tekenverloop**: maak een tekentabel van zowel de teller als de noemer, en combineer die met de tekenregel. In de omgeving van een nulpunt x_{n_1} van de noemer dat geen nulpunt is van de teller ziet dat er bijvoorbeeld als volgt uit:

x		x_{t_1}		x_{n_1}		x_{t_2}	
$t(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$n(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$	$-$	0	$+$	$\vert$	$-$	0	$+$

De nulpunten van de noemer behoren niet tot het domein en krijgen daarom een '|'.

Voorbeeld 2.9.1. Stel $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{x^2 - 4}$.

(a) **Domein**: $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

(b) **Nulpunten**: enkel $x = -1$, aangezien $x^3 - 2x^2 + x + 4 = (x+1)(x^2 - 3x + 4)$ en $x^2 - 3x + 4 > 0$.

(c) **Tekenverloop**:

x		-2		-1		2	
$x^3 - 2x^2 + x + 4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{x^2 - 4}$	$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$

CC BY-NC-SA 4.0

2.10 Irrationale functies

Definitie 2.10.1. Met $g(x)$ een veelterm van graad minstens één (dus een 'echte' veelterm) is

een	**vierkantswortelfunctie**	een functie met voorschrift $\sqrt{g(x)}$
een	**n-de machtswortelfunctie**	een functie met voorschrift $\sqrt[n]{g(x)}$ $(n \geq 2)$
een	**irrationale functie**	een combinatie met n-de machtswortelfuncties, zoals $\dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2-3}}$ of $\sqrt[3]{x} - \sqrt{x^2+3}$, maar ook bv. $\sqrt{x}$ en $\sqrt[5]{x^2+1}$.

We bekijken enkel het domein, het bereik en de nulpunten van n-de machtswortelfuncties:

Eigenschap 2.10.1. Voor een n-de machtswortelfunctie $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ geldt:

(a) **Domein**: voor even n is $\operatorname{dom} f$ beperkt tot de waarden van x waarvoor $g(x)$ positief is. Voor oneven n is het domein $\mathbb{R}$.

(b) **Bereik**: voor even n is het bereik en deel van $\mathbb{R}^+$ omdat even wortels steeds positief zijn. Voor oneven n zijn ook negatieve functiewaarden mogelijk.

(c) **Nulpunten**: de nulpunten van $g(x)$.

Voorbeeld 2.10.1. $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 13x + 12}$ is een vierkantswortelfunctie.

(a) **Nulpunten**: Via het schema van Horner kunnen we de veelterm ontbinden als

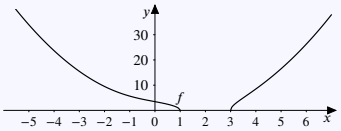
$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 13x + 12 = (x-3)(x-1)(x^2+x+4)$$

Omdat de discriminant $D < 0$ heeft de laatste kwadratische term geen wortels meer. De enige wortels van de vierdegraadsvergelijking zijn dus $x_1 = 1$ en $x_2 = 3$

(b) **Domein**: Het tekenverloop van de veelterm onder de vierkantswortel toont voor welke waarden van x de veelterm positief is en x dus tot het domein behoort.

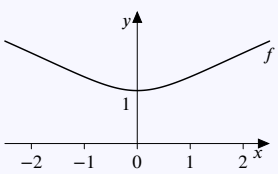
We vinden in dit geval $\operatorname{dom} f =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$, wat je ook kan schrijven als $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus]1, 3[$.

(c) **Bereik**: $\mathbb{R}^+$



Voorbeeld 2.10.2. $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$ is een derdemachtswortelfunctie.

Deze functie heeft **geen nulpunten**, het **domein** is $\mathbb{R}$ en het **bereik** is $[1, +\infty[$.



CC BY-NC-SA 4.0

2.11 Periodiciteit van goniometrische functies

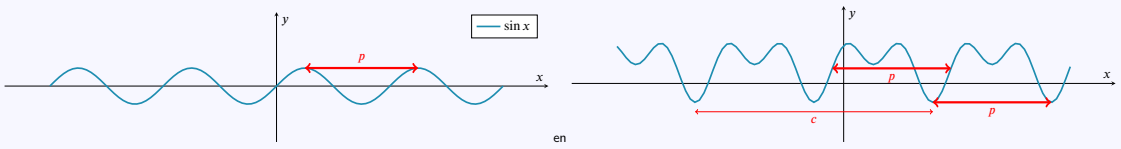
De sinus en cosinus zijn prototypische voorbeelden van zogenaamde *periodieke functies*:

Definitie 2.11.1. Een reële functie is **periodiek** (soms ook **periodisch**) als de grafiek zich na een zekere periode steeds opnieuw herhaalt.

Technisch: als er een getal $c > 0$ bestaat zodat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $f(x+c) = f(x)$.

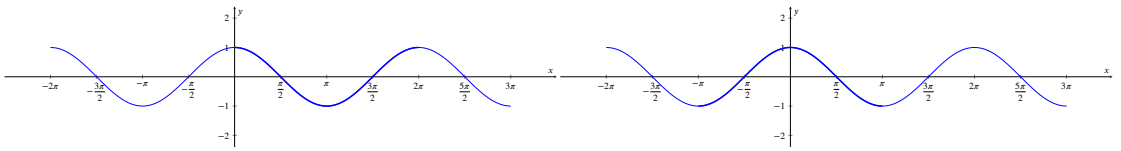
De **periode** p van f is de *kleinste* strikt positieve c waarvoor deze eigenschap geldt.

Voorbeeld 2.11.1.

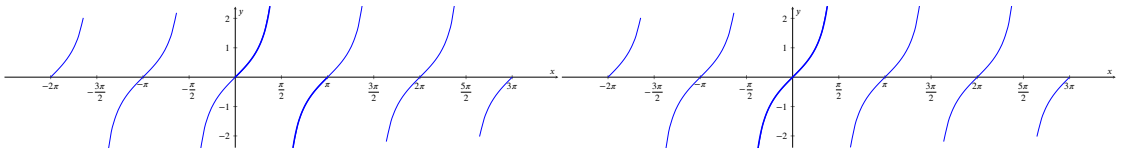


Oefening 2.11.1.

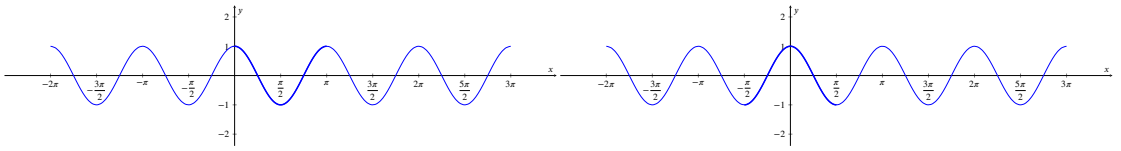
1. De functie $\cos(x)$ heeft periode | 1 | $\pi/2$ | π | 2π | 3π |



2. De functie $\tan(x)$ heeft periode | 1 | $\pi/2$ | π | 2π | 3π |



3. De functie $\cos(2x)$ heeft periode | 1 | $\pi/2$ | π | 2π | 3π |



CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Functies en ongelijkheden

Met f een reële functie en $x, y \in \mathbb{R}$ kan men zich afvragen

$$\text{als } x < y, \text{ geldt dan ook } f(x) < f(y) \text{ ?}$$

Het is duidelijk dat dit zeker *niet altijd* het geval kan zijn, want bijvoorbeeld de functie $x \mapsto -x$ keert de ongelijkheden al om: $x < y \implies -y < -x$.

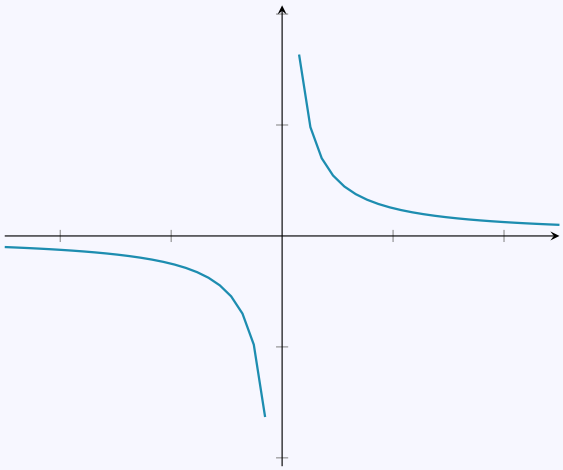
We wensen een functie *stijgend* te noemen als voor grotere waarden van x ook $f(x)$ groter wordt, en *dalend* als voor grotere x de functiewaarden $f(x)$ kleiner worden. Er zijn echter enkele subtiliteiten: een functie zou op een deel van haar domein kunnen stijgen, en ergens anders dalen. En wat doen we met functies die constant zijn? Noemen we die ook stijgend en/of dalend of niet? Volgende definitie legt de preciese betekenis vast op een interval $I \subset \mathbb{R}$:

Definitie 3.1.1. Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een reële functie op een interval $I \subset \mathbb{R}$. Dan geldt:

$$\begin{array}{rcl} f \text{ is strikt stijgend op het interval } I & \iff & \text{voor alle } x, y \in I : (x < y \implies f(x) < f(y)) \\ f \text{ is strikt dalend op het interval } I & \iff & \text{voor alle } x, y \in I : (x < y \implies f(x) > f(y)) \end{array}$$

In eenvoudige gevallen kan het stijgend of dalend zijn van een functie worden afgelezen op de grafiek, en kan de formule uit de definitie worden gebruikt in redeneringen over ongelijkheden.

Voorbeeld 3.1.1. Beschouw de functie $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, waarvoor uit de grafiek blijkt dat ze zowel op $\mathbb{R}^-$ als op $\mathbb{R}^+$ dalend is, maar in het punt 0 van $-\infty$ naar $+\infty$ stijgt.



Dus als a en b *hetzelfde teken* hebben, dan draait voor $\dfrac{1}{a}$ en $\dfrac{1}{b}$ de ongelijkheid *om*:

$$\text{als } a \text{ en } b \text{ hetzelfde teken hebben, dan geldt} \qquad a < b \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

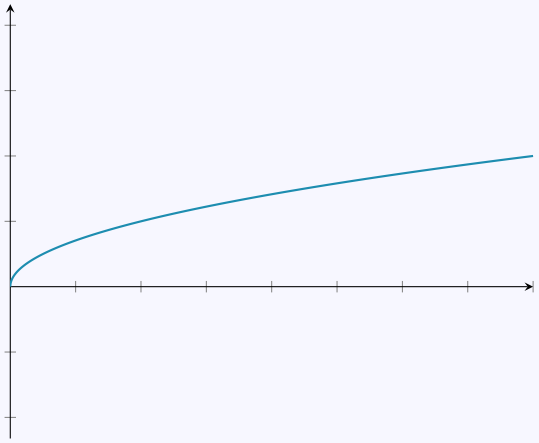
maar uit de grafiek blijkt ook dat de ongelijkheid *niet omdraait* als a en b *verschillen van teken*

$$\text{als } a < 0 < b, \text{ dan geldt} \qquad a < b \iff \frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$

Voorbeeld 3.1.2. Beschouw de functie $f : x \mapsto \sqrt{x}$, met grafiek

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Functies en ongelijkheden



De vierkantswortel is strikt stijgend op $\mathbb{R}^+$, en dus geldt

$$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}.$$

Samengevat levert het strikt stijgend of strikt dalend zijn van functies dus volgende eigenschappen op voor ongelijkheden:

Eigenschap 3.1.1.

(a) Als f een strikt stijgende functie is op een deelverzameling B van het domein, dan geldt voor alle $x, y \in B$

$$x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y).$$

Een strikt stijgende functie behoudt de ongelijkheid: ze is ordebewarend.

(b) Als f een strikt dalende functie is op een deelverzameling B van het domein, dan geldt voor alle $x, y \in B$

$$x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y).$$

Een strikt dalende functie draait de ongelijkheid om: ze is orde-omkerend

Door het strikt stijgen of dalen van bekende functies te bekijken kunnen we onmiddellijk tal van voorbeelden geven van extra rekenregels voor ongelijkheden:

Eigenschap 3.1.2 (Voorbeelden van stijgende en dalende functies)**.**

(a) Als $n \in \mathbb{N}$ en n is even, dan geldt

(i) voor positieve $x, y \in \mathbb{R}$ dat $(x < y \Leftrightarrow x^n < y^n)$,

(ii) voor negatieve $x, y \in \mathbb{R}$ dat $(x < y \Leftrightarrow x^n > y^n)$.

(b) Als $n \in \mathbb{N}$ en n is oneven, dan geldt voor elke $x, y \in \mathbb{R}$ $(x < y \Leftrightarrow x^n < y^n)$.

(c) Als $x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dan geldt $(x < y \Leftrightarrow \sin x < \sin y)$.

(d) Als $x, y \in \mathbb{R}$, dan geldt $(x < y \Leftrightarrow e^x < e^y)$.

(e) Als $x, y \in \mathbb{R}_0^+$, dan geldt $(x < y \Leftrightarrow \ln x < \ln y)$.

Deze regels zijn het onthouden niet waard: als je ze nodig hebt, kan je ze onmiddellijk afleiden uit de

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Functies en ongelijkheden

grafiek.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Voorstellingswijzen van functies met een eindig domein

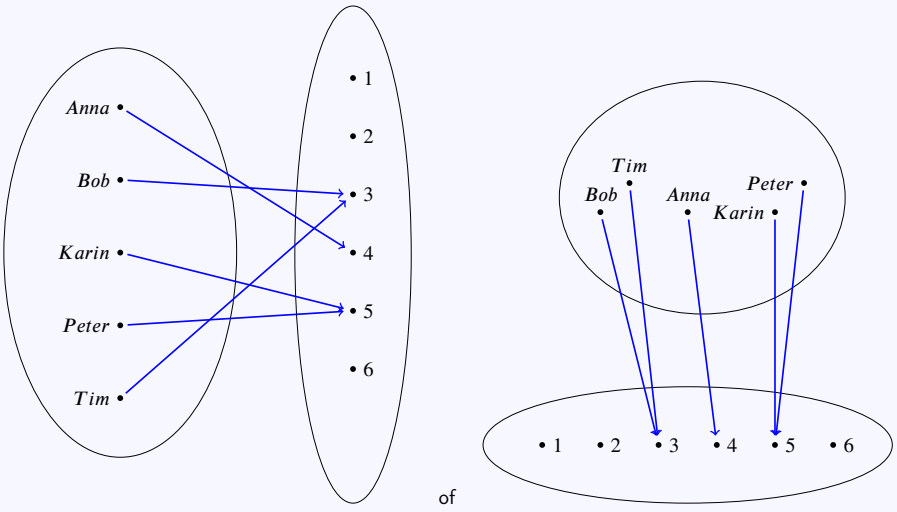
We bespreken enkele manieren om functies te definiëren, voor te stellen of te beschrijven.

Voor (kleine) **eindige** verzamelingen beschikken we over enkele erg concrete manieren om functies te definiëren of voor te stellen. We bespreken ze aan de hand van de functie die aan elke voornaam het aantal letters associeert waaruit die voornaam bestaat. We definiëren de functie op het groepje vrienden $A = \{Anna, Bob, Karin, Peter, Tim\}$. Als codomein nemen we de verzameling $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. De functie f beeldt dus elke naam af op het aantal letters van die naam.

Voorbeeld 3.2.1 (Pijlenvoorstelling of verzamelingvoorstelling)**.** We kunnen de functie

$$f : A = \{Anna, Bob, Karin, Peter, Tim\} \to B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} : x \mapsto \text{ het aantal letters in } x$$

voorstellen met volgende zogenaamde **pijlenvoorstelling**:



De linkse voorstelling is de meest traditionele 'pijlenvoorstelling'. In de rechtse voorstelling is de functie 'van boven naar beneden' voorgesteld in plaats van 'van links naar rechts'. Een ander verschil is dat in de rechtse voorstelling de functie zelf wordt voorgesteld als een zo eenvoudig mogelijke 'projectie', die de bovenste verzameling 'projecteert' op de onderste. Daarbij komen elementen met dezelfde functiewaarde ongeveer boven elkaar te liggen.

Voorbeeld 3.2.2 (Opsomming)**.** We kunnen de functie

$$f : A = \{Anna, Bob, Karin, Peter, Tim\} \to B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} : x \mapsto \text{ het aantal letters in } x$$

ook opschrijven met een **opsomming** van al de functiewaarden:

$$\begin{array}{lcl} f(Anna) & = & 4 \\ f(Bob) & = & 3 \\ f(Karin) & = & 5 \\ f(Peter) & = & 5 \\ f(Tim) & = & 3 \end{array} \quad \text{of} \quad f(x) = \begin{cases} 4 & \text{als } x = Anna \\ 3 & \text{als } x = Bob \\ 5 & \text{als } x = Karin \\ 5 & \text{als } x = Peter \\ 3 & \text{als } x = Tim \end{cases} \quad \text{of} \quad f(x) = \begin{cases} 3 & \text{als } x = Bob \text{ of } x = Tim \\ 4 & \text{als } x = Anna \\ 5 & \text{anders} \end{cases}$$

3.2 Voorstellingswijzen van functies met een eindig domein

Voorbeeld 3.2.3 (Koppels). We kunnen de functie

$$f : A = \{Anna, Bob, Karin, Peter, Tim\} \rightarrow B = \{1,2,3,4,5,6\} : x \mapsto \text{ het aantal letters in } x$$

ook opschrijven als de verzameling van de **koppels** $(x, f(x))$:

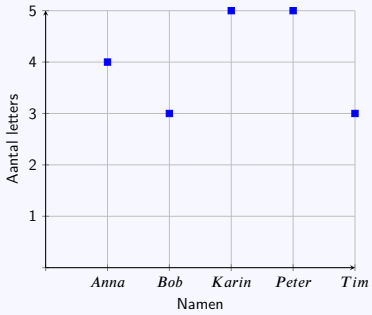
$$\Big\{(Anna,4),(Bob,3),(Karin,5),(Peter,5),(Tim,3)\Big\}$$

Voorbeeld 3.2.4 (Tabel of grafiek). We kunnen de functie

$$f : A = \{Anna, Bob, Karin, Peter, Tim\} \rightarrow B = \{1,2,3,4,5,6\} : x \mapsto \text{ het aantal letters in } x$$

ook voorstellen met een **tabel** of een **grafiek**:

x	$f(x)$
$Anna$	4
Bob	3
$Karin$	5
$Peter$	5
Tim	3

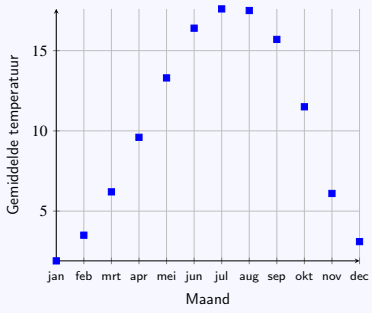


Voorbeeld 3.2.5 (Extra voorbeeld: gemiddelde temperaturen).

De voorstelling als grafiek wordt nuttiger naarmate er meer elementen zijn, met een zekere regelmaat in de functiewaarden.

Beschouw de functie T_{gem} : {jan, feb, mrt, apr, mei, jun, jul, aug,sep, okt, nov, dec} $\rightarrow \mathbb{R}$ die voor elke maand de gemiddelde temperatuur geeft in Ukkel:

x	$T_{gem}(x)$
jan	1.9
feb	3.5
maa	6.2
apr	9.6
mei	13.3
jun	16.4
jul	17.6
aug	17.5
sep	15.7
okt	11.5
nov	6.1
dec	3.1



CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Voorstellingswijzen van reële functies

Functies $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ waarvan zowel de input als de output reële getallen zijn, noemen we *reële functies*, en dergelijke functies kunnen bepaald worden met *formules* en/of *grafieken*.

Functies worden dikwijls gedefinieerd met *formules*, en soms wordt zelfs geen onderscheid meer gemaakt tussen 'een formule voor een bepaalde functie' en 'een functie gedefinieerd door een bepaalde formule'.

Een *formule* is een reeks symbolen die aan bepaalde regels voldoet: $x^2 + a^2x + 7$ is een goede formule, maar $x - +8(a7)$ is dat niet. Een *functie* is een soort machine die een invoer omzet in een uitvoer. Het is wel zo dat veel formules kunnen worden gebruikt om er een functie mee te maken, en dat nogal wat functies door een formule worden berekend.

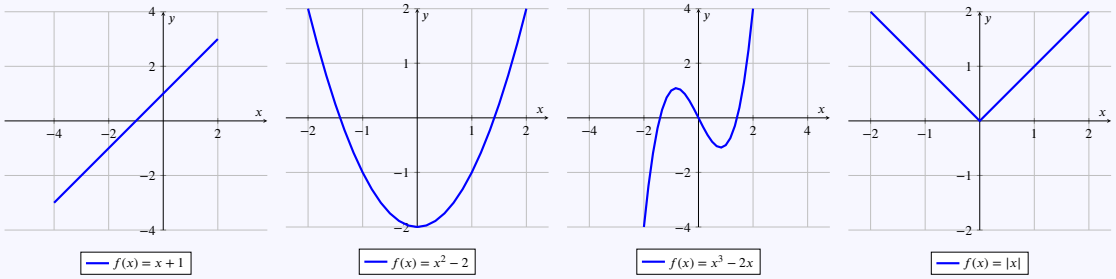
Voorbeeld 3.3.1. Veel functies worden voorgesteld door *formules* die de functiewaarde $f(x)$ *berekenen*:

Functie	Formule	Functie	Formule
'plus 5'	$f(x) = x + 5$	'min 5'	$f(x) = x - 5$
'kwadrateer'	$f(x) = x^2$	'sinus van de dubbele hoek'	$f(x) = \sin(2x)$
'vierkantswortel'	$f(x) = \sqrt{x}$	'vierkantswortel plus acht'	$f(x) = \sqrt{x} + 8$

Pas op: verschillende formules kunnen toch dezelfde functie bepalen. Zo zijn de functies $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2}$ en $f_2 : x \mapsto |x|$ aan elkaar gelijk. En voor sommige functies bestaat er geen (eenvoudige) formule, bijvoorbeeld de functie die elk natuurlijk getal n afbeeldt op het n-de priemgetal.

Voorbeeld 3.3.2 (Grafieken)**.**

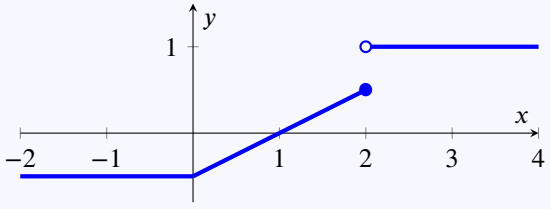
De **grafiek** van een functie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bekomen we door in een vlak met x, y-coördinaten alle punten $(x, f(x))$ te tekenen.



Voorbeeld 3.3.3 (Meervoudig functievoorschrift)**.**

Soms bestaat er geen eenvoudige formule die geldt voor alle x, maar kunnen we het domein opsplitsen over deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ waar er wel eenvoudige formules bestaan:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x < 0 \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$



3.4 Extra voorstellingswijzen van functies

Merk op: deze uitbreiding is geen leerstof. Maar ze is desalniettemin (of net daarom) ook interessant...

De grafiek van een functie is in een aantal gevallen een bijzonder handig middel om de functie beter te begrijpen. Maar, in sommige gevallen zijn andere grafische voorstellingswijzen veel handiger. En voor niet-reële functies werkt een klassieke grafiek meestal niet.

In een aantal gevallen is het verhelderend om een zich een reële functie voor te stellen als een *transformatie* van één rechte: elke x wordt door een functie f verplaatst naar $f(x)$, en daardoor wordt de reële rechte uitgerokken, samengedrukt, verschoven of op nog ingewikkeldere manieren vervormd. Vooral voor transformaties van reële functies en voor het begrijpen van afgeleiden is deze voorstellingswijze soms bijzonder interessant en verhelderend.

We kunnen volgende grafieken als volgt bekijken:

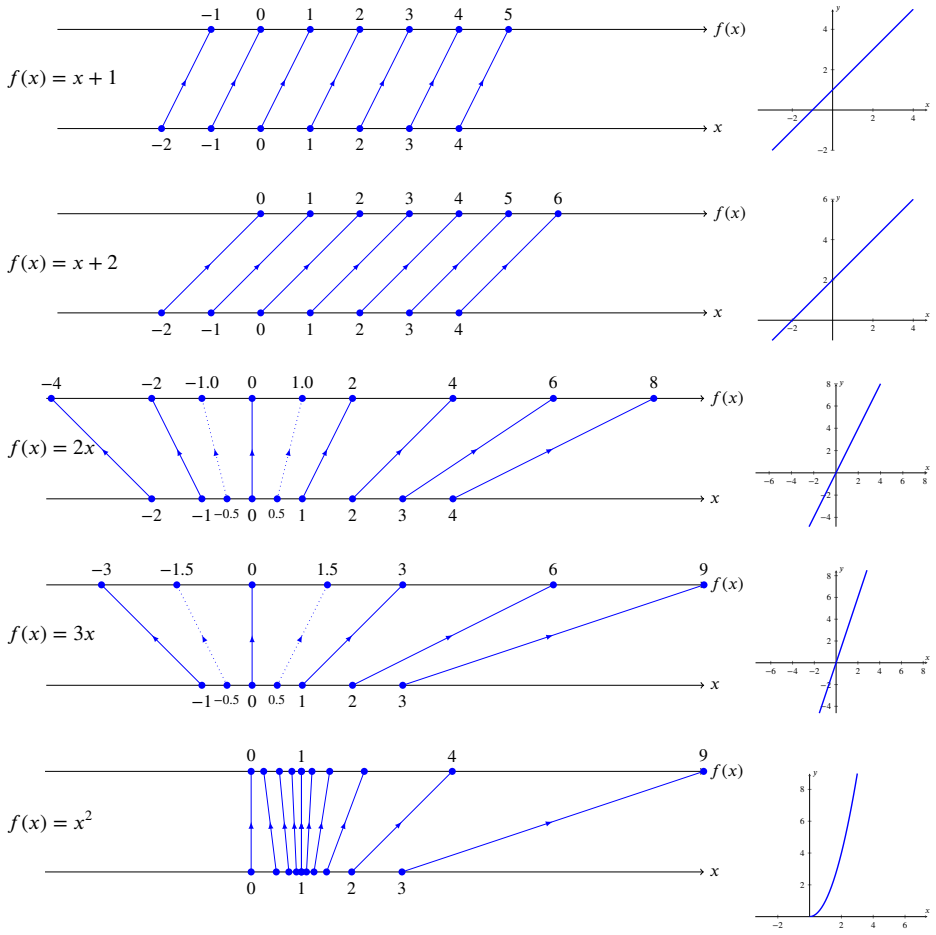
(a) $f(x) = x + 1$: verschuiven met $+1$

(b) $f(x) = 2x$: herschalen met een factor 2

(c) $f(x) = x^2$: alles groter dan 1 wordt steeds groter, alles kleiner dan 1 wordt steeds kleiner. Voor negatieve getallen gebeurt hetzelfde, maar die worden bovendien ook nog 'omgeklapt' naar de positieve halfrechte.

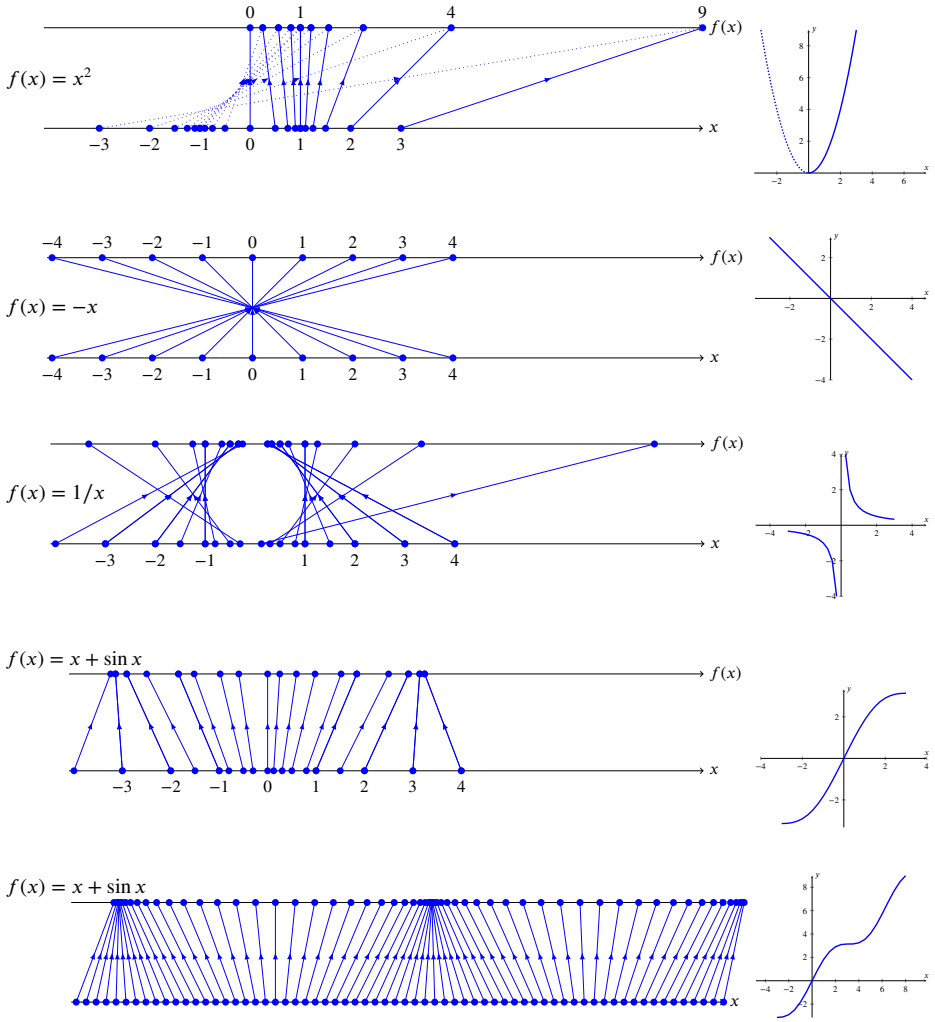
(d) $f(x) = -x$: alles spiegelen rond $x = 0$

(e) $f(x) = 1/x$: als volgt 'omklappen' rond $x = 1$: wat dicht bij 1 klapt rond 1, wat wat verder ligt klapt zodanig omdat wat erg groot is, dicht bij nul komt, en omgekeerd. Deze functie is niet gedefinieerd in $x = 0$: 0 moet naar 'oneindig' worden gestuurd.



CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Extra voorstellingswijzen van functies



CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Intro via machines

Wiskundige functies kunnen beschouwd worden als *machines* die een *input* transformeren in een *output*. We onderzoeken hier hoe we door te vertrekken van erg elementaire basismachines op een nauwkeurige manier meer ingewikkelde functies kunnen construeren en begrijpen.

Dat geeft dan een degelijke basis voor het verder begrijpen van het functiebegrip. Maar bij een eerste lectuur kan het ongetwijfeld wat overweldigend overkomen.

Dit is een *inleidende* uitweiding
en een ongeduldige lezer kan overwegen om
onmiddellijk de definitie te raadplegen.

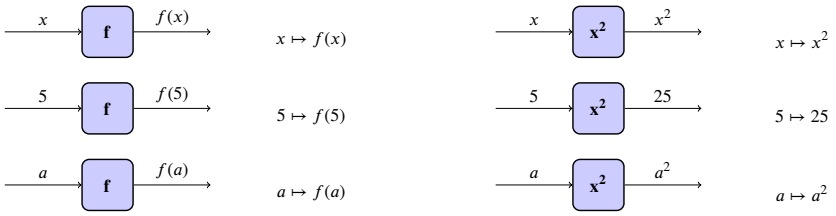
We geven een functie een naam (typisch gebruiken we de letter f), en die functie f verandert een willekeurig ding x van het type A in een ding van het type B dat we $f(x)$ noteren. We stellen dat grafisch als volgt voor:



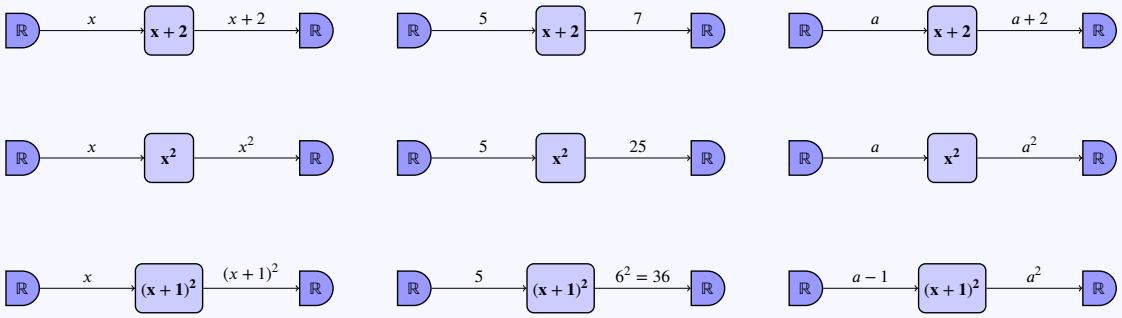
en we schrijven wiskundig:

$$f : A \to B : x \mapsto f(x)$$

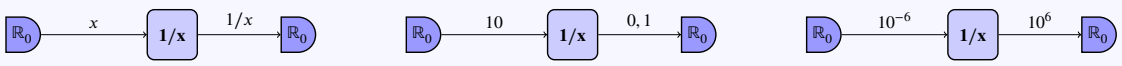
We noemen A het *domein* en B het *codomein*. Als de A en B duidelijk zijn uit de context, schrijven we dikwijls ook korter $f : x \mapsto f(x)$ of zelfs $x \mapsto f(x)$. Ook in de grafische voorstelling laten we dan de A en B weg.



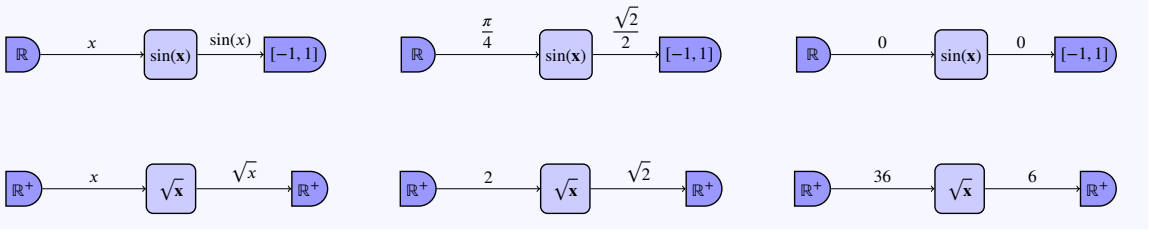
Voorbeeld 3.5.1 (Eenvoudige voorbeelden van functies)**.**



Voorbeeld 3.5.2 (Iets minder eenvoudige voorbeelden van functies)**.**



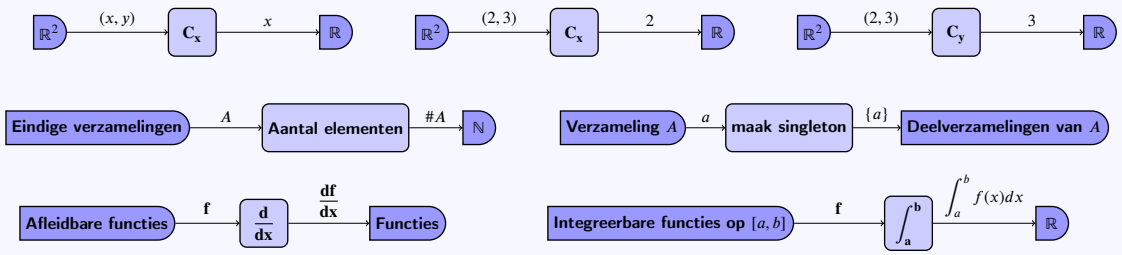
3.5 Intro via machines



Voorbeeld 3.5.3 (Iets minder wiskundige voorbeelden van functies)**.**



Voorbeeld 3.5.4 ((Uitbreiding) Veel minder eenvoudige voorbeelden van functies)**.**

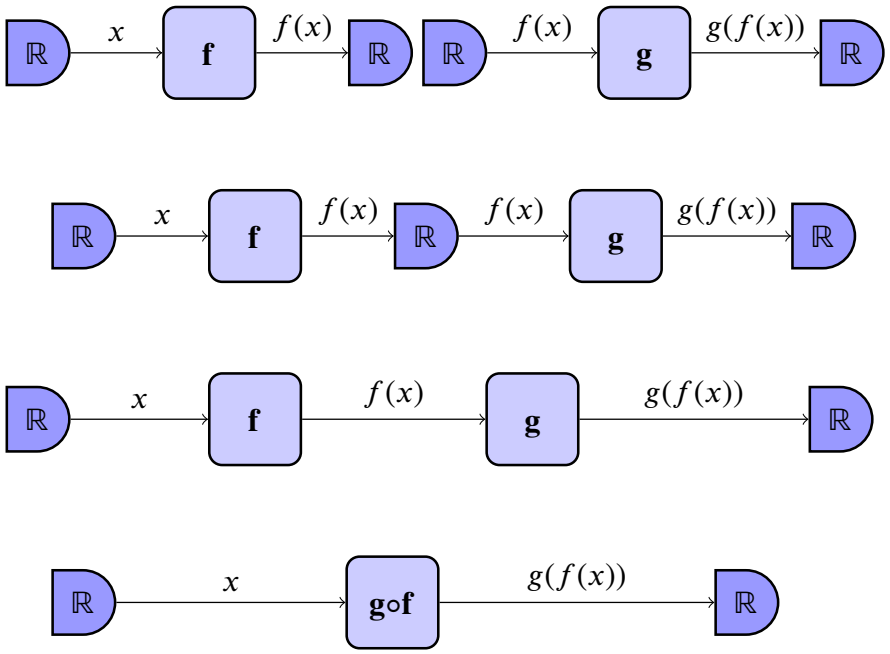


Terwijl dergelijke functie-machines dus allerlei bewerkingen uitvoeren met *elementen* van verzamelingen, willen we onmiddellijk ook al een stap verder gaan: we willen ook met *de functie-machines zelf eenvoudige bewerkingen kunnen uitvoeren*. In de machine-voorstelling is de meest eenvoudige constructie het achter elkaar plaatsen van twee machines. Wiskundig heet dat het *samenstellen* van functies. Dat kan natuurlijk alleen maar als de output van de eerste machine kan dienen als input voor de tweede machine. Met wiskundige terminologie zeggen we dat het codomein van de eerste functie een deelverzameling moet zijn van het domein van de tweede functie.

Grafisch wordt dit weergegeven door het domein van de tweede functie *over* het codomein van de eerste te schuiven, zoals hieronder weergegeven. De samengestelde functie levert dus een nieuwe machine op.

CC BY-NC-SA 4.0

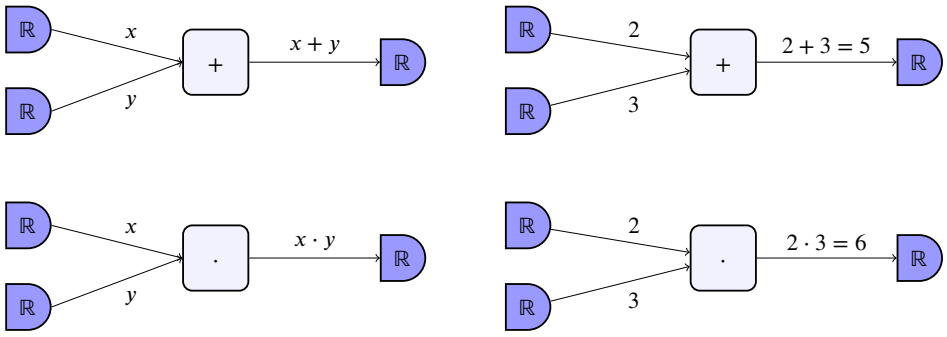
3.5 Intro via machines



Het samenstellen van functies betekent dus het vervangen door één nieuwe machine, namelijk de (nieuwe) 'samengestelde functie', van twee na elkaar geplaatste bestaande machines, namelijk de (oude) 'samenstellende functies'. De nieuwe machine doet gewoon het werk van de twee oude in één keer.

We kunnen ook machines proberen maken voor het optellen en vermenigvuldigen van getallen, maar dat is wat complexer. Dergelijkes machines hebben inderdaad *twee* inputs nodig, namelijk de twee termen of de twee factoren van de optelling of de vermenigvuldiging.

Grafisch wordt dit



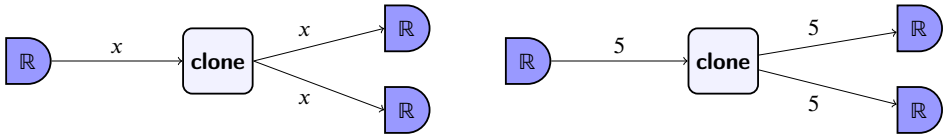
en wiskundig schrijven we dat met koppels (dit is voorlopig niet zo belangrijk, en kan worden overgeslagen):

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y$$

en

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x \cdot y$$

Om technische redenen voeren we ook een 'clone-machine' in, waarmee we een input kunnen clonen. In dergelijke machine stoppen we dus één x, en er komen -op twee verschillende plaatsen- telkens een kopie van die x uit.



CC BY-NC-SA 4.0

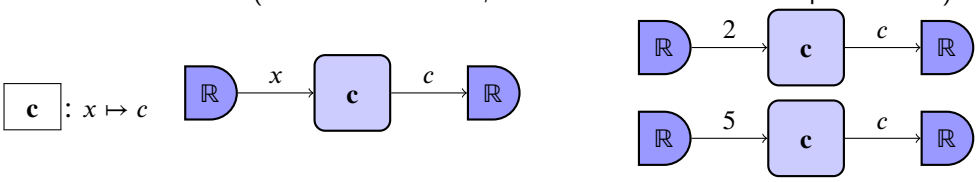
3.5 Intro via machines

Veel van de functies die in de praktijk voorkomen zijn opgebouwd uit eenvoudige basisfuncties.

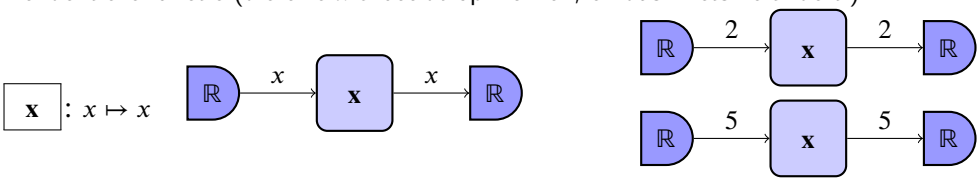
In deze module leren we 'bouwen met functies', net zoals je kan bouwen met Lego of Playmobil. Om zo duidelijk mogelijk onderscheid te maken tussen een functie en de waarde van een functie, zullen we in dit deel een functie steeds noteren als $\boxed{\mathbf{f}}$. De 'actie' van de functie op een input x_0 wordt dan $\boxed{\mathbf{f}}(x_0)$ en de 'output', dus het resultaat, van de functie wordt $f(x_0) = f|_{x=x_0}$. Er geldt dus dat $\boxed{\mathbf{f}}(x_0) = f(x_0)$, maar het linkerlid legt de nadruk op de actie van de functie, en het rechterlid op het resultaat.

We vertrekken met slechts twee types basisfuncties:

(a) De constante functies (één voor elke $c \in \mathbb{R}$, die telkens elke x afbeeldt op dezelfde c):



(b) De identieke functie (die elke x afbeeldt op zichzelf, en dus 'niets verandert'):



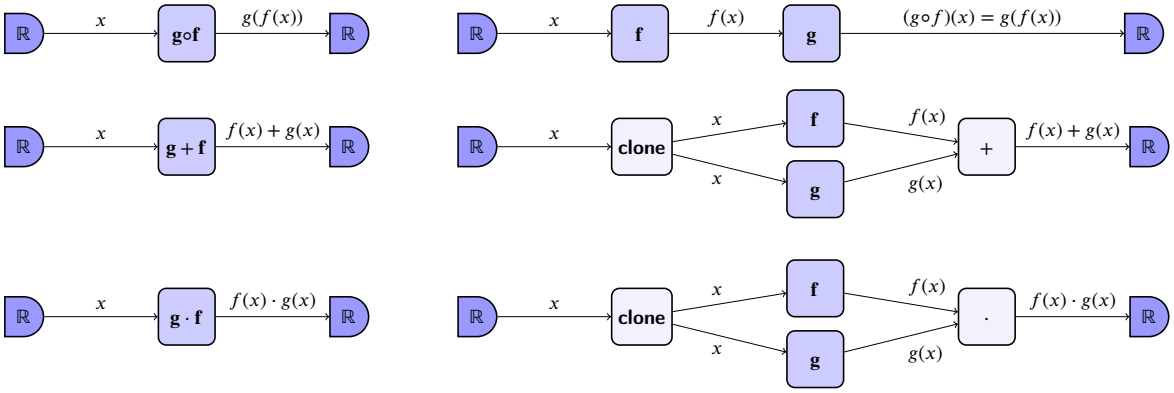
en drie manieren waarop we twee gegeven functies $\boxed{\mathbf{f}}$ en $\boxed{\mathbf{g}}$ kunnen combineren:

(a) $\boxed{\mathbf{g+f}} : x \mapsto g(x) + f(x)$ (optelling, we lezen g *plus* f)

(b) $\boxed{\mathbf{g \cdot f}} : x \mapsto g(x) \cdot f(x)$ (vermenigvuldiging, we lezen g *maal* f)

(c) $\boxed{\mathbf{g \circ f}} : x \mapsto g(f(x))$ (samenstelling, we lezen g *na* f)

Grafisch betekent dit dat we met twee gegeven machines er drie nieuwe kunnen bouwen:



Opmerking 3.5.1.

- Er is een inherente complicatie in verband met de *volgorde* in de samenstelling van functies: als we *eerst* f nemen, en daarna g, dan is het resultaat dus $g(f(x))$ waarbij nu jammer genoeg

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Intro via machines

de g *eerst* staat. Dus: bij het samenstellen van functies is er altijd een mogelijke verwarring met de volgorde.

Het probleem zou niet bestaan als we functiewaarden zouden noteren met zogenaamde postfix notatie: het resultaat van de functie f op het element x wordt dan genoteerd als $(x)f$, en het resultaat van g wordt dan $((x)f)g$. Dat zou in deze context veel handiger zijn, maar de westerse cultuur heeft doorheen de geschiedenis voor de andere conventie gekozen...

- Bij de optelling en de vermenigvuldiging van reële functies is de volgorde niet belangrijk:

$$\boxed{\mathbf{f+g}} = \boxed{\mathbf{g+f}} \quad \text{en} \quad \boxed{\mathbf{f\cdot g}} = \boxed{\mathbf{g\cdot f}},$$

maar bij de samenstelling in het algemeen wel, want meestal is

$$\boxed{\mathbf{f\circ g}} \neq \boxed{\mathbf{g\circ f}}.$$

We zeggen dat de optelling en de vermenigvuldiging *commutatief* zijn, maar de samenstelling niet.

Met deze eerder elementaire ingrediënten kunnen we nu verrassend complexe en intrigerende constructies opzetten.

We beginnen echter met een valse start: wat als we enkel de functies $\boxed{\mathbf{c}}$ met verschillende c's met elkaar combineren? Dat is erg *on*interessant, want we kunnen absoluut niets nieuws bouwen. Inderdaad, optellen, vermenigvuldigen en samenstellen van *constante* functies levert steeds enkel *constante* functies op:

(a) $\boxed{\mathbf{2}} + \boxed{\mathbf{5}} : x \mapsto 2+5=7$, dus $\boxed{\mathbf{2}} + \boxed{\mathbf{5}} = \boxed{\mathbf{7}}$

(b) $\boxed{\mathbf{2}} \cdot \boxed{\mathbf{5}} : x \mapsto 2\cdot 5=10$, dus $\boxed{\mathbf{2}} \cdot \boxed{\mathbf{5}} = \boxed{\mathbf{10}}$

(c) $\boxed{\mathbf{2}} \circ \boxed{\mathbf{5}} : x \mapsto \boxed{\mathbf{2}}(5)=2$, dus $\boxed{\mathbf{2}} \circ \boxed{\mathbf{5}} = \boxed{\mathbf{2}}$

Maar als we hetzelfde proberen met de identieke functie $\boxed{\mathbf{x}}$, wordt het wel interessanter:

(a) $\boxed{\mathbf{x}} + \boxed{\mathbf{x}} : x \mapsto x+x=2x$, dus $\boxed{\mathbf{2x}} \overset{\text{def}}{=} \boxed{\mathbf{x}} + \boxed{\mathbf{x}}$

(b) $\boxed{\mathbf{x}} \cdot \boxed{\mathbf{x}} : x \mapsto x\cdot x=x^2$, dus $\boxed{\mathbf{x^2}} \overset{\text{def}}{=} \boxed{\mathbf{x}} \cdot \boxed{\mathbf{x}}$

(c) $\boxed{\mathbf{x}} \circ \boxed{\mathbf{x}} : x \mapsto \boxed{\mathbf{x}}(x)=x$, dus $\boxed{\mathbf{x}} \circ \boxed{\mathbf{x}} = \boxed{\mathbf{x}}$

Dus: *optellen* en *vermenigvuldigen* van de identieke functie levert nieuwe functies op (namelijk $x \mapsto 2x$ en $x \mapsto x^2$), maar het *samenstellen* van identieke functies levert opnieuw de identieke functie $x \mapsto x$ op.

Nog meer onderling combineren van constante en identieke functies levert ook het volgende op:

(a) $\boxed{\mathbf{x}} + \boxed{\mathbf{5}} : x \mapsto x+5$, dus $\boxed{\mathbf{x+5}} \overset{\text{def}}{=} \boxed{\mathbf{x}} + \boxed{\mathbf{5}}$

(b) $\boxed{\mathbf{5}} \cdot \boxed{\mathbf{x}} : x \mapsto 5\cdot x$, dus $\boxed{\mathbf{5x}} \overset{\text{def}}{=} \boxed{\mathbf{5}} \cdot \boxed{\mathbf{x}}$

(c) $\boxed{\mathbf{x}} \cdot \boxed{\mathbf{5}} : x \mapsto x\cdot 5=5\cdot x$, dus $\boxed{\mathbf{x}} \cdot \boxed{\mathbf{5}} = \boxed{\mathbf{5x}}$

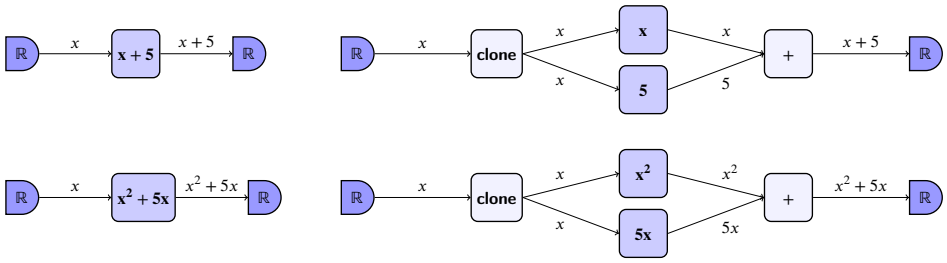
CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Intro via machines

(d) $\boxed{\mathbf{x^2}} \circ \boxed{\mathbf{x+2}}$: $x \mapsto \boxed{\mathbf{x^2}}(x+2) = (x+2)^2 = x^2+4x+4$, dus $\boxed{\mathbf{(x+2)^2}} \overset{\text{def}}{=} \boxed{\mathbf{x^2}} \circ \boxed{\mathbf{x+2}}$

(e) $\boxed{\mathbf{-1}} \cdot \boxed{\mathbf{x}}$: $x \mapsto -1 \cdot x = -x$, dus $\boxed{\mathbf{-x}} \overset{\text{def}}{=} \boxed{\mathbf{-1}} \cdot \boxed{\mathbf{x}}$

Grafisch komt dat neer op volgende schema's om meer ingewikkelde functies te bouwen:



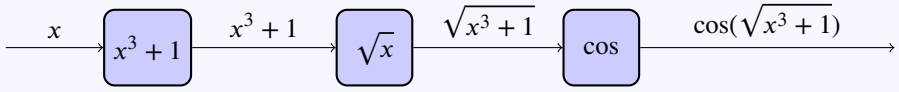
Voorbeeld 3.5.5. We kunnen ingewikkelde functies schrijven als combinaties van basisfuncties:

- $\boxed{\mathbf{3x+2}} = \boxed{\mathbf{3}} \cdot \boxed{\mathbf{x}} + \boxed{\mathbf{2}}$
- $\boxed{\mathbf{x^2+2}} = \boxed{\mathbf{x^2}} + \boxed{\mathbf{2}} = \boxed{\mathbf{x}} \cdot \boxed{\mathbf{x}} + \boxed{\mathbf{2}}$
- $\boxed{\mathbf{(x-1)^2+3}} = \boxed{\mathbf{(x-1)^2}} + \boxed{\mathbf{3}} = (\boxed{\mathbf{x^2}} \circ \boxed{\mathbf{x-1}}) + \boxed{\mathbf{3}}$
  $= (\boxed{\mathbf{x}} \cdot \boxed{\mathbf{x}}) \circ (\boxed{\mathbf{x}} + \boxed{\mathbf{-1}}) + \boxed{\mathbf{3}}$

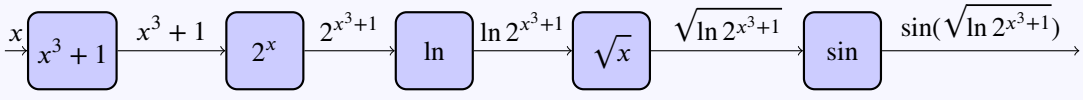
Wat is het punt van deze hele uitleg? Mogelijk helpt het om schrik te overwinnen voor sommigen van ingewikkelde uitdrukkingen, die we 'van binnen naar buiten' kunnen lezen (van links naar rechts in deze machine-voorstelling), of 'van buiten naar binnen' (van rechts naar links in deze machine-voorstelling).

Voorbeeld 3.5.6.

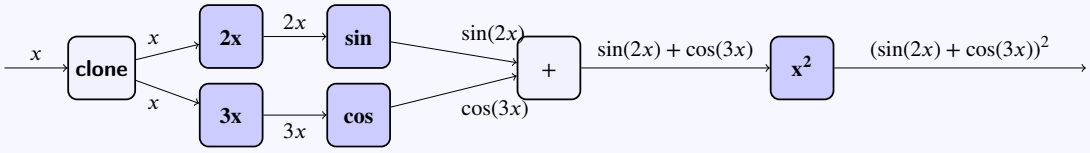
1. $\cos(\sqrt{x^3+1})$



2. $\sin(\sqrt{\ln 2^{x^3+1}})$



3. $(\sin(2x)+\cos(3x))^2$



CC BY-NC-SA 4.0