KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Xoverzicht: Formularia

(Versie 2026/10/26H.4)

Inhoudsopgave

Wiskundige symbolen en notaties

Logica, verzamelingen en orde

Symbool	Betekenis	Voorbeeld
$=$	is gelijk aan	$1+2=3$
$\neq$	is niet gelijk aan	$1+2\neq 4$
$\approx$	is ongeveer gelijk aan	$1/3\approx 0,33$
$>$	groter dan	$4>2$
$<$	kleiner dan	$2<4$
$\geq$	groter dan of gelijk aan	$4\geq 2,\quad 2\geq 2$
$\leq$	kleiner dan of gelijk aan	$1\leq 2,\quad 2\leq 2$
$\{\ldots\}$	verzameling	$\{1,2\},\ \{-1,1\}$
$\in$	element van	$2\in\{0,1,2,3\}$
$\notin$	geen element van	$5\notin\{0,1,2,3\}$
$\subseteq$ of $\subset$	deelverzameling van	$\{1,2\}\subseteq\{0,1,2,3\}$
$\not\subseteq$ of $\not\subset$	geen deelverzameling van	$\{1,5\}\not\subseteq\{0,1,2,3\}$
$\Longrightarrow$	als ..., dan ...	$x=2 \Longrightarrow x\geq 2$
$\Longleftrightarrow$	als en slechts als	$x=2 \Longleftrightarrow x-2=0$

Getallenverzamelingen

$\mathbb{N}$	$=\{0,1,2,3,\ldots\}$	**natuurlijke**	getallen
$\mathbb{Z}$	$=\{\ldots -2,-1,0,1,2,\ldots\}$	**gehele**	getallen
$\mathbb{Q}$	$=\left\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z},n\neq 0\right\}$	**rationale**	getallen (breuken)
$\mathbb{R}$	ook kommagetallen zoals $\sqrt{2}$=1,41... en π=3,14...	**reële**	getallen

Er geldt $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$.

$\mathbb{N}_0$	$=\{1,2,3,\ldots\}$	natuurlijke getallen zonder 0
$\mathbb{R}_0$	$=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 0\}$	reële getallen zonder 0
$\mathbb{R}^+$	$=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$	positieve reële getallen
$\mathbb{R}_0^+$	$=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$	strikt positieve reële getallen
$\mathbb{R}^-$	$=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq 0\}$	negatieve reële getallen
$\mathbb{R}_0^-$	$=\{x\in\mathbb{R}\mid x<0\}$	strikt negatieve reële getallen

Er zijn gelijkaardige notaties voor $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$.

Voorbeelden

$2\in\mathbb{N}$		$\{2\}\subseteq\mathbb{N},\ \{2,3\}\subseteq\mathbb{N}$
$2\in\mathbb{Z},\ -2\in\mathbb{Z}$	$-2\notin\mathbb{N}$	$\{-3\}\subseteq\mathbb{Z},\ \{-2,3\}\subseteq\mathbb{Z},\ \mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$
$1/2\in\mathbb{Q},\ 0,333\ldots\in\mathbb{Q}$	$1/2\notin\mathbb{Z}$	ook $-2\in\mathbb{Q}$
$\sqrt{2}\approx 1,414$	$\sqrt{2}\in\mathbb{R}$	$\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, ook $-2,1/2\in\mathbb{R}$
$\pi\approx 3,14159$	$\pi\in\mathbb{R}$	$\pi\notin\mathbb{Q}$

Terminologie bewerkingen

De	**optelling**	van	**termen** a en b geeft	**som**	$a+b$	
De	**aftrekking**	van	**termen** a en b geeft	**verschil**	$a-b$	
De	**vermenigvuldiging**	van	**factoren** a en b geeft	**product**	$a\cdot b$	(ook ab)
De	**deling**	van	**factoren** a en b geeft	**quotiënt**	$\frac{a}{b}$	(ook a/b of $a:b$, $b\neq 0$)

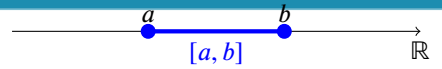
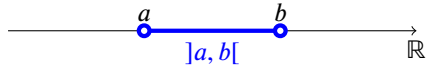
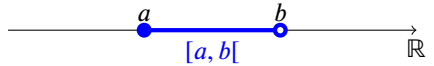
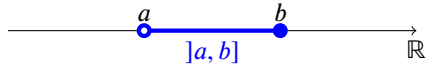
Bij het quotiënt $\frac{a}{b}$ noemen we a ook de **teller** en b de **noemer**.

$a-b$ is ook de som met $-b$, het **tegengestelde** van b : $a-b=a+(-b)$.

$\frac{a}{b}$ is ook het product met b^{-1}, het **inverse** (ook **omgekeerde**) van b: $\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}=a\cdot b^{-1}$.

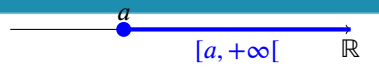
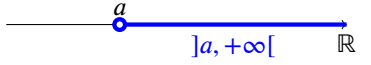
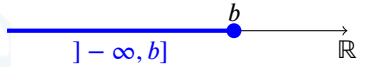
Merk op: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen zijn dus *acties*, en som, verschil, product en quotiënt zijn het *resultaat* van die acties.

Intervallen

$[a,b]$	$=$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\leq b\}$	het **gesloten interval** $[a,b]$	
$]a,b[$	$=$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$	het **open interval** $]a,b[$	
$[a,b[$	$=$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x<b\}$	het **half-open interval** $[a,b[$	
$]a,b]$	$=$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leq b\}$	het **half-open interval** $]a,b]$	

Merk op: een half-open interval wordt soms ook *half-gesloten* genoemd.

Onbegrensde intervallen

$[a,+\infty[$	$=$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\}$	de rechter **halfrechte** $[a,+\infty[$	
$]a,+\infty[$	$=$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$	de open rechter halfrechte $]a,+\infty[$	
$]-\infty,b]$	$=$	$\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq b\}$	de linker halfrechte $]-\infty,b]$	
$]-\infty,b[$	$=$	$\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$	de open linker halfrechte $]-\infty,b[$	

Er geldt $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$. In Engelstalige teksten gebruikt men meestal $[a,b)$ en (a,b) voor $[a,b[$ en $]a,b[$.

Wetenschappelijke notatie

Erg grote of erg kleine getallen worden dikwijls geschreven in de vorm $a\cdot 10^b$, dus met een macht van 10.

$1=1\cdot 10^0$	$3=3\cdot 10^0$	$123=1,23\cdot 10^{-2}=0,123\cdot 10^{-3}$
$10=1\cdot 10^1$	$30=3\cdot 10^1$	$0,123=1,23\cdot 10^{-1}=123\cdot 10^{-3}$
$100=1\cdot 10^2$	$300=3\cdot 10^2$	$12000=12\cdot 10^3=1,2\cdot 10^4$
$0,1=1\cdot 10^{-1}$	$0,3=3\cdot 10^{-1}$	$0,0012=12\cdot 10^{-4}=1,2\cdot 10^{-3}$
$0,01=1\cdot 10^{-2}$	$0,03=3\cdot 10^{-2}$	$3,14\cdot 10^{12}=3.140.000.000$

De exponent geeft het aantal plaatsten aan dat de komma naar rechts (positief) of links (negatief) schuift.

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

Taal van de verzamelingen

Basisbegrippen

$A = \{a, b, c\}$ is de **verzameling** met naam A en **elementen** a, b en c.

$a \in A$ betekent 'a is een element van de verzameling A' of ook 'a behoort tot A'.

$A \subseteq B$ betekent 'A is een **deelverzameling** van B', dus elk element van A is ook een element van B.

$\emptyset = \{\}$ is de **lege verzameling**, dus de verzameling *zonder* elementen.

$\#A$ is het aantal elementen in A. Een verzameling A is **eindig** als $\#A$ eindig is.

Concrete verzamelingen worden bepaald via

opsomming:	$\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$
omschrijving:	$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is even}\}$
constructief:	$\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$
Venndiagram:	variant van opsomming, zie verder

Een rechte streep | tussen de accolades lees je als 'waarvoor geldt dat'.

Een **singleton** $\{a\}$ is een verzameling met één element, een **paar** $\{a, b\}$ heeft twee elementen.

Voorbeeld: $a \in \{a, b, c\}, d \notin \{a, b, c\}$, $\{a, c\} \subseteq \{a, b, c\}$, maar $\{1, 5\} \not\subseteq \{1, 2, 3\}$. $\#\{a, b, c\} = 3$.

Volgorde en herhaling hebben geen belang: $\{a, b, c\} = \{c, b, a\} = \{a, a, a, a, b, b, c\}$.

Eigenschappen

Als A, B en C deelverzamelingen zijn van een universele verzameling U, dan geldt:

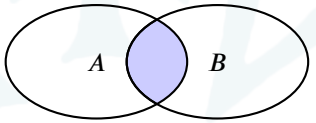
(a)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ en $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	(associativiteit)
(b)	$A \cup B = B \cup A$ en $A \cap B = B \cap A$	(commutativiteit)
(c)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ en $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(distributiviteit)
(d)	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ en $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	(wetten van De Morgan)
(e)	$A \cup A^c = U$ en $A \cap A^c = \emptyset$	(complementering)
(f)	$(A^c)^c = A$	(dubbel complement)

Bekende getallenverzamelingen $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{N}_0$	strikt positieve getallen	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\}$
$\mathbb{R}^+$	positieve reële getallen	$\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
$\mathbb{R}_0^+$	strikt positieve reële getallen	$\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid x \neq 0\}$
$]2, 3[$	open interval van 2 tot 3	$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$
$[2, 3]$	gesloten interval van 2 tot 3	$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$
$]2, 3]$	half-open interval van 2 tot 3	$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3\}$

Basisbewerkingen met verzamelingen

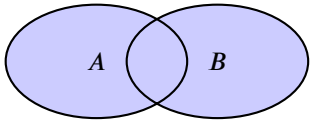
– $A \cap B$, de **doorsnede** van A en B, is de verzameling van elementen die behoren tot A **en** B:



$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$

We noemen twee verzamelingen A en B **disjunct** als $A \cap B = \emptyset$.

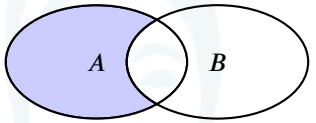
– $A \cup B$, de **unie** of **vereniging** van A en B, is de verzameling van de elementen die behoren tot A **of** B:



$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}$

Als $C = A \cup B$ waarbij $A \cap B = \emptyset$, dan noemt men C de **disjuncte unie** van A en B.

– $A \setminus B$, het **verschil** van A en B, is de verzameling van elementen die behoren tot A maar niet tot B:

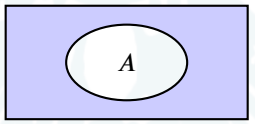


$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\}$

Merk op dat in het algemeen $A \setminus B \neq B \setminus A$ en

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\} = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

– A^c, het **complement** van een deelverzameling A in een universum U is de verzameling van de elementen van U die *niet* tot A behoren. A^c is dus het verschil van U en A:



$A^c = U \setminus A = \{x \in U \mid x \notin A\}$

– $A \times B$, het **cartesiaans product** of de **productverzameling** van A en B, is de verzameling van koppels (= geordende tweetallen) (a, b) met $a \in A$ en $b \in B$: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ en } b \in B\}$.

– $P(A)$, de **machtsverzameling** van A is de verzameling van alle deelverzamelingen van A: $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$.

Formules:
$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$
$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$
$\#P(A) = 2^{\#A}$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

Logica

Propositielogica

Een **propositie** is een zinvolle mededelende volzin, die ofwel *waar* (w) ofwel *onwaar* (o) is.

De propositielogica bestudeert de waarheidswaarde van als volgt samengestelde proposities:

p	q	niet p $\neg p$	niet q $\neg q$	p of q $p \vee q$	p en q $p \wedge q$	als p dan q $p \implies q$	p asa q $p \iff q$	contrapositie $\neg q \implies \neg p$	def $\neg p \vee q$
w	w	o	o	w	w	w	w	w	w
w	o	o	w	w	o	o	o	o	o
o	w	w	o	w	o	w	o	w	w
o	o	w	w	o	o	w	w	w	w

Men noemt $p \wedge q$ de **conjunctie**, $p \vee q$ de **disjunctie**, $p \implies q$ de **implicatie**, $p \iff q$ de **equivalentie** van p en q.

Twee equivalente proposities p en q zijn tegelijk waar of vals, en hebben dus dezelfde betekenis.
We lezen $p \iff q$ als 'p als en slechts als q' en korten dat soms af als 'p asa q'.
Men zegt ook dat p **een nodige en voldoende voorwaarde** is voor q.

In $p \implies q$ noemen we p het **antecedens** of de **hypothese**, en q het **consequens** of de **conclusie**.
Men noemt p ook een **voldoende voorwaarde** voor q, en q een **nodige voorwaarde** voor p.

Een **tautologie** is een bewering die altijd waar is, zoals $p \vee \neg p$: ofwel is p waar, ofwel niet.
Een **contradictie** is een bewering die nooit waar is, zoals $p \wedge \neg p$: p is tegelijk waar en niet waar.

Als typisch voorbeeld zijn uitspraken onderling equivalent

Als het regent word ik nat
Als ik niet nat wordt, dan regent het niet
Of regent het niet, of ik word nat,

maar die zijn niet equivalent met

Als het niet regent word ik niet nat (want ik kan aan het zwemmen zijn)
Als ik nat word, dan regent het (wegens datzelfde zwemmen).

De uitspraak 'als het regent, dan word ik nat' *beweert helemaal niets* als het niet regent.

Eigenschappen van proposities

$\neg(\neg p)$	$\Leftrightarrow$	p	*dubbele negatie*
$\neg(p \wedge q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	*negatiewet van De Morgan voor* $\wedge$
$\neg(p \vee q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$	*negatiewet van De Morgan voor* $\vee$
$(p \Rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg p) \vee q)$	*definitie van* $\Rightarrow$
$(p \Rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg q \Rightarrow \neg p)$	***contrapositie***
$p \wedge (q \vee r)$	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	*distributiviteit van* $\wedge$ *t.o.v.* $\vee$
$p \vee (q \wedge r)$	$\Leftrightarrow$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	*distributiviteit van* $\vee$ *t.o.v.* $\wedge$
q	$\Leftrightarrow$	$(\neg q \Rightarrow (p \wedge \neg p))$	***redenering uit het ongerijmde***
$(p \vee q) \Rightarrow r$	$\Leftrightarrow$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	***gevalsonderscheid***
$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$\Rightarrow$	$(p \Rightarrow r)$	*transitiviteit van* $\Rightarrow$

Kwantorenlogica

Een **predicaat** $p(a)$ is een bewering die afhangt van een zogenaamde **vrije variabele** a, die kan gebonden worden door een **universele kwantor** $\forall$, een **existentiële kwantor** $\exists$ of een **uniciteitskwantor** $\exists!$.

$\forall a \in A : p(a)$	*voor elke* a in A geldt $p(a)$
$\exists a \in A : p(a)$	*er bestaat (minstens) eena* in A waarvoor $p(a)$ geldt
$\exists! a \in A : p(a)$	*er bestaat precies ééna* in A waarvoor $p(a)$ geldt

Eigenschappen van kwantoren

$$(n1) \quad \neg(\forall x \in X : p(x)) \iff \exists x \in X : \neg p(x)$$
$$(n2) \quad \neg(\exists x \in X : p(x)) \iff \forall x \in X : \neg p(x)$$

$$(v1) \quad \forall x \in X : \forall y \in Y : p(x,y) \iff \forall y \in Y : \forall x \in X : p(x,y)$$
$$(v2) \quad \exists x \in X : \exists y \in Y : p(x,y) \iff \exists y \in Y : \exists x \in X : p(x,y)$$
$$(v3) \quad \exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y) \implies \forall y \in Y : \exists x \in X : p(x,y)$$
$$\cancel{(v4)} \quad \forall y \in Y : \exists x \in X : p(x,y) \not\implies \exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y)$$

Voorbeelden

We lezen $\neg\forall x : \text{gebuisd}(x)$, of equivalent $\exists x : \text{geslaagd}(x)$ als:

Niet iedereen is gebuisd
Er is iemand die niet gebuisd is
Er is iemand geslaagd

We lezen $\exists x : \neg\text{geslaagd}(x)$, of equivalent $\neg\forall x : \text{geslaagd}(x)$ als:

Er is iemand die niet geslaagd is
Er is iemand gebuisd
Het is niet het geval dat iedereen geslaagd is
Niet iedereen is geslaagd

en ook $\forall p \in P, \exists d \in D : \text{past}(p,d)$:

Voor elk potje is er een dekseltje dat past
Op elk potje past een dekseltje
Voor geen enkel potje zijn alle dekseltjes niet-passend

of ook $\exists d \in D, \forall p \in P : \text{past}(p,d)$:

Er is een dekseltje dat op elk potje past
Er is een universeel bruikbaar dekseltje

Als een dergelijk universeel dekseltje bestaat, bijvoorbeeld van rubber, dan is er zeker ook voor elke potje een dekseltje dat past, namelijk dat universeel-passend dekseltje!

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

Bewijstechnieken

Direct bewijs

Begin bij het gegeven, reken/vereenvoudig/redeneer tot aan het te bewijzen.

Toon aan dat: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Bewijs: $(a+b)^2 \overset{\text{def. macht}}{=} (a+b)(a+b) \overset{\text{distrib.}}{=} a(a+b) + b(a+b) \overset{\text{distrib.}}{=} a^2 + ab + ba + b^2 \overset{\text{commut.}}{=} a^2 + 2ab + b^2$. ■

Er zijn geen vaste procedures voor een 'direct bewijs', dikwijls is er wat ceativiteit nodig.

Ook 'bewijs per keten van gelijkheden', vgl 'keten van implicaties/equivalenties' infra.

'$\exists$' of '$\neg\forall$': bewijs per (tegen-)voorbeeld

Toon aan dat: $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 4$ *Bewijs*: Neem $x = 2 \in \mathbb{R}$. ■

Toon aan dat: $\neg\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ *Bewijs*: Neem $0 \in \mathbb{R}$ en $0^2 = 0 \not> 0$. ■

Merk op: '$\forall$' of '$\neg\exists$' kan je **niet** bewijzen per voorbeeld.

'$\forall$': bewijs per generiek element

De bewering $\forall a \in A : p(a)$ kan je bewijzen door $a \in A \implies p(a)$ aan te tonen.

Toon aan dat: $\forall x \in \mathbb{Q}_0^+ : \exists y \in \mathbb{Q} : (0 < y < x))$

Bewijs: Kies $x \in \mathbb{Q}_0^+$ willekeurig. Dan is $0 < \frac{x}{2} < x$. ■

Bewijs per gevalsonderscheid

Soms is het nuttig of nodig een bewijs op te splitsen in verschillende gevallen.

Toon aan dat: $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$

Bewijs: Kies $x \in \mathbb{R}$. Er zijn drie mogelijkheden, die we alledrie behandelen:

1) $x = 0$: dan is inderdaad $0^2 = 0 \geq 0$.
2) $x > 0$: dan behoudt vermenigvuldigen met x de orde, en dus is ook $x \cdot x > x \cdot 0$, en dus $x^2 > 0$, en dus $x^2 \geq 0$.
3) $0 > x$: dan keert vermenigvuldigen met x de orde om, en dus is $0 \cdot x < x \cdot x$, en dus $x^2 > 0$, en dus $x^2 \geq 0$.

Omdat dus in alle gevallen het te bewijzen volgt, beeindigt dit het bewijs. ■

$p \iff q$: Bewijs per keten van equivalenties

Via $p \iff p_1 \iff p_2 \iff \ldots \iff p_n \iff q$, met verklaring voor alle equivalenties.

$p \implies q$: Bewijs door extra gegeven p

Implicatie $p \implies q$: voeg p toe als extra gegeven.

Toon aan dat: $x > 1 \implies x^2 > x$ voor $x \in \mathbb{R}$.

Bewijs: Kies $x \in \mathbb{R}$ met $x > 1$. Dan is x zeker positief, en wordt de orde behouden bij vermenigvuldigen met x in linkerlid en rechterlid van de uitdrukking $x > 1$.
Dus is $x \cdot x > 1 \cdot x$, of dus $x^2 > x$. ■

$p \implies q$: Bewijs door contrapositie ($\neg q \implies \neg p$)

Toon aan dat: $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ even $\implies n$ even.

Bewijs via contrapositie, nl. n oneven $\implies n^2$ oneven. Een oneven n is van de vorm $2m+1$, en dan is $n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 2m + 1 = 2(2m^2 + m) + 1$ ook oneven. ■.

Bewijs uit het ongerijmde ($(\neg p \implies (q \wedge \neg q)) \implies p$)

Als uit $\neg p$ een contradictie volgt, dan kan $\neg p$ niet waar zijn, en dus geldt p.
Toon aan dat: $\forall m, n \in \mathbb{N} : 8n - 6m \neq 101$.

Bewijs: Stel dat er toch $m, n \in \mathbb{N}$ bestaan zodat $8n - 6m = 101$.
Dan is het linkerlid $8n - 6m = 2(4n - 3m)$ even, maar het rechterlid oneven.
Dat kan niet, dus is de veronderstelling dat $n, m \in \mathbb{N}$ bestaan fout. ■.

Bewijs per inductie ($\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$)

Stelling: Een bewering $P(n)$ is waar voor elk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}_0$ zodra

(Basisstap) de uitspraak geldt voor het eerste getal: $P(1)$ is waar
(Inductiestap) de uitspraak zodanig is dat voor elke $k \in \mathbb{N}_0$ geldt: als $P(k)$ waar is, dan is ook $P(k+1)$ waar.

Toon aan dat: $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + n$ is even. *Bewijs* (per inductie):

(Basisstap) Voor $n = 0$ is $n^2 + n = 0^2 + 0 = 0$ inderdaad even.

(Inductiestap) Stel dat voor k geldt dat $k^2 + k$ even is. We moeten aantonen dat ook voor $k+1$ geldt dat $(k+1)^2 + (k+1)$ even is. Welnu,

$$(k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = (k^2 + k) + 2(k+1).$$

Wegens de inductiehypothese is $k^2 + k$ even, en $2(k+1)$ is ook even, en dus is ook hun som $(k^2 + k) + 2(k+1)$ even. Hiermee is de inductiestap bewezen.

(Conclusie): Uit basisstap en inductiestap volgt via volledige inductie het te bewijzen. ■

$p \implies q$: Bewijs per keten van implicaties

Via $p \implies p_1 \implies p_2 \implies \ldots \implies p_n \implies q$, met verklaring voor alle implicaties.

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

Algebraïsch rekenen

Breuken Op voorwaarde dat de noemers niet nul zijn geldt:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff ad=bc \qquad \text{(gelijkheid van breuken: kruisproduct)}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{ad+cb}{bd} \qquad \text{(som: op gelijke noemer brengen)}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \text{(som gelijknamige breuken)}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \qquad \text{(product: teller × teller, noemer × noemer)}$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \qquad \text{(quotiënt: vermenigvuldig met omgekeerde)}$$

PAS OP:

$$\frac{3a+2}{2} \neq \frac{3a+\cancel{2}}{\cancel{2}} = 3a \qquad \frac{3a+2}{b+2} \neq \frac{3a+\cancel{2}}{b+\cancel{2}} = \frac{3a}{b}$$

$$\frac{3a+2}{3} \neq \frac{\cancel{3}a+2}{\cancel{3}} = a+2 \qquad \frac{a}{a+3} \neq \frac{a}{a}+\frac{a}{3} = 1+\frac{a}{3}$$

Machten en wortels Op voorwaarde dat de uitdrukkingen onder de wortels positief zijn geldt:

$$a^0 \overset{\text{def}}{=} 1 \qquad (a\in\mathbb{R}_0)$$

$$a^n \overset{\text{def}}{=} \overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n \text{ factoren}} \qquad (a\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}_0)$$

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n=a \qquad (a,b\in\mathbb{R} \text{ als } n \text{ oneven}, \text{ of } a,b\in\mathbb{R}^+ \text{ als } n \text{ even})$$

$$a^{\frac{1}{n}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a} \qquad (a\in\mathbb{R}^+, \text{tenzij } n \text{ oneven})$$

$$a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n} \qquad (a\in\mathbb{R}_0, n\in\mathbb{N})$$

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad \text{(zelfde grondtal)}$$

$$a^n b^n = (ab)^n \qquad \text{(zelfde exponent)}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad \text{(macht van macht)}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Voorbeelden machten: $a^1=a \quad a^2=a\cdot a \quad a^3=a\cdot a\cdot a \quad a^{-1}=\frac{1}{a} \quad a^{-2}=(a^2)^{-1}=\frac{1}{a^2}=\left(\frac{1}{a}\right)^2=(a^{-1})^2$

Rekenen met wortels: $a\sqrt{b}+c\sqrt{b}=(a+c)\sqrt{b}, \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}, \quad (\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}$

Noemer wortelvrij maken: gepaste vermenigvulig teller en noemer: $\sqrt{\frac{32}{12}}=\sqrt{\frac{8\cdot\cancel{4}}{3\cdot\cancel{4}}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Merkwaardige producten en ontbinden in factoren

$$-(a+b) = -a-b \qquad -(a-b)=-a+b \qquad \text{(minteken binnen de haakjes brengen)}$$

$$(a+b)c = ac+bc \qquad a(c+d)=ac+ad \qquad \text{(distributiviteit van } \cdot \text{ t.o.v. } +)$$

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd \qquad \text{(som van alle producten term met term)}$$

$$(a+b)(a+b) = (a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad \text{(kwadraat van een tweeterm)}$$

$$(a-b)(a-b) = (a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \qquad \text{(kwadraat van een tweeterm)}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2=(a-b)(a+b) \qquad \text{(verschil van twee kwadraten)}$$

PAS OP: $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$

Absolute waarde

De **absolute waarde** van een reëel getal $a\in\mathbb{R}$ is $|a| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} a & \text{als } a\geq 0 \\ -a & \text{als } a<0. \end{cases}$

$|x|\geq 0, \quad |x|=|-x|, \quad |x\cdot y|=|x|\cdot|y|$

$|a|<r \iff -r<a<r$ (verwijder absolute waardetekens uit ongelijkheid)

$|a-b|$ is de **afstand** tussen a en b: $|21-27|=6$ is de *afstand* tussen 21 en 27.

PAS OP: $|-x|\neq x$ (want voor $x=-2$ is $|-(-2)|\neq -2$)

Som en verschil met hogere machten (Uitbreiding; *geen* voorkennis)

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 (=(a+b)^2(a+b))$ (derdemacht van tweeterm)

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ (som van derdemachten)

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (verschil van derdemachten)

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+ba^{n-2}+b^2a^{n-3}+\cdots+b^{n-2}a+b^{n-1})$ (verschil n^{de} machten)

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-ba^{n-2}+b^2a^{n-3}-\cdots-b^{n-2}a+b^{n-1})$ (som n^{de} machten, n **oneven**)

$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ (Binomium van Newton)

Voorbeelden

$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ $\qquad \frac{1}{4a}+\frac{b}{8}=\frac{2}{8a}+\frac{ab}{8a}=\frac{2+ab}{8a}$

$x^2-1=(x-1)(x+1)$ $\qquad (-2)^2=(-2)(-2)=4\neq -2^2$

$(x-1)^2=x^2-2x+1$ $\qquad (1+1)^2=2^2=4\neq 1^2+1^2=2$

Niet vereenvoudigbaar: $x^2+1, \quad \sqrt{2}+\sqrt{3}, \quad \sqrt{a+1}, \quad \frac{1}{1+a}, \quad \sqrt{a^2+b^2}$

PAS OP: $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ en $\sqrt{x^2}\neq x$ (als $x<0$) , want

$\sqrt{2+2}\neq\sqrt{2}+\sqrt{2}$ en $\sqrt{(-2)^2}\neq -2$

Maak *gevalsonderscheid* bij $|a|$ en $\sqrt{a}$ als het teken van a niet vast ligt!

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

Functies

Definities functies en veeltermfuncties

Een (reële) **functie** $f : A \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ is een procedure die met elk getal $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ het uniek gedefinieerde getal $f(x)$ associeert.
Een **functievoorschrift** van een functie f is een *formule* die $f(x)$ berekent voor elke $x \in A$.
Het **domein** $\text{dom}\, f$ is de verzameling A van alle mogelijke inputs van de functie.
Het **bereik** $\text{bld}\, f$ is de verzameling van alle mogelijke outputs van de functie.
De **grafiek** van een functie is de verzameling $\{(x, f(x)) | x \in A)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, en is typisch een kromme in het xy-vlak die elke verticale rechte hoogstens één keer snijdt.
Een **veeltermfunctie** is een functie waarvan het voorschrift een veelterm is, dus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, met $a_n, a_{n-1}, \ldots a_0 \in \mathbb{R}$.
De **graad** van de veelterm (en van de veeltermfunctie) is de hoogste macht die voorkomt (dus n als $a_n \neq 0$).
Een **constante functie** is een functie die elke $x \in \mathbb{R}$ afbeeldt op eenzelfde reëel getal c. De grafiek is een horizontale rechte op hoogte $y = c$.
De **nulfunctie** is de constante functie die elke $x \in \mathbb{R}$ afbeeldt op 0. De graad van de nulfunctie is onbepaald, alle andere constante functies zijn veeltermfuncties van graad 0.
Een **eerstegraadsfunctie** is een veeltermfunctie van graad één, dus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$, met **nulpunt** (of nulwaarde) $x = -\frac{b}{a}$.
De grafiek is een rechte met vergelijking $y = ax + b$ en helling of **richtingscoëfficiënt** of rico a, en snijpunt met de y-as in $(0, b)$.
Een **tweedegraadsfunctie** is een veeltermfunctie van graad twee, dus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c$, met $a, b, c \in \mathbb{R}$, en $a \neq 0$.

De nulpunten zijn $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ als de zogenaamde **discriminant** $D = b^2 - 4ac$ positief is. Als de discriminant strikt negatief is zijn er geen nulpunten.

De nulpunten $x_{1,2}$ leveren de ontbinding $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

De grafiek is een **dalparabool** als $a > 0$ en een **bergparabool** als $a < 0$, telkens met **top** in $\left(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a})\right)$.

Samenstellen van functies

Bij het **samenstellen van functies** wordt de output van één functie de input van een volgende functie:

$$f \circ g : x \mapsto f(g(x)), \quad \text{waarbij} \quad (f \circ g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(g(x)) \quad \text{(lees als: } f \textit{ na } g \text{ van } x\text{)}.$$

Ingewikkelde functies worden opgebouwd via som, product en samenstelling van eenvoudigere basisfuncties.

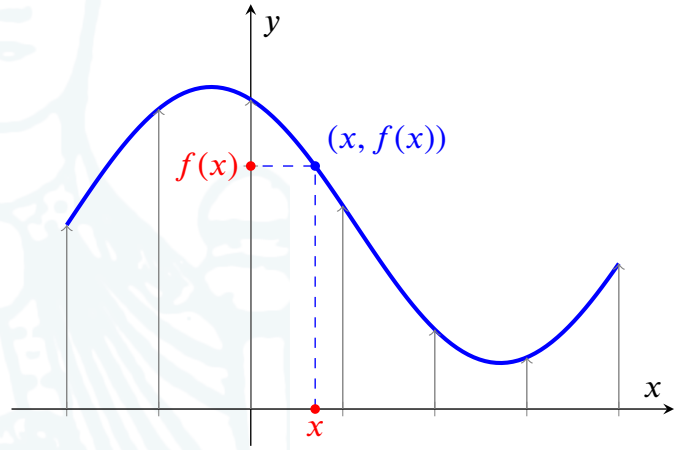
Inverse functies

Soms kan een functie worden 'ongedaan gemaakt' door haar **inverse** f^{-1} die uit de output van f terug de input berekent. Voor elke y in het bereik van f waarvoor een *unieke input* bestaat, geldt: $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$. Dit is equivalent aan de voorwaarden $f^{-1}(f(x)) = x$ en $f(f^{-1}(x)) = x$.

Pas op:

de waarde van de inverse functie	$f^{-1}(x)$	is meestal niet gelijk aan
het inverse (of omgekeerde) van de functiewaarde	$(f(x))^{-1} = 1/f(x)$.	Let dus op de plaats van de exponent.

Grafiek van een functie



Rationale en irrationale functies

Een **rationale functie** heeft als voorschrift een quotiënt van twee veeltermfuncties
vb: $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$ of $g(x) = \frac{1}{x}$

Een **irrationale functie** heeft een voorschrift met een niet-verwijderbare wortelvorm van de variabele.
$f(x) = \sqrt[5]{x^2+1} + \sqrt{x}$ of $h(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-3}}$ of $g(x) = \sqrt{2x+3}$.

Een **vierkantswortelfunctie** heeft als voorschrift $f(x) = \sqrt{g(x)}$, met $g(x)$ een veelterm van graad ≥ 1.
$f(x) = \sqrt{2x+3}$ of $h(x) = \sqrt{2x^2+3x+1}$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

Functies

Definities

Een reële **functie** $f : A \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ is een procedure die met elk getal $x \in A \subset \mathbb{R}$ het uniek gedefinieerde getal $f(x)$ associeert.

Een **functievoorschrift** van een functie f is een *formule* die $f(x)$ berekent voor elke $x \in A$.

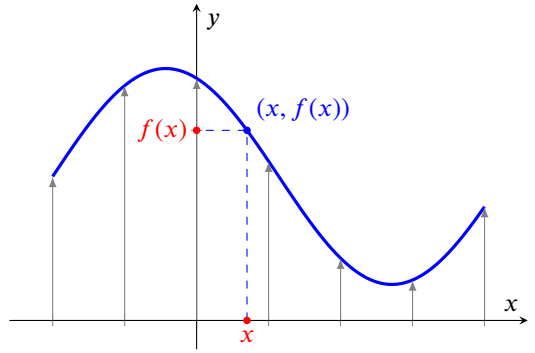
Het **domein** $\text{dom}\, f$ is de verzameling A van alle mogelijke inputs van de functie.

Het **bereik** $\text{bld}\, f$ is de verzameling van alle mogelijke outputs van de functie.

De **grafiek** van een functie is de verzameling $\{(x, f(x)) | x \in A)\} \subset \mathbb{R}^2$, en is typisch een kromme in het xy-vlak die elke verticale rechte hoogstens één keer snijdt.

Een **constante functie** is een functie die elke $x \in \mathbb{R}$ afbeeldt op eenzelfde reëel getal c. De grafiek is een horizontale rechte op hoogte $y = c$.

De **nulfunctie** is de constante functie die elke $x \in \mathbb{R}$ afbeeldt op 0.
De graad van de nulfunctie is onbepaald, alle andere constante functies zijn veeltermfuncties van graad 0.

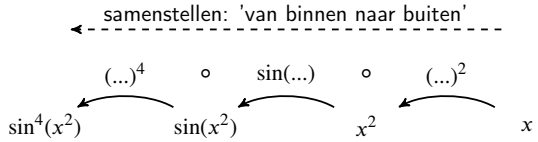


Samenstellen van functies

Bij het **samenstellen van functies** wordt de output van één functie de input van een volgende functie:

$$f \circ g : x \mapsto f(g(x)), \quad \text{waarbij} \quad (f \circ g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(g(x)) \quad \text{(lees als: } f \textit{ na } g \text{ van } x\text{)}.$$

vb: $f(x) = \sin^4(x^2)$



Transformaties van grafieken

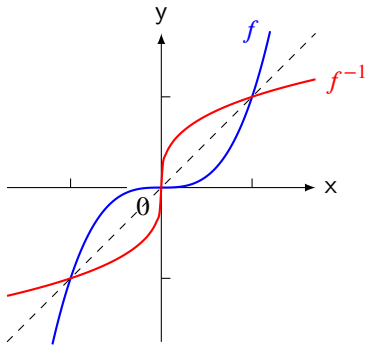
Grafieken verschuiven, schalen of spiegelen kan door samenstelling met enkele eenvoudige functies.
Voor een korte visuele opfrissing over deze transformaties verwijzen we naar de applet.

applet: https://eng.kuleuven.be/media/DSB/applet_transformatie_grafieken

Inverse functies

Soms kan een functie worden 'ongedaan gemaakt' door haar **inverse** f^{-1} die uit de output van f terug de input berekent. Voor elke y in het bereik van f waarvoor een *unieke input* bestaat, geldt: $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$. Dit is equivalent aan de voorwaarden $f^{-1}(f(x)) = x$ en $f(f^{-1}(x)) = x$.

Als de schaal op beide assen van de grafiek identiek is, kan de grafiek van de inverse functie gevonden worden door spiegeling t.o.v. de eerste bissectrice.



Pas op:

de waarde van de inverse functie	$f^{-1}(x)$	is meestal niet gelijk aan
het inverse (of omgekeerde) van de functiewaarde	$(f(x))^{-1} = 1/f(x)$.	

Let dus op de plaats van de exponent.

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

Exponentiële en logaritmische functies

Definitie

De **exponentiële functie met grondtal** a
(met $a > 0$ en $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$), is de reële functie

$$\exp_a : x \mapsto a^x$$

De **logaritmische functie met grondtal** a
(met $a > 0$ en $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}_0^+$), is de reële functie

$$\log_a : x \mapsto \log_a x$$

Beide functies zijn elkaars inverse:

$$\log_a(\exp_a x) = x \quad \text{of} \quad \log_a a^x = x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\exp_a(\log_a x) = x \qquad a^{\log_a x} = x \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

Definitie en eigenschappen van logaritmen

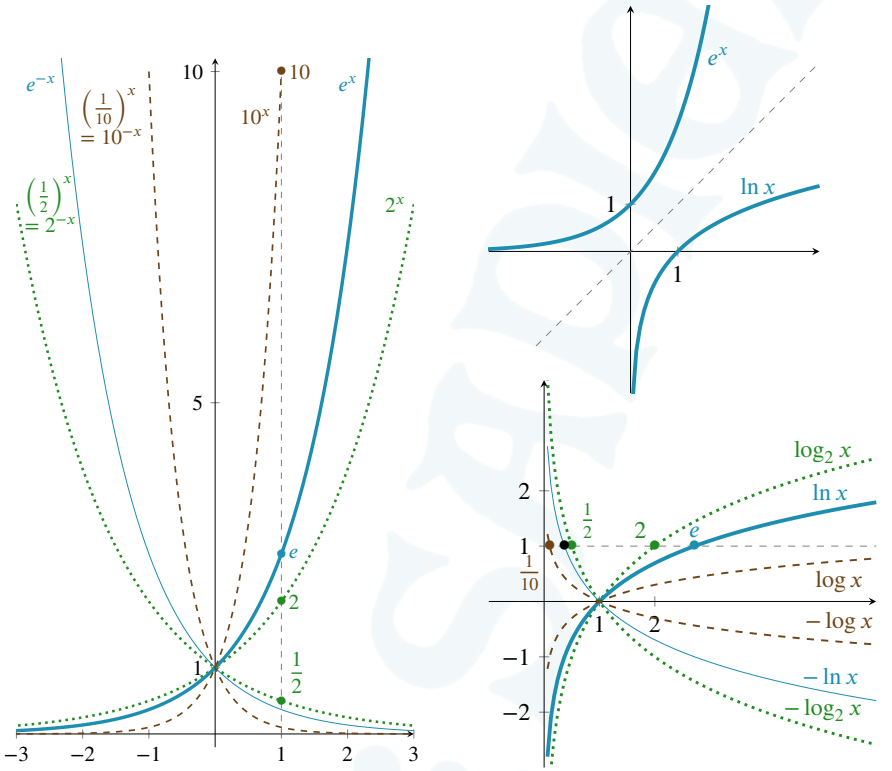
Definitie a-logaritme van x: $\log_a x = r \Leftrightarrow a^r = x$ of ook: $\log_a x$ is het unieke reële getal zodat $a^{\log_a x} = x$.

Onmiddellijke gevolgen: $\log_a 1 = 0$ en $\log_a a = 1$ en $\log_a a^x = x$

Notatie speciale grondtallen: $\log x \overset{\text{def}}{=} \log_{10} x$ en $\ln x \overset{\text{def}}{=} \log_e x$ met $e \approx 2.7182$ **getal van Euler**.

$\log_a(x \cdot y)$	$=$	$\log_a x + \log_a y$	*de **logaritme van een product** is de som van de logaritmen.*
$\log_a \frac{x}{y}$	$=$	$\log_a x - \log_a y$	*de **logaritme van een quotiënt** is het verschil van de logaritmen.*
$\log_a x^r$	$=$	$r \cdot \log_a x$	*de **logaritme van een macht** brengt de exponent naar voor.*
$\log_a x^{-1}$	$=$	$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$	*de **logaritme van het omgekeerde** is het tegengestelde van de logaritme*
$\log_b x$	$=$	$\frac{\log_a x}{\log_a b}$	**verandering van grondtal** (het geval $x = a$ geeft $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$)
$\log_a(x + y)$	$\neq$	~~$\log_a x \cdot \log_a y$~~	*de logaritme van een som is **NIET** het product van de logaritmen.*
$\log_a(x + y)$	$\neq$	~~$\log_a x + \log_a y$~~	*de logaritme van een som is **NIET** de som van de logaritmen.*
$\log_a(x \cdot y)$	$\neq$	~~$\log_a x \cdot \log_a y$~~	*de logaritme van een product is **NIET** het product van de logaritmen.*

Grafieken van exponentiële en logaritmische functies



Eigenschappen van exponentiële functies

(1) Als $a > 1$ dan is de functie $\exp_a$ **strikt stijgend**: $x < y \iff a^x < a^y$
(2) Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\exp_a$ **strikt dalend**: $x < y \iff a^x > a^y$

(3) Het **domein** van $\exp_a$ is $\mathbb{R}$: a^x is gedefinieerd voor alle reële getallen x
(4) Het **beeld** van $\exp_a$ is $\mathbb{R}_0^+$: a^x kan alleen strikt positieve waarden aannemen

De grafiek van $\exp_a$
(5) snijdt **de x-as** niet: a^x is nooit gelijk aan 0
(6) snijdt **de y-as** in het punt $(0, 1)$: $a^0 = 1$
(7) snijdt **de rechte $x = 1$** in het punt $(1, a)$: $a^1 = a$

Hoe groter het grondtal, hoe *sneller* de grafiek stijgt/daalt.

Eigenschappen van logaritmische functies

(1) Als $a > 1$ dan is de functie $\log_a$ **strikt stijgend**: $x < y \iff \log_a x < \log_a y$
(2) Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\log_a$ **strikt dalend**: $x < y \iff \log_a x > \log_a y$

(3) Het **domein** van $\log_a$ is $\mathbb{R}_0^+$: $\log_a x$ is enkel gedefinieerd voor $x > 0$
(4) Het **beeld** van $\log_a$ is $\mathbb{R}$: $\log_a x$ kan alle reële waarden aannemen

De grafiek van $\log_a$
(5) snijdt **de x-as** in het punt $(1, 0)$: $\log_a 1 = 0$
(6) snijdt **de y-as** niet: voor $x = 0$ is $\log_a x$ niet gedefinieerd
(7) snijdt **de rechte $y = 1$** in het punt $(a, 1)$: $\log_a(a) = 1$

Hoe groter het grondtal, hoe *minder snel* de grafiek stijgt/daalt.

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

Exponentiële en logaritmische functies

Definities

De **exponentiële functie met grondtal** a (met $a > 0$ en $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$),
is de reële functie $\exp_a : x \mapsto \exp_a(x) = a^x$
De **logaritmische functie met grondtal** a (met $a > 0$ en $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}_0^+$),
is de reële functie $\log_a : x \mapsto \log_a x$ met $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$
Beide functies zijn elkaars inverse:

$$\log_a(\exp_a x) = x \quad \text{of} \quad \log_a a^x = x \quad x \in \mathbb{R}$$
$$\exp_a(\log_a x) = x \quad \text{of} \quad a^{\log_a x} = x \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

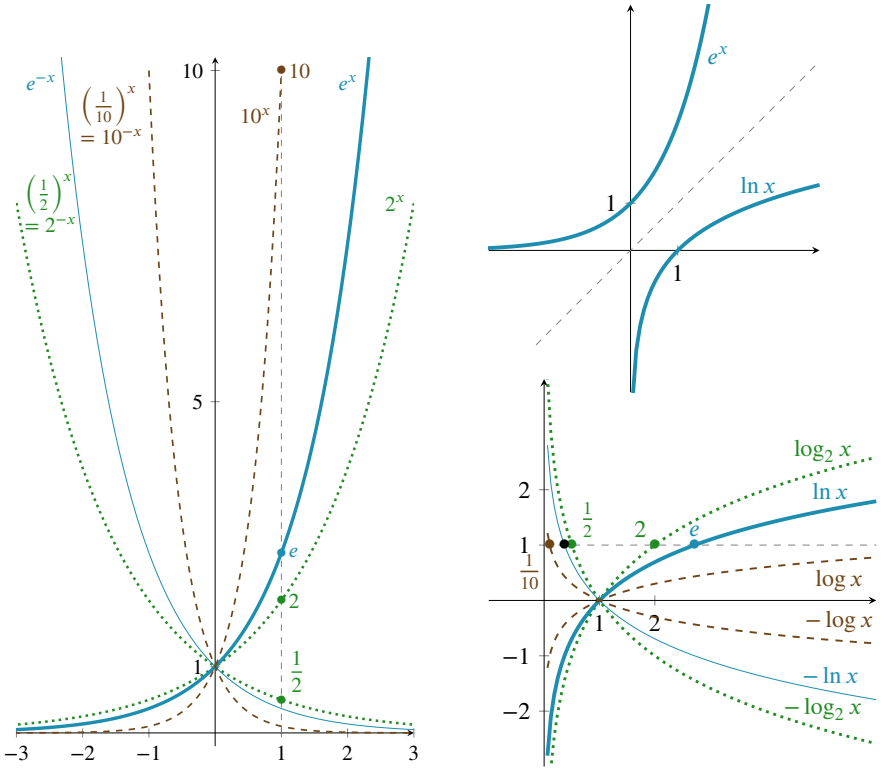
Notatie speciale grondtallen:

$\log x \overset{\text{def}}{=} \log_{10} x$

$\ln x \overset{\text{def}}{=} \log_e x$ met $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.7182$ **(getal van Euler)** .

$\exp x \overset{\text{def}}{=} e^x$

Grafieken van exponentiële en logaritmische functies



Rekenregels

$a^x a^y$	$=$	a^{x+y}	$\log_a(x \cdot y)$	$=$	$\log_a x + \log_a y$
$(a^x)^y$	$=$	a^{xy}	$\log_a(x^y)$	$=$	$y \cdot \log_a x$
$\frac{1}{a}$	$=$	a^{-1}	$\log_a \frac{1}{x}$	$=$	$\log_a x^{-1} = -\log_a x$
$\frac{a^x}{a^y}$	$=$	a^{x-y}	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)$	$=$	$\log_a x - \log_a y$
a^x	$=$	$b^{x \cdot \log_b a}$	$\log_a x$	$=$	$\log_a b \cdot \log_b x$
					het geval $x = a$ geeft $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$
a^x	$=$	$e^{x \cdot \ln a}$	$\log_a x$	$=$	$\frac{\ln x}{\ln a}$
$\frac{de^x}{dx}$	$=$	e^x	$\frac{d \ln x}{dx}$	$=$	$\frac{1}{x}$
$\frac{da^x}{dx}$	$=$	$\ln a \cdot a^x$	$\frac{d \log_a x}{dx}$	$=$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$

Eigenschappen van exponentiële functies

(1) Als $a > 1$ dan is de functie $\exp_a$ **strikt stijgend**: $x < y \iff a^x < a^y$
Hoe *groter* het grondtal, hoe *sneller* de grafiek stijgt.
(2) Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\exp_a$ **strikt dalend**: $x < y \iff a^x > a^y$
Hoe *kleiner* het grondtal, hoe *sneller* de grafiek daalt.

(3) Het **domein** van $\exp_a$ is $\mathbb{R}$: a^x is gedefinieerd voor alle reële getallen x
(4) Het **beeld** van $\exp_a$ is $\mathbb{R}_0^+$: a^x kan alleen strikt positieve waarden aannemen

De grafiek van $\exp_a$

(5)	snijdt **de x-as**	niet:	a^x is nooit gelijk aan 0
(6)	snijdt **de y-as**	in het punt $(0, 1)$:	$a^0 = 1$
(7)	snijdt **de rechte $x = 1$**	in het punt $(1, a)$:	$a^1 = a$

Eigenschappen van logaritmische functies

(1) Als $a > 1$ dan is de functie $\log_a$ **strikt stijgend**: $x < y \iff \log_a x < \log_a y$
Hoe *kleiner* het grondtal, hoe *sneller* de grafiek stijgt.
(2) Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\log_a$ **strikt dalend**: $x < y \iff \log_a x > \log_a y$
Hoe *groter* het grondtal, hoe *sneller* de grafiek daalt.

(3) Het **domein** van $\log_a$ is $\mathbb{R}_0^+$: $\log_a x$ is enkel gedefinieerd voor $x > 0$
(4) Het **beeld** van $\log_a$ is $\mathbb{R}$: $\log_a x$ kan alle reële waarden aannemen

De grafiek van $\log_a$

(5)	snijdt **de x-as**	in het punt $(1, 0)$:	$\log_a 1 = 0$
(6)	snijdt **de y-as**	niet:	voor $x = 0$ is $\log_a x$ niet gedefinieerd
(7)	snijdt **de rechte $y = 1$**	in het punt $(a, 1)$:	$\log_a(a) = 1$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

Limieten

Definitie

$\lim_{x\to c} f(x) = L$	leest als	de **limiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
	en betekent	als x nadert naar c, dan nadert $f(x)$ tot L
$\lim_{\substack{x\to c \\ <}} f(x) = L$	leest als	de **linkerlimiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
	en betekent	als $x \to c$ langs links (dus met $x < c$), dan $f(x) \to L$
$\lim_{\substack{x\to c \\ >}} f(x) = L$	leest als	de **rechterlimiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
	en betekent	als x nadert naar c **langs rechts** (dus met $x > c$), dan nadert $f(x)$ tot L

Dergelijke limieten bestaan niet altijd. Zowel c als L zijn ofwel een reëel getal, ofwel het symbool $+\infty$ of $-\infty$.

Berekenen via *voorzichtig invullen*

Eigenschap: Als f continu is, en $f(c)$ bestaat, dan is $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

In de praktijk leiden heel wat voorschriften tot functies die continu zijn op hun domein, en geldt de regel: als je $f(c)$ zonder problemen kan uitrekenen door c in te vullen in het voorschrift van f, dan is $f(c)$ de limiet van f in c.

Je kan c *niet* invullen in het voorschrift van f als dat zou leiden tot één van volgende uitdrukkingen:

$\pm\infty$	raadpleeg de rekenregels voor $\pm\infty$
$\frac{a}{0}, a \neq 0$	onderzoek of de noemer van teken verandert rond $x = c$
$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$	om deze *onbepaaldheden* op te lossen zijn er enkele technieken.

Regels voor som, verschil, product en quotiënt

Voor functies f, g waarvoor de limieten $\lim_{x\to c} f(x)$ en $\lim_{x\to c} g(x)$ bestaan,

gelden volgende (reken-)regels **tenzij ze een onbepaaldheid geven**:

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) \qquad \lim(\text{som}) = \text{som}(\lim)$$

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) \qquad \lim(\text{verschil}) = \text{verschil}(\lim)$$

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) \qquad \lim(\text{product}) = \text{product}(\lim)$$

$$\lim_{x\to c}(b\cdot f(x)) = b \cdot \lim_{x\to c} f(x) \qquad \lim(\text{constante}\cdot\text{functie}) = \text{constante}\cdot\lim(\text{functie})$$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} \qquad \lim(\text{quotient}) = \text{quotient}(\lim)$$

Rekenregels voor oneindig $(+\infty, -\infty)$

$$\begin{aligned}
\infty + a &= \infty && a \in \mathbb{R} \\
-\infty + a &= -\infty && a \in \mathbb{R} \\
\infty \cdot a &= \infty && a > 0 \\
-\infty \cdot a &= -\infty && a > 0 \\
-a \cdot \infty &= -\infty = \infty \cdot (-a) && a > 0 \\
-a \cdot (-\infty) &= \infty = -\infty \cdot (-a) && a > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\infty + \infty &= \infty \\
-\infty - \infty &= -\infty = (-\infty) + (-\infty) \\
\infty \cdot \infty &= \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) \\
\frac{a}{+\infty} &= 0 = \frac{a}{-\infty} && a \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

MAAR volgende uitdrukkingen zijn onbepaald:

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{a}{0} \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{0}$$

Merk op: ook de machten 0^0, ∞^0 en 1^∞ zijn onbepaald.

Voorbeelden

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+x) \overset{?}{=} \infty+\infty \overset{!}{=} \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x) \overset{?}{=} \infty-\infty = \text{onbepaald, maar}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x) = \lim_{x\to+\infty} x(x-1) \overset{?}{=} \infty\cdot\infty \overset{!}{=} \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \text{ bestaat niet (LL} \neq \text{RL)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

Limieten en ∞

Het symbool ∞

Het symbool ∞ ('oneindig') betekent intuïtief

erg veel groter dan elk ander voorkomend getal.

Volgende afspraken (of 'regels') veralgemenen die voor gewone getallen:

$$\infty + 2 = \infty \qquad \infty - 2 = \infty \qquad \infty + \infty = \infty$$
$$2 \cdot \infty = \infty \qquad (-2) \cdot \infty = -\infty \qquad \infty \cdot \infty = \infty$$

We spreken ook af dat $\frac{1}{\infty} = 0$, en dus ook $\frac{1}{-\infty} = \frac{-1}{\infty} = \frac{2}{\infty} = 0$.

Maar er zijn volgende uiterst belangrijke uitzonderingen:

$\frac{1}{0}$	**delen door nul**	soms oplosbaar via linker- en rechterlimiet
$\infty - \infty$	**oneindig min oneindig**	soms oplosbaar via rekenregels limieten
$0 \cdot \infty$	**nul maal oneindig**	soms oplosbaar via rekenregels limieten

Hieruit volgt ook dat $\infty^2 = \infty^n = \infty$, $\quad 2^\infty = \infty$, $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^\infty = \frac{1}{2^\infty} = 2^{-\infty} = 0$.

Omdat $0 = \frac{1}{\infty}$ zijn ook $\frac{0}{0}$ en $\frac{\infty}{\infty}$ onbepaald.

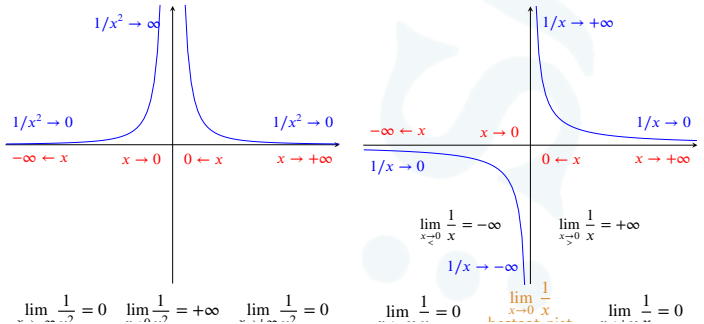
Omdat $a^b = e^{b \ln a}$ zijn ook $0^0 = e^{0 \cdot \ln 0}$, $1^\infty = e^{\infty \cdot \ln 1}$ en $\infty^0 = e^{0 \cdot \ln \infty}$ onbepaald.

Onbepaalde vormen

Reken met ∞ zoals met getallen
maar let op voor delen door nul
en vermijd volgende
ONBEPAALDE VORMEN:

"$\infty - \infty$" "$0 \cdot \infty$"
"$\frac{\infty}{\infty}$" "$\frac{0}{0}$"
"0^0" "∞^0" "1^∞"

Voorbeelden van limieten op een grafiek



Definitie van limiet (met c en L ofwel een reëel getal, ofwel het symbool $+\infty$ of $-\infty$)

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ leest als de **limiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L

en betekent als x nadert naar c, dan nadert $f(x)$ tot L

$\lim_{\substack{x \to c \\ <}} f(x) = L$ leest als de **linkerlimiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L

en betekent als $x \to c$ langs links (dus met $x < c$), dan $f(x) \to L$

$\lim_{\substack{x \to c \\ >}} f(x) = L$ leest als de **rechterlimiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L

en betekent als x nadert naar c **langs rechts** (dus met $x > c$), dan nadert $f(x)$ tot L

Dergelijke limieten bestaan niet altijd, maar er geldt:

Een limiet bestaat als en slechts als
zowel linkerlimiet als rechterlimiet bestaan, en bovendien aan elkaar gelijk zijn.

Regels voor som, verschil, product en quotiënt

Voor functies f, g waarvoor de limieten $\lim_{x \to c} f(x)$ en $\lim_{x \to c} g(x)$ bestaan,

gelden volgende (reken-)regels **tenzij ze tot een onbepaalde vorm leiden**:

$$\lim_{x \to c}(b \cdot f(x)) = b \cdot \lim_{x \to c} f(x) \qquad \text{lim(constante} \cdot \text{functie)} = \text{constante} \cdot \text{lim(functie)}$$
$$\lim_{x \to c}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) \qquad \text{lim(som)} = \text{som(lims)}$$
$$\lim_{x \to c}\big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x) \qquad \text{lim(verschil)} = \text{verschil(lims)}$$
$$\lim_{x \to c}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) \qquad \text{lim(product)} = \text{product(lims)}$$
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} \qquad \text{lim(quotient)} = \text{quotient(lims)}$$

Voorbeelden van limieten algebraïsch

$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + x) \overset{?}{=} \infty + \infty \overset{!}{=} \infty$

$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x) \overset{?}{=} \infty - \infty$ is onbepaald, maar $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to +\infty} x(x-1) \overset{?}{=} \infty \cdot \infty \overset{!}{=} \infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ maar $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ bestaat niet, want LL $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$ verschilt van RL $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$)

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ en $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \sin(x)$ bestaat niet want ook voor heel grote x blijft $\sin(x)$ oscilleren tussen -1 en $+1$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

Limieten berekenen (via gevalsonderscheid)

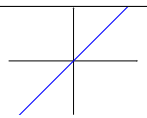
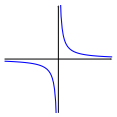
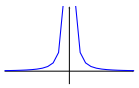
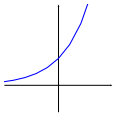
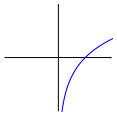
Invullen van c in $f(x)$ om $\lim_{x\to c} f(x)$ te vinden leidt tot

- $L \in \mathbb{R}$ → Klaar: de limiet is L (tenminste als f continu is in c)
  - $\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x+1}$ → $= \frac{-1}{1} = -1$
- "$\infty+\infty$", "$a+\infty$", "$\infty\cdot\infty$", "$a\cdot\infty$", "$\frac{1}{\infty}$", "$\frac{\infty}{1}$" → Pas rekenregels $\pm\infty$ toe
  - $\lim_{x\to+\infty} x^2 + x$ → $= +\infty + \infty = +\infty$
- "$\frac{1}{0}$" → Bepaal linker- en rechterlimiet via tekenonderzoek van noemer rond $x = c$
  - $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x-1}$ → limiet bestaat niet, linkerlimiet is $-\infty$ en rechterlimiet is $+\infty$
  - $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x-1)^2}$ → $= +\infty$ want linkerlimiet is $+\infty$ en rechterlimiet is $+\infty$
- "$\frac{\infty}{0}$" → Bepaal linker- en rechterlimiet via tekenonderzoek van noemer rond $x = c$
  - $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x-1)}{x-1}$ → enkel rechterlimiet bestaat en is gelijk aan $-\infty$
- "$\frac{0}{0}$" of "$\frac{\infty}{\infty}$"
  - Gemeenschappelijke factoren wegdelen in teller en noemer
    - $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ → $= \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$
  - regel van l'Hopital
    - $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ → $= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$
- "$\infty - \infty$"
  - Verwaarloosbare termen schrappen
    - $\lim_{x\to+\infty} x^2 - x$ → $= \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
  - Snelst stijgende of dalende factor buiten haakjes brengen
    - $\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x}$ → $= \lim_{x\to+\infty} x(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}) = (+\infty)\cdot(1) = +\infty$
  - Vermenigvuldigen en delen met toegevoegde tweeterm
    - $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - \sqrt{x+1}$ → $= \lim_{x\to+\infty} \frac{x-(x+1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \overset{\text{"}\frac{1}{+\infty}\text{"}}{=} 0$
  - Wordt "$\frac{0}{0}$" via $\underbrace{u-v}_{\text{"}\infty-\infty\text{"}} = \frac{\frac{1}{v}-\frac{1}{u}}{\frac{1}{u\cdot v}}$
    - $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ → $= \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x\sin x} \overset{H+\text{oef.}}{=} 0$
- "$0\cdot\infty$"
  - Wordt "$\frac{0}{0}$" via $\underbrace{u\cdot v}_{\text{"}0\cdot\infty\text{"}} = \frac{u}{\frac{1}{v}}$
    - $\lim_{x\to-\infty} xe^x$ → $= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} \overset{\text{"}\frac{1}{-\infty}\text{"}}{=} 0$
  - Wordt "$\frac{\infty}{\infty}$" via $\underbrace{u\cdot v}_{\text{"}0\cdot\infty\text{"}} = \frac{v}{\frac{1}{u}}$
    - $\lim_{x\to 0} x\ln x$ → $= \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = 0$
- "$0^{+\infty}$"
  - neem logaritme en klaar: limiet $= 0$, limiet bestaat enkel als grondtal positief is rond $x = c$
    - $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x^{1/x^2}$ → $= e^{\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} ((1/x^2)\cdot(\ln x))} = e^{\infty\cdot(-\infty)} = e^{-\infty} = 0$
- "$0^{-\infty}$"
  - neem logaritme en klaar: limiet $= +\infty$, limiet bestaat enkel als grondtal positief is rond $x = c$
    - $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} (x^2-1)^{\frac{-1}{(x-1)^2}}$ → $= e^{\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \left(\frac{-1}{(x-1)^2}\cdot\ln(x^2-1)\right)} = \ldots$
- "0^0", "1^∞", "∞^0"
  - neem logaritme en reduceer tot "$0\cdot\infty$", limiet bestaat enkel als grondtal positief is rond $x = c$
    - $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x^x$ → $= e^{\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} (x\cdot\ln x)} = \ldots$

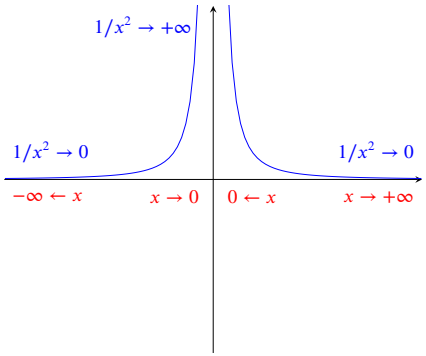
KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

Limieten en asymptoten

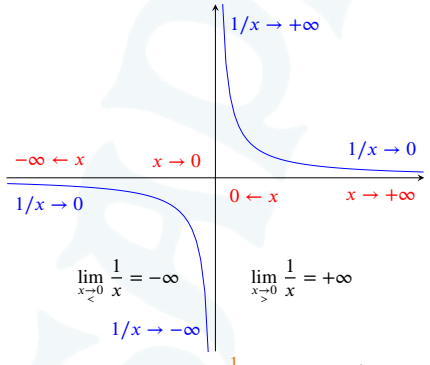
Basislimieten

		$x \to -\infty$	$x \overset{<}{\to} 0$	$x \to 0$	$x \overset{>}{\to} 0$	$x \to +\infty$
$x \mapsto x$		$-\infty$	0	0	0	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$		0	$-\infty$	X	$+\infty$	0
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$		0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$x \mapsto e^x$		0	1	1	1	$+\infty$
$x \mapsto \ln x$		X	X	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Voorbeelden $f(x) = 1/x$ en $f(x) = 1/x^2$



$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$



$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}$ bestaat niet $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Beide functies $1/x$ en $1/x^2$ hebben
$y = 0$ als horizontale asymptoot en $x = 0$ als verticale asymptoot.

Definitie

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ lees je als de **limiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
en betekent als x nadert naar c dan nadert $f(x)$ tot L

$\lim_{x\overset{<}{\to}c} f(x) = L$ lees je als de **linkerlimiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
en betekent als $x \to c$ langs links (dus met $x < c$), dan $f(x) \to L$

$\lim_{x\overset{>}{\to}c} f(x) = L$ lees je als de **rechterlimiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
en betekent als x nadert naar c **langs rechts** (dus met $c < x$), dan nadert $f(x)$ tot L

In de uitdrukking $\lim_{x\to c} f(x) = L$ zijn zowel c als L een reëel getal of het symbool $+\infty$ of $-\infty$.

Limieten bestaan *niet* voor alle functies f en getallen c, bijvoorbeeld $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}$ en $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x}$ bestaan niet.
Op de grafiek lees je x en c op de x-as (dus links-rechts) en $f(x)$ en L op de y-as (dus hoog-laag).

Eigenschappen van limieten

Eigenschap: Als f continu is, en $f(c)$ bestaat, dan is $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Eigenschap: $\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \lim_{x\overset{<}{\to}c} f(x) = L$ en $\lim_{x\overset{>}{\to}c} f(x) = L$

De meeste voorschriften geven functies die continu zijn op hun domein, en dan geldt de regel: als je c kan invullen in $f(x)$ zonder problemen zoals $\frac{a}{0}, \frac{0}{0}$ of $\pm\infty$, dan is $f(c)$ de limiet van f in c.

Rekenregels voor limieten (Niet voor HW)

Voor continue functies f, g waarvoor $\lim_{x\to c} f(x)$ en $\lim_{x\to c} g(x)$ bestaan,

gelden volgende (reken-)regels **tenzij ze een onbepaaldheid geven**:

$$\lim_{x\to c}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) \qquad \text{lim(som)} = \text{som(lims)}$$

$$\lim_{x\to c}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) \qquad \text{lim(product)} = \text{product(lims)}$$

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} \qquad \text{lim(quotient)} = \text{quotient(lims)}$$

Onbepaaldheden

(Niet voor HW)
Volgende uitdrukkingen zijn
ONBEPAALD

$\infty - \infty$ $0 \cdot \infty$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{\infty}{0}$ $\frac{0}{0}$ $\frac{a}{0}$

Asymptoten

Een **asymptoot** is een rechte waartoe de grafiek van een functie willekeurig dicht nadert.
Men spreekt van **horizontale asymptoot (HA), verticale asymptoot (VA) of schuine asymptoot (SA)** als de rechte respectievelijk horizontaal, verticaal of schuin is.

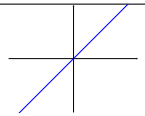
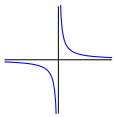
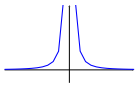
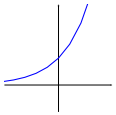
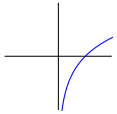
Rechte $y = a$ is een **horizontale asymptoot** van f asa $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ of $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$.

Rechte $x = a$ is een **verticale asymptoot** van f asa $\lim_{x\overset{<}{\to}a} f(x) = \pm\infty$ of $\lim_{x\overset{>}{\to}a} f(x) = \pm\infty$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

Limieten en asymptoten

Basislimieten

		$x \to -\infty$	$x \overset{<}{\to} 0$	$x \to 0$	$x \overset{>}{\to} 0$	$x \to +\infty$
$x \mapsto x$		$-\infty$	0	0	0	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$		0	$-\infty$	$\setminus$	$+\infty$	0
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$		0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$x \mapsto e^x$		0	1	1	1	$+\infty$
$x \mapsto \ln x$		$\setminus$	$\setminus$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Rekenregels voor oneindig $(+\infty, -\infty)$

$$
\begin{array}{rcll}
(+\infty)+(+\infty) & = & +\infty & \\
(-\infty)+(-\infty) & = & -\infty & \\
(+\infty)\cdot(+\infty) & = & +\infty & = (-\infty)\cdot(-\infty) \\
(+\infty)\cdot(-\infty) & = & -\infty & = (-\infty)\cdot(+\infty) \\
(\pm\infty)+a & = & \pm\infty & = a+(\pm\infty) \qquad a \in \mathbb{R} \\
\dfrac{a}{+\infty} & = & 0 & = \dfrac{a}{-\infty} \qquad a \in \mathbb{R} \\
(\pm\infty)\cdot a & = & \pm\infty & = a\cdot(\pm\infty) \qquad a > 0 \\
(+\infty)^a & = & +\infty & \qquad a > 0 \\
(\pm\infty)\cdot a & = & \mp\infty & = a\cdot(\pm\infty) \qquad a < 0 \\
(+\infty)^a & = & 0 & \qquad a < 0 \\
a^{(+\infty)} & = & +\infty & \qquad a > 1 \\
a^{(-\infty)} & = & 0 & \qquad a > 1 \\
a^{(+\infty)} & = & 0 & \qquad 0 < a < 1 \\
a^{(-\infty)} & = & +\infty & \qquad 0 < a < 1
\end{array}
$$

MAAR volgende uitdrukkingen zijn onbepaald:

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0^0 \qquad \infty^0 \qquad 1^\infty$$

Definities en eigenschappen

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$	lees je als	de **limiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
	en betekent	als x nadert naar c dan nadert $f(x)$ tot L
$\lim\limits_{x\overset{<}{\to} c} f(x) = L$	lees je als	de **linkerlimiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
	en betekent	als $x \to c$ langs links (dus met $x < c$), dan $f(x) \to L$
$\lim\limits_{x\overset{>}{\to} c} f(x) = L$	lees je als	de **rechterlimiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
	en betekent	als x nadert naar c **langs rechts** (dus met $c < x$), dan nadert $f(x)$ tot L

In de uitdrukking $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ zijn zowel c als L een reëel getal of het symbool $+\infty$ of $-\infty$.

Limieten bestaan *niet* voor alle functies f en getallen c, bijvoorbeeld $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ en $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x}$ bestaan niet.

Op de grafiek lees je x en c op de x-as (dus links-rechts) en $f(x)$ en L op de y-as (dus hoog-laag).

Eigenschap: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \iff \lim\limits_{x\overset{<}{\to} c} f(x) = L$ en $\lim\limits_{x\overset{>}{\to} c} f(x) = L$

Voor een functie f geldt: de functie f is continu $\equiv f(c)$ bestaat en $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

De meeste voorschriften geven functies die continu zijn op hun domein, en dan geldt de regel: als je c kan invullen in $f(x)$ zonder problemen zoals $\frac{a}{0}, \frac{0}{0}$ of $\pm\infty$, dan is $f(c)$ de limiet van f in c.

Rekenregels voor limieten

Voor continue functies f, g waarvoor $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ en $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ bestaan, gelden volgende (reken-)regels:

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) \qquad \lim(\text{som}) = \text{som}(\lim\text{s})$$

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) \qquad \lim(\text{verschil}) = \text{verschil}(\lim\text{s})$$

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) \qquad \lim(\text{product}) = \text{product}(\lim\text{s})$$

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)} \quad (\text{voor } \lim_{x\to c} g(x) \neq 0) \qquad \lim(\text{quotiënt}) = \text{quotiënt}(\lim\text{s})$$

Asymptoten

Een **asymptoot** is een rechte waartoe de grafiek van een functie willekeurig dicht nadert.
Men spreekt van **horizontale asymptoot (HA), verticale asymptoot (VA) of schuine asymptoot (SA)** als de rechte respectievelijk horizontaal, verticaal of schuin is.

Rechte $y = a$ is een **horizontale asymptoot** van f asa $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ of $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$.

Rechte $x = a$ is een **verticale asymptoot** van f asa $\lim\limits_{x\overset{<}{\to} a} f(x) = \pm\infty$ of $\lim\limits_{x\overset{>}{\to} a} f(x) = \pm\infty$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

Afgeleiden

Definitie van de afgeleide

Een reële functie f is **afleidbaar** of **differentieerbaar in een punt** a van haar domein als de limiet $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *bestaat* en *eindig* is.

De **afgeleide van** f **in** a, genoteerd $f'(a)$ is de waarde van die limiet:

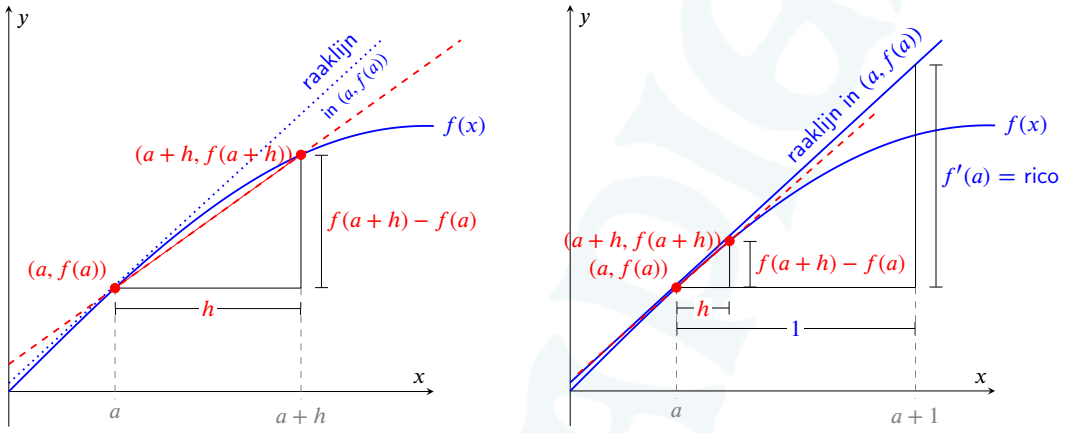
$$f'(a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

De **afgeleide functie van** f, genoteerd f', is gedefinieerd waar f afleidbaar is en heeft als functiewaarde in a de afgeleide van f in het punt a:

$$f' : x \mapsto f'(x).$$

Betekenis van de afgeleide als helling van de raaklijn

De **raaklijn** aan de grafiek van een differentieerbare functie f in een punt $(a, f(a))$ is de limiet van de rechten door $(a, f(a))$ en $(a+h, f(a+h))$ wanneer h willekeurig klein wordt:



De rechte door die twee punten heeft vergelijking $y - f(a) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}(x-a)$ en de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ heeft dus als vergelijking

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

De **afgeleide** in a is de **richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek** in $(a, f(a))$.

Basisafgeleiden

$(c)' = 0$		**(constante)**
$(x^r)' = rx^{r-1}$	$(x)' = 1$	**(machtregel)**
$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$	kettingregel en $a = e^{\ln a}$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	kettingregel en $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$
$(\sin x)' = \cos x$		
$(\cos x)' = -\sin x$		
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	kettingregel en $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

Extra: omdat $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ en $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ is ook $(\tan x)' = \sec^2 x$ en $(\cot x)' = -\csc^2 x$.

Extra: enkel voor wie vertrouwd is met de cyclometrische functies:

$$(\text{bgsin}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{bgcos}\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{bgtan}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Rekenregels

Voor afleidbare functies f en g, en constanten $c \in \mathbb{R}$ geldt:

$(cf)' = cf'$	**(scalair veelvoud)**	$(5x)' = 5(x)' = 5$
$(f+g)' = f' + g'$	**(somregel)**	$(x + x^2)' = 1 + 2x$
$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	**(productregel)**	$\left((5x+2)\cdot x^2\right)' = 5 \cdot x^2 + 2x \cdot (5x+2)$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	**(quotiëntregel)**	$\left(\dfrac{x^7+1}{x^2}\right)' = \dfrac{7x^6 \cdot x^2 - 2x \cdot (x^7+1)}{x^4}$
$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	**(kettingregel)**	$\left((x^7+1)^{42}\right)' = 42(x^7+1)^{41} \cdot 7x^6$

Extra voorbeelden:

$$\left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x} \qquad \left(e^{x^4}\right)' = 4x^3 e^{x^4}$$
$$\left(e^{\sin 3x}\right)' = 3e^{\sin 3x}\cos 3x \qquad \left(e^{5x}\sin 3x\right)' = 5e^{5x}\sin 3x + 3e^{5x}\cos 3x$$
$$\left(\sin x^2\right)' = 2x\cos x^2 \qquad \left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

Afgeleiden

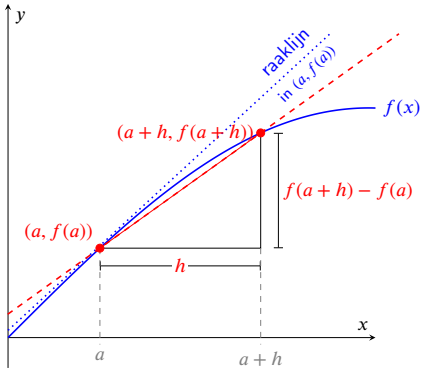
Definitie en grafische betekenis

De **afgeleide** van een reële functie f **in een punt** a van haar domein wordt genoteerd met $f'(a)$ of $Df(a)$ of $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_a$ en is de waarde van de limiet $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, als deze limiet *bestaat* en *eindig* is.

Een functie f is **afleidbaar** of **differentieerbaar** in een gebied als de afgeleide bestaat in dit gebied. De **afgeleide functie** van f wordt genoteerd met f' of Df of $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$: $f' : x \mapsto f'(x)$

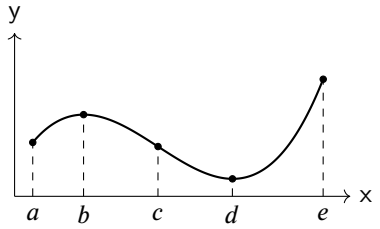
De **afgeleide** in a is de **richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek** in $(a, f(a))$.

De raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ heeft dus als vergelijking $y = f(a) + f'(a)(x-a)$



Functieverloop

x	a		b		c		d		e
$f'(x)$		+	0	−	−	−	0	+	
$f''(x)$		−	−	−	0	+	+	+	
$f(x)$	rel. min.	bol stijgend	rel. max.	bol dalend	buigpunt	hol dalend	abs. min.	hol stijgend	abs. max.



Een **absoluut** minimum/maximum (abs. min./abs. max.): de functiewaarde is minimaal/maximaal over het volledige domein van de functie.
Een **relatief** minimum/maximum (rel. min./ rel. max.): de functiewaarde is minimaal/maximaal in een omgeving rond het punt.
Een **extremum** is een minimum of een maximum.

Afgeleiden van enkele functies

$f(x)$	$f'(x)$
$c\ (c \in \mathbb{R})$	0
$x^q\ (q \in \mathbb{Q})$	qx^{q-1}
e^x	e^x
$a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$\sec x$	$\tan x\ \sec x$
$\csc x$	$-\cot x\ \csc x$
$\arcsin x\ (\lvert x\rvert<1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x\ (\lvert x\rvert<1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcsec} x\ (\lvert x\rvert>1)$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arccsc} x\ (\lvert x\rvert>1)$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

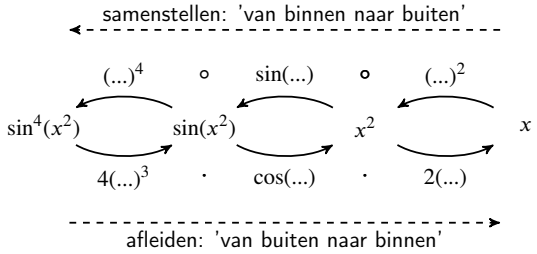
Rekenregels

Voor afleidbare reële functies f en g, en constante $c \in \mathbb{R}$ geldt:

$(cf)'(x) = cf'(x)$	**scalair veelvoud** $(5x)' = 5(x)' = 5$
$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$	**somregel** $(x+x^2)' = 1 + 2x$
$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$	**productregel** $\big((5x+2)\cdot x^2\big)' = 5\cdot x^2 + 2x\cdot(5x+2)$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$	**quotiëntregel** $\left(\frac{x^7+1}{x^2+1}\right)' = \frac{7x^6\cdot(x^2+1) - (x^7+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$
$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$	**kettingregel** $(\sin^4(x^2))' = 4\sin^3(x^2)\ \cos(x^2)\ 2x$
$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$	**inverse** $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

voorbeeld kettingregel

$f(x) = \sin^4(x^2)$



$f'(x) = 4\sin^3(x^2)\ \cos(x^2)\ 2x$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

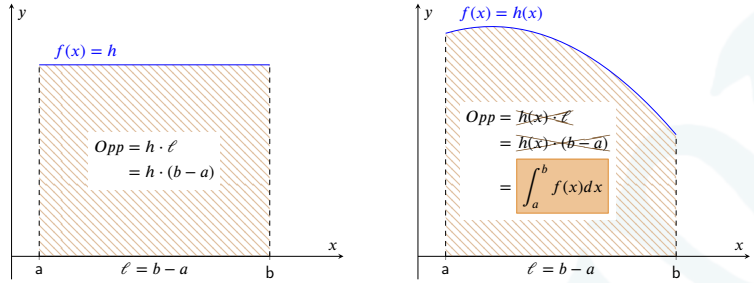
Integralen

Definities

De **onbepaalde integraal** van een functie f is de verzameling van functies F zodat $F' = f$:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \qquad \text{met} \quad F'(x) = f(x).$$

De **bepaalde integraal** $\int_a^b f(x)\,dx$ is de oppervlakte onder de grafiek van f tussen a en b:



Eigenschappen van de bepaalde integraal

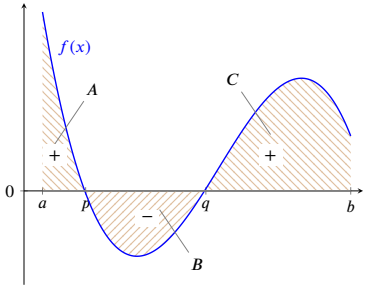
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{(Hoofdstelling van de integraalrekenenig)}$$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c \qquad \text{(Gevolg van de Hoofdstelling, } c = -F(a)\text{)}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad \text{(Omwisselen integratiegrenzen)}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \text{(Opsplitsen integratieinterval)}$$

Oppervlakte onder een kromme



Oppervlaktes *onder* de x-as worden *negatief geteld* door de bepaalde integraal:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^q f(x)\,dx + \int_q^b f(x)\,dx$$
$$= \text{opp}\,A - \text{opp}\,B + \text{opp}\,C\,.$$

Basisintegralen, som en scalair veelvoud

$$\int 0\,dx = c \quad \text{met } c \in \mathbb{R} \qquad \int dx = x + c$$

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c \quad (r \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$$

$$\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \qquad \int r \cdot f(x)\,dx = r \cdot \int f(x)\,dx$$

Substitutiemethode

Voor reële, afleidbare functies f en g waarvoor der samenstelling $f(g(x))$ bestaat geldt:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx \overset{g(x)=u}{=} \int f(u)\,du \qquad \textbf{(substitutie } u = g(x)\textbf{)}$$

Of ook: $\int f(u)du = \int f(u(x))d(u(x)) = \int f(u(x))u'(x)dx \quad (du = u'(x)dx \text{ want } \frac{du}{dx} = u'(x))$

Voorbeeld:

$$\int e^{x^2}\,2x\,dx \overset{u(x)=x^2}{=} \int e^{u(x)}u'(x)dx = \int e^u du = e^u + c = e^{u(x)} + c = e^{x^2} + c$$

Partiële integratie

Voor reële, afleidbare functies f en g geldt:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx \overset{P.I.}{=} f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \qquad \textbf{(partiële integratie)}$$

Of ook: $\int u\,dv \overset{P.I.}{=} uv - \int v\,du \qquad (\text{want } du = u'(x)dx)$

Voorbeeld:

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x \overset{P.I.}{=} x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

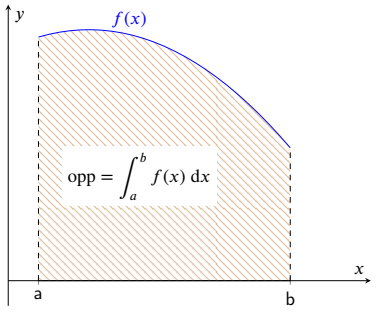
Integralen

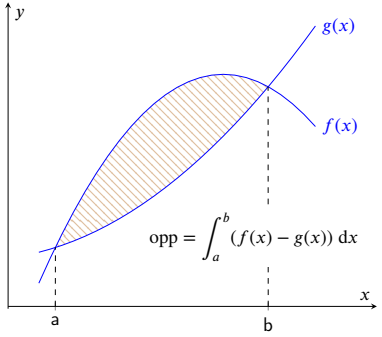
Definities

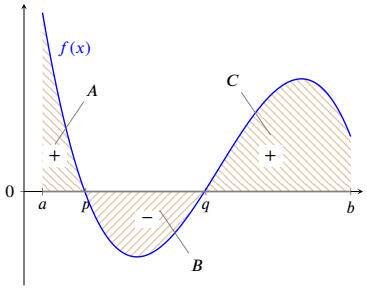
De **onbepaalde integraal** van een functie f is de verzameling van functies F zodat $F' = f$:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \qquad \text{met} \quad F'(x) = f(x).$$

De **bepaalde integraal** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ is de oppervlakte onder de grafiek van f tussen a en b.







Oppervlaktes *onder* de x-as worden *negatief geteld* door de bepaalde integraal:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^p f(x)\,\mathrm{d}x + \int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x + \int_q^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \text{opp}\,A - \text{opp}\,B + \text{opp}\,C\,.$$

Eigenschappen van de bepaalde integraal

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad \text{(Hoofdstelling van de integraalrekenenig)}$$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c \qquad \text{(Gevolg van de Hoofdstelling, } c = -F(a)\text{)}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Omwisselen integratiegrenzen)}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Opsplitsen integratieinterval)}$$

Basisintegralen, som en scalair veelvoud

$$\int 0\,\mathrm{d}x = c \quad \text{met } c \in \mathbb{R} \qquad \int \mathrm{d}x = x + c$$
$$\int x^r\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c \quad (r \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$$
$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c \qquad \int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$$
$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c \qquad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + c$$

$$\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int r \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = r \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Substitutiemethode

Voor reële, afleidbare functies f en g waarvoor der samenstelling $f(g(x))$ bestaat, geldt:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \overset{g(x)=u}{=} \int f(u)\,\mathrm{d}u \qquad \textbf{(substitutie } u = g(x)\textbf{)}$$

Of ook: $\int f(u)\mathrm{d}u = \int f(u(x))d(u(x)) = \int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x \quad (\mathrm{d}u = u'(x)\mathrm{d}x \text{ want } \frac{du}{\mathrm{d}x} = u'(x))$

Voorbeeld:

$$\int e^{x^2}\,2x\,\mathrm{d}x \overset{u(x)=x^2}{=} \int e^{u(x)}u'(x)\mathrm{d}x = \int e^u\mathrm{d}u = e^u + c = e^{u(x)} + c = e^{x^2} + c$$

Partiële integratie

Voor reële, afleidbare functies f en g geldt:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \overset{P.I.}{=} f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{(partiële integratie)}$$

Of ook: $\int u\,\mathrm{d}v \overset{P.I.}{=} uv - \int v\,\mathrm{d}u \qquad (\text{want } \mathrm{d}u = u'(x)\mathrm{d}x)$

Voorbeeld:

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\sin x \overset{P.I.}{=} x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c$$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

Afgeleiden en integralen

Basisafgeleiden

- De afgeleide van constante en machtsfunctie $x \mapsto c$ en $x \mapsto x^r$ (met $c, r \in \mathbb{R}$) zijn:

$$(x^r)' = rx^{r-1} \qquad (c)' = 0$$

- Afgeleiden van goniometrische en cyclometrische functies

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$(\text{bgsin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{bgcos } x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{bgtan } x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

- Afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = 1/x \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Rekenregels afgeleiden

- De afgeleide van de som $f + g$ en het scalair veelvoud cf van afleidbare functies f en g (met $c \in \mathbb{R}$) wordt gegeven door:

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g'$$

- De afgeleide van het product $f \cdot g$ en het quotiënt $\frac{f}{g}$ van twee afleidbare functies f en g wordt gegeven door:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \qquad \textbf{(productregel)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \qquad \textbf{(quotiëntregel)}$$

- De *afgeleide van de samenstelling* van twee afleidbare functies f en g is gelijk aan:

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \textbf{(kettingregel)}$$

Basisintegralen

$$\int 0\,dx = c \qquad \int dx = x + c$$

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c \quad (r \in \mathbb{R}, r \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{bgsin } x + c \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{bgtan } x + c$$

Substitutiemethode

Voor reële, afleidbare functies f en u waarvoor $f \circ u$ bestaat geldt:

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int f(u(x))\,du(x) = \int f(u)\,du.$$

vb. $\int e^{x^2}\,2x\,dx$. Stel $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$ zodat

$$\int e^{x^2}\,2x\,dx = \int e^u du = e^u + c = e^{x^2} + c$$

Partiële integratie

Voor reële, afleidbare functies f en u geldt:

$$\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,dx,$$

of met differentialen genoteerd:

$$\int f\,du = f \cdot u - \int u\,df.$$

vb. $\int x \cos x\,dx = \ldots$ aangezien $d \sin x = \cos x\,dx$, zal:

$$\int x \cos x\,dx = \int x\,d\sin x \overset{P.I.}{=} x \sin x - \int \sin x\,dx = x \sin x + \cos x + c$$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

Integralen oplossen: inspiratiepagina

Integrand bewerken en substitutie

Techniek	Voorbeeld	Methode	Oplosbare vorm
Subsitutie lineair ($u = ax + b$)	$\int \frac{1}{\cos^2(5-5x)}\,dx$	$u = 5 - 5x, \quad du = -5dx$	$\frac{-1}{5}\int \frac{1}{\cos^2(u)}\,du$
Subsitutie niet-lineair (stel $u = f(x)$, herken $f'(x)$ elders)	$\int \frac{x}{\sqrt{16-x^4}}\,dx$	$u = \left(\frac{x}{2}\right)^2, du = \frac{1}{2}x\,dx$	$\int \frac{1}{2\sqrt{1-u^2}}\,du$
Splits in breuken (vul de teller verder aan)	$\int \frac{x}{x+8}\,dx$	$\frac{x}{x+8} = \frac{x+8-8}{x+8} = 1 - \frac{8}{x+8}$	$\int 1\,dx - 8\int \frac{1}{x+8}\,dx$
Splits in breuken (partieelbreuken)	$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$	vind A en B zodat $\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$	$\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx$
Subsitutie goniometrisch (basis)	$\int \sin(x)\cos^6(x)\,dx$	$u = \cos x, du = -\sin x dx$	$-\int u^6\,du$
Gebruik hoofdformule goniometrie (als directe substitutie niet werkt)	$\int \sin^3 x\,dx$	$\int \sin x(1-\cos^2 x)\,dx$ $u = \cos x \quad du = -\sin x dx$	$-\int (1-u^2)\,du$
Verdubbelingsformule (idem.)	$\int \cos^2 x\,dx$	$\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$	$\frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \int \frac{1}{2}\,dx$
Substitutie niet-triviaal	$\int \sqrt{e^x - 1}dx$	$u^2 = e^x - 1,$ $2udu = d(u^2) = d(e^x-1) = e^x dx = (u^2+1)\,dx$ $du = (u^2+1)/2u\,dx$	$\int u \cdot \frac{2u}{u^2+1}\,du$ (vul teller aan)

Basisintegralen

$$\int 0\,dx = c \quad \text{met } c \in \mathbb{R}$$
$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \qquad (r \neq -1)$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$
$$\int e^x\,dx = e^x + c$$
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{bgsin}\,x + c$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{bgtan}\,x + c$$

Partiële integratie

Type oefening	Voorbeeld	Keuze voor u en dv	Uitgewerkte vorm
veelterm en goniometrische functie	$\int x \cdot \cos(x)\,dx$	$u = x \quad du = dx$ $dv = \cos(x)\,dx \quad v = \sin(x)$	$x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$
veelterm en exponentiële functie	$\int x \cdot e^x\,dx$	$u = x \quad du = dx$ $dv = e^x\,dx \quad v = e^x$	$xe^x - \int e^x\,dx$
één moeilijke term (zonder directe integraal)	$\int \ln(x)\,dx$	$u = \ln(x) \quad du = \frac{1}{x}\,dx$ $dv = dx \quad v = x$	$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int \frac{x}{x}\,dx$
P.I. en recursie (gebruik twee keer P.I.)	$I = \int e^x \cos x\,dx$	$\int e^x \cos x\,dx = \cos x \cdot e^x - \int e^x - \sin x\,dx$ $= \cos x \cdot e^x + \left(\sin x \cdot e^x - \int e^x \cos x\,dx\right)$	$I = \cos x e^x + \sin x e^x - I$ $\Rightarrow I = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)$

Partiële integratie: Vuistregel

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Vuistregel volgorde kiezen u (**L-CAGE**):

- **L**ogaritmische functies: $\ln(x), \log_b(x)$
- **C**yclometrische functies: $\arctan(x), \arcsin(x)$
- **A**lgebraische functies: $x^2, 7x^{20}$
- **G**oniometrische functies: $\cos(x), \tan(x)$
- **E**xponentiële functies: $e^x, 4^x$

KU Leuven CC BY-NC-SA

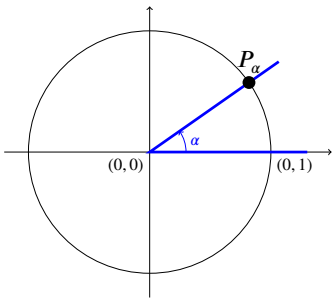
4.0, versie 2026/08/04

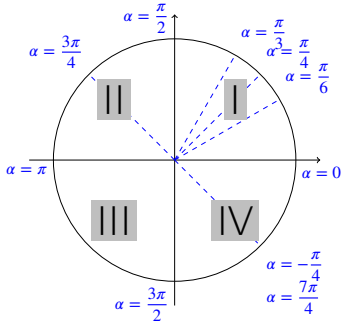
Goniometrie

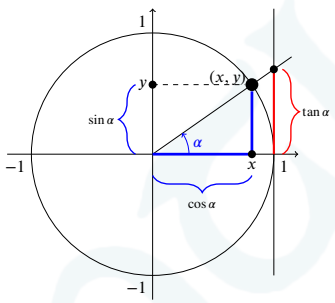
Goniometrische cirkel

De **goniometrische cirkel** is de cirkel met straal 1 en centrum in de oorsprong, verdeeld in vier **kwadranten**, genummerd van rechtsboven tegen de klok in met Romeinse cijfers I, II, III, IV.

Elke hoek α komt overeen met een uniek **beeldpunt** P_α op deze cirkel (en vice versa).







De **cosinus** en **sinus** van α zijn per definitie de coördinaten van P_α: $P_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

De **tangens** van α is de verhouding van sinus tot cosinus: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Voor scherpe hoeken volgen uit de stelling van Pythagoras de meer gekende formules in een rechthoekige driehoek:

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Overstaande zijde}}{\text{Schuine zijde}}$	SOS	$a = \sin\alpha \cdot c$
$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Aanliggende zijde}}{\text{Schuine zijde}}$	CAS	$b = \cos\alpha \cdot c$
$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Overstaande zijde}}{\text{Aanliggende zijde}}$	TOA	$a = \tan\alpha \cdot b$

Hoofdformule van de goniometrie: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Graden en radialen

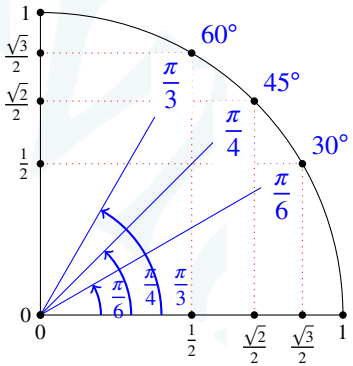
Hoeken kunnen uitgedrukt worden in zowel radialen (**rad**) als graden (°).

Graden en radialen worden naar elkaar omgerekend met *de regel van drie*:

360° is gelijk aan 2π rad, dus 1° is gelijk aan $\frac{\pi}{180}$ rad, dus 7° is gelijk aan $7\frac{\pi}{180}$ rad.
2π rad is gelijk aan 360°, dus π rad is gelijk aan 180°, dus $\frac{5}{4}\pi$ rad is $\frac{5}{4} \cdot 180° = 225°$.

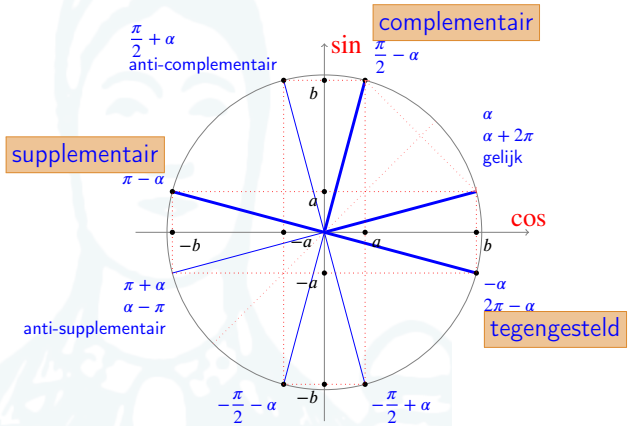
Gekende goniometrische getallen

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/



Goniometrische formules

Verwante hoeken:



Somformules (en dubbele hoek; verschilformules via verwante hoeken):

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

en dus $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

t-Formules: $\cos\alpha = \dfrac{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}}$ $\sin\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}}$ $\tan\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}$

Formules van Simpson:

$$\begin{aligned} \sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}$$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

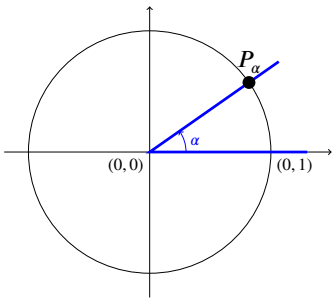
Goniometrie

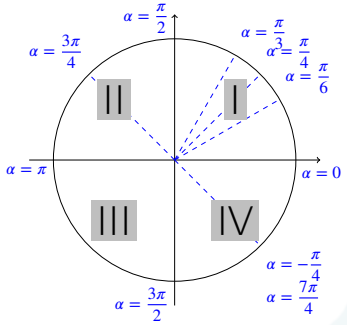
Goniometrische cirkel

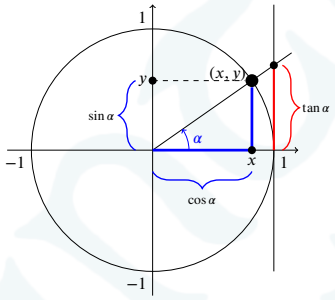
Een **georiënteerde hoek** of **draaiingshoek** is een meetkundige figuur bestaande uit een **hoekpunt** O met een **eerste been** of **beginbeen** OA en een **tweede been** of **eindbeen** OB. Twee dergelijke hoeken zijn gelijk als ze door verschuiven en draaien op elkaar kunnen worden gelegd.

De **goniometrische cirkel** is de cirkel met straal 1 en centrum in de oorsprong, verdeeld in vier **kwadranten**, genummerd van rechtsboven tegen de klok in met Romeinse cijfers I, II, III, IV.

Elke hoek α komt overeen met een uniek **beeldpunt** P_α op deze cirkel (en vice versa).







De **cosinus** en **sinus** van α zijn per definitie de coördinaten van P_α: $P_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

De **tangens** van α is de verhouding van sinus tot cosinus: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Voor scherpe hoeken volgt dan uit de stelling van Pythagoras:

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{Overstaande zijde}}{\text{Schuine zijde}}$	SOS	$a = \sin\alpha \cdot c$
$\cos\alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{Aanliggende zijde}}{\text{Schuine zijde}}$	CAS	$b = \cos\alpha \cdot c$
$\tan\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{Overstaande zijde}}{\text{Aanliggende zijde}}$	TOA	$a = \tan\alpha \cdot b$

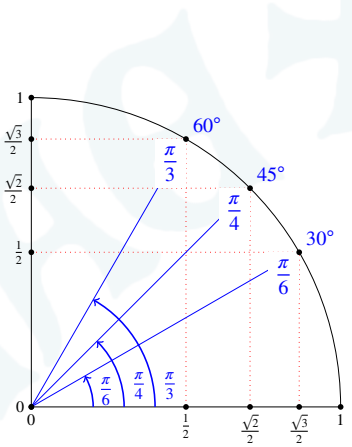
Hoofdformule van de goniometrie: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

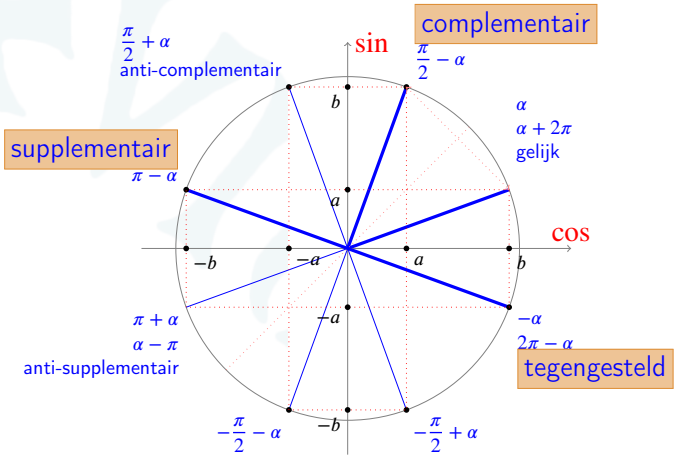
Ook deze formule volgt onmiddellijk uit de stelling van Pythagoras.

Graden en radialen

Hoeken worden gemeten in graden (°) of in radialen (**rad**, en dikwijls als veelvoud van π).
Beiden worden in elkaar omgerekend via de gelijkheid $180° = \pi \text{ rad} = \pi$,
en er geldt dus bijvoorbeeld $60° = 60° \cdot \dfrac{\pi}{180°} = \dfrac{\pi}{3}$ en $\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} \cdot \dfrac{180°}{\pi} = 45°$.

Gekende goniometrische getallen en verwante hoeken





Goniometrische formules

Som

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ en dus $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ en dus $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

t-Formules: $\cos\alpha = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ $\sin\alpha = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ en dus $\tan\alpha = \dfrac{2t}{1 - t^2}$ met $t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$

Simpson:

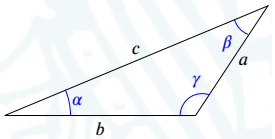
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Via verwante hoeken zijn varianten met andere tekens af te leiden.

Driehoeken oplossen

Sinusregel $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ of natuurlijk ook $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ etc.

Cosinusregel $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ veralgemeent Pythagoras (met $\gamma = \pi/2$) en $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ($\gamma = \pi$ en dus $c = a + b$)

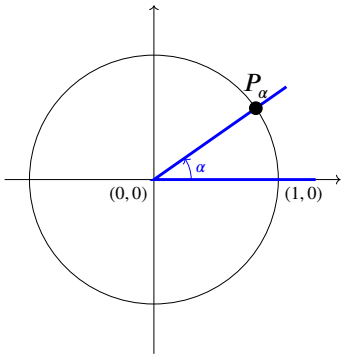


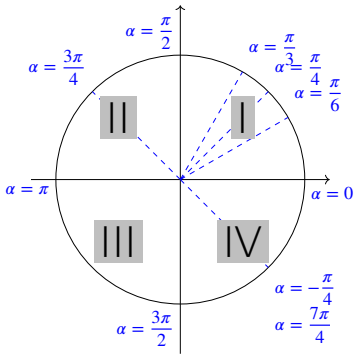
KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

Goniometrie

Goniometrische cirkel

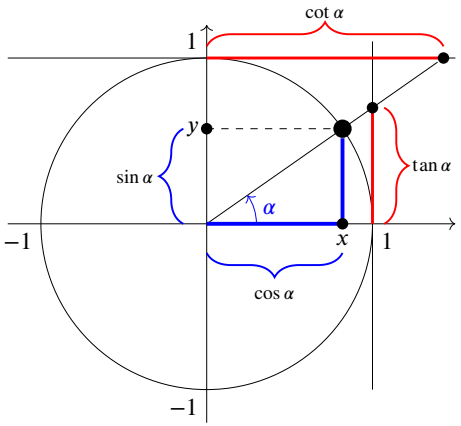
De **goniometrische cirkel** is de cirkel met straal 1 en centrum in de oorsprong, verdeeld in vier **kwadranten**, genummerd van rechtsboven tegen de klok in met Romeinse cijfers I, II, III, IV.
Elke hoek α komt overeen met een uniek **beeldpunt** P_α op deze cirkel (en vice versa).
De booglengte van de boog tussen $(1,0)$ en P_α is de hoek in radialen. Bijgevolg komt een hoek van $180°$ overeen met de booglengte van een halve cirkel: $180° = \pi$.



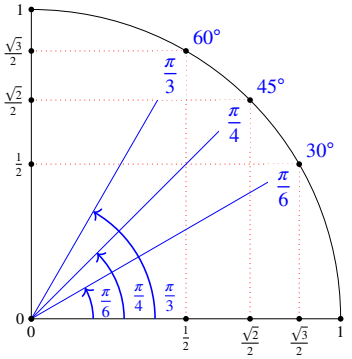


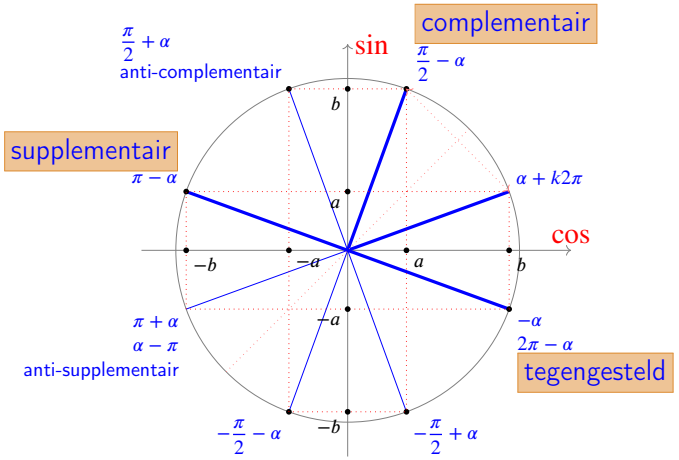
De **cosinus** en **sinus** van α zijn per definitie de coördinaten van P_α: $P_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$
Verder definiëren we

tangens	$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	secans	$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$
cotangens	$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	cosecans	$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$



Gekende goniometrische getallen en verwante hoeken





Goniometrische formules

Hoofdformule van de goniometrie:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

en dus $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$

$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \csc^2\alpha$

Som

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

en dus $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

en dus $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

en dus $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

t-Formules: $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$

en dus $\tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$ met $t = \tan\frac{\alpha}{2}$

Simpson:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Omgekeerde Simpson:

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$
$$-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

Goniometrische en cyclometrische functies

Goniometrische functies

Bij goniometrische functies wordt de hoek steeds in radialen genomen!
Volgende functies zijn goniometrische functies:

$$\begin{array}{lll}
\sin: & \mathbb{R} \to [-1,1] & : x \mapsto \sin(x) \\
\cos: & \mathbb{R} \to [-1,1] & : x \mapsto \cos(x) \\
\tan: & \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[\to \mathbb{R} & : x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad k \in \mathbb{Z} \\
\cot: &]k\pi,(k+1)\pi[\to \mathbb{R} & : x \mapsto \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad k \in \mathbb{Z} \\
\sec: & \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[\to]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[& : x \mapsto \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \quad k \in \mathbb{Z} \\
\text{cosec}: &]k\pi,(k+1)\pi[\to]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[& : x \mapsto \text{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{array}$$

Cyclometrische functies

Volgende cyclometrische functies zijn de inversen van de goniometrische functies als we het domein van die goniometrische functies gepast beperken:

$$\text{asin}: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]: x \mapsto \text{asin}(x) \text{ is invers van } \sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]: x \mapsto \sin(x)$$

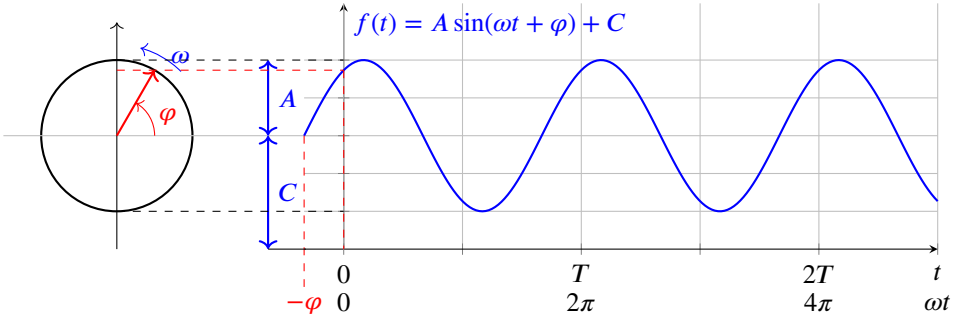
$$\text{acos}: [-1,1] \to [0,\pi]: x \mapsto \text{acos}(x) \qquad \cos: [0,\pi] \to [-1,1]: x \mapsto \cos(x)$$

$$\text{atan}: \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: x \mapsto \text{atan}(x) \qquad \tan: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}: x \mapsto \tan(x)$$

Cyclometrische functies geven *altijd* de waarde van een hoek uitgedrukt in radialen.
Verschillende notaties zijn in gebruik voor de cyclometrische functies. Zo wordt voor boogsinus zowel bgsin, Bgsin, arcsin als asin gebruikt.

Sinusoïdale functies

Sinusoïdale functies worden gebruikt om periodieke verschijnselen te modelleren. Ze kunnen beschreven worden als $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + C$,
met A : de amplitude
T : de periode
$\omega = \frac{2\pi}{T}$: de hoekfrequentie of de pulsatie
φ : de fase
C : de offset of de verticale verschuiving.

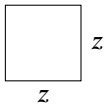
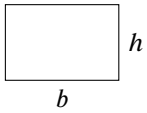
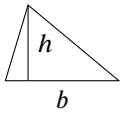
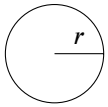


Merk op dat de cosinusfunctie een sinusfunctie is met fase $\frac{\pi}{2}$: $\cos(\omega t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$.

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

Meetkundige basisbegrippen

Omtrek en oppervlakteformules

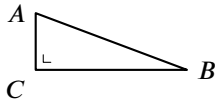
		Omtrek	Oppervlakte
Vierkant met zijde z		$4z$	z^2
Rechthoek met breedte b en hoogte h		$2b+2h$	bh
Driehoek met basis b en hoogte h		som van de zijden	$\frac{bh}{2}$
Cirkel met straal r		$2\pi r$	πr^2

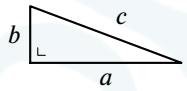
De stelling van Pythagoras

Een driehoek ABC is rechthoekig in hoek C $\iff$ $|AC|^2+|CB|^2=|AB|^2$.

Een driehoek met zijden a,b,c is rechthoekig in de hoek tegenover c $\iff$ $a^2+b^2=c^2$

Een driehoek met zijden a,b,c is rechthoekig in de hoek tegenover c $\iff$ $c=\sqrt{a^2+b^2}$

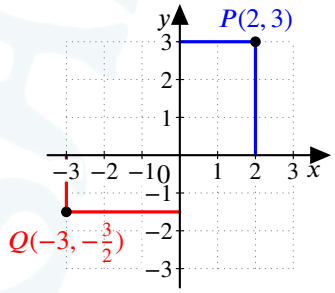




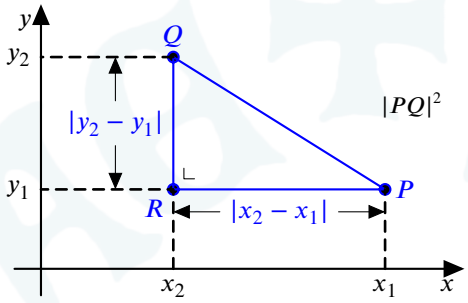
Cartesiaans assenstelsel

Cartesiaans **assenstelsel**:
horizontale x-as en een verticale y-as met gelijke eenheden.

Elk punt P van het vlak komt overeen met een uniek koppel reële getallen (x,y), de **coördinaten** van P.



Afstand tussen punten $P(x_1,y_1)$ en $Q(x_2,y_2)$ in het vlak



$$\begin{aligned}|PQ|^2 &= |PR|^2+|RQ|^2\\ &= |x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2\\ &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\end{aligned}$$

De **afstand** tussen het punt $P(x_1,y_1)$ en $Q(x_2,y_2)$ is

$$d(P,Q) \overset{\text{def}}{=} |PQ| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Vergelijkingen van rechte en cirkel

Rechte PQ door $P(x_1,y_1)$ en $Q(x_2,y_2)$ $(x_1\neq x_2)$ $\quad y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

Richtingscoëfficiënt van rechte PQ $\quad m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)$

Rechte door $P(x_1,y_1)$ met helling (of rico) m $\quad y-y_1=m(x-x_1)$

Rechte door $P(0,q)$ met helling (of rico) m $\quad y=mx+q$

Horizontale rechte door $P(x_1,y_1)$ $\quad y=y_1$ (of ook $y-y_1=0$)

Verticale rechte door $P(x_1,y_1)$ $\quad x=x_1$ (of ook $x-x_1=0$)

Cirkel met middelpunt $M(x_M,y_M)$ en straal r $\quad (x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$

PAS OP: Verticale rechten hebben geen rico, en geen vergelijking van de vorm $y=mx+q$!

Onderlinge ligging van rechten

Snijdend	één snijpunt	verschillende helling (rico's)	$y=x$ en $y=2x$
Evenwijdig	geen snijpunten	gelijke helling (rico) maar vergelijkingen niet evenredig	$y=x$ en $y=x+1$
Samenvallend	elk punt is snijpunt	evenredige vergelijkingen	$y=x$ en $2y=2x$

Loodrechte stand van rechten

Verticale rechten staan loodrecht op horizontale rechten, en omgekeerd.

Andere rechten staan loodrecht op elkaar als en slechts als het product van de rico's -1 is:

$$L_1\perp L_2 \iff m_1\cdot m_2=-1 \left(\iff m_2=-\frac{1}{m_1}\right)$$

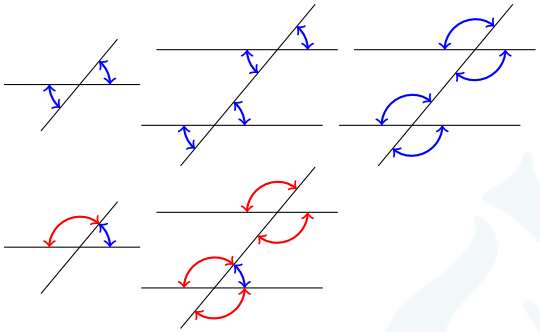
Leuven, CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

Basiseigenschappen van hoeken, driehoeken, cirkels en vlakke figuren

Hoeken bij snijdende rechten

overstaande hoeken zijn *gelijk*:
net zoals overeenkomende binnenhoeken,
en overeenkomende buitenhoeken

aanliggende hoeken zijn *supplementair*:

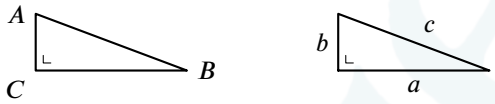


De stelling van Pythagoras

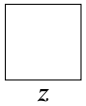
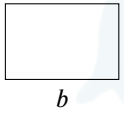
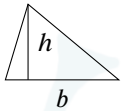
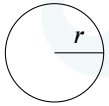
Een driehoek ABC is rechthoekig in hoek C $\iff$ $|AC|^2 + |CB|^2 = |AB|^2$.

Een driehoek met zijden a, b, c is rechthoekig in de hoek tegenover c $\iff$ $a^2 + b^2 = c^2$

Een driehoek met zijden a, b, c is rechthoekig in de hoek tegenover c $\iff$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$



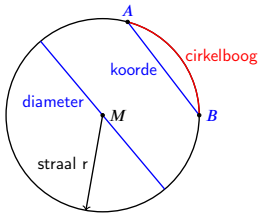
Omtrek en oppervlakteformules

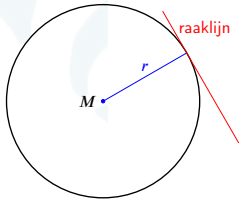
		Omtrek	Oppervlakte
Vierkant met zijde z		$4z$	z^2
Rechthoek met breedte b en hoogte h		$2b + 2h$	bh
Driehoek met basis b en hoogte h		som van de zijden	$\frac{bh}{2}$
Cirkel met straal r		$2\pi r$	πr^2

Cirkels

De **cirkel** met **middelpunt** M en **straal** r is
de verzameling van alle punten die op een afstand r van het punt M liggen.

De **raaklijn** aan een cirkel staat **loodrecht op de straal** naar het raakpunt.

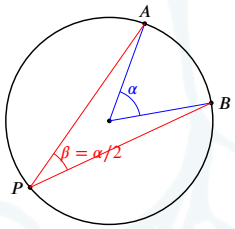


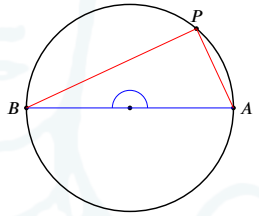


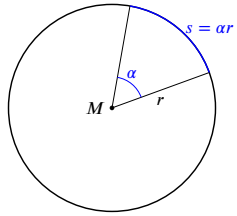
Elke **omtrekshoek** meet de helft van de **middelpuntshoek** die op dezelfde boog staat, en dus:

Elke **driehoek op een diameter met derde hoekpunt op de cirkel** is **rechthoekig**, en

De **lengte van een boog** s die een middelpuntshoek α afsnijdt op een cirkel met straal r is gegeven door $\alpha \cdot r$ als de hoek α wordt uitgedrukt in radialen.

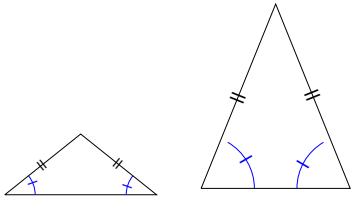






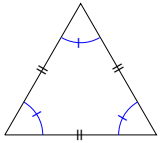
Driehoeken

De **som van de hoeken** van een driehoek meet $180°$ (of dus π radialen).



Een **gelijkbenige driehoek** heeft twee gelijke basishoeken.

Een **gelijkzijdige driehoek** heeft drie gelijke hoeken,
van elk $60°$ of dus $\frac{\pi}{6}$ radialen.



KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

Vergelijkingen van rechten in het vlak (cartesiaans assenstelsel Oxy)

Vormen

Een rechte door het punt $P(x_1, y_1)$ kunnen we beschrijven op verschillende manieren.
Een **cartesiaanse vergelijking** van een rechte is *een nodige en voldoende voorwaarde* opdat punten (x, y) op de rechte zouden liggen.

(A) $y = y_1 + m(x - x_1)$

expliciete vergelijking: y als functie van x
Het getal m is de **richtingscoëfficiënt** (rico) van de rechte.
Door $P = (0, q)$ te kiezen wordt de vergelijking $y = q + mx$.

vb: $y = 1 + 2x$ heeft rico 2.

(B) $n_x(x - x_1) + n_y(y - y_1) = 0$

impliciete vergelijking: verband tussen x en y
De vector $\vec{n}(n_x, n_y)$ is een **normaalvector** op de rechte.
De vergelijking kan ook geschreven worden als
$n_x\, x + n_y\, y + c = 0$ met c een constante.

vb: $2x - y + 1 = 0 \perp \vec{n} = (2, -1)$

Een **parametervergelijking** *genereert* alle punten van de rechte met behulp van een parameter:

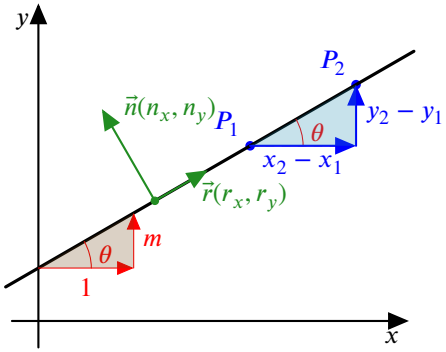
(C) $\begin{cases} x = x_1 + r_x\, t \\ y = y_1 + r_y\, t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$

parametervergelijking: elke waarde voor de parameter t genereert een punt van de rechte
$\vec{r}(r_x, r_y)$ is een **richtingsvector** van de rechte.

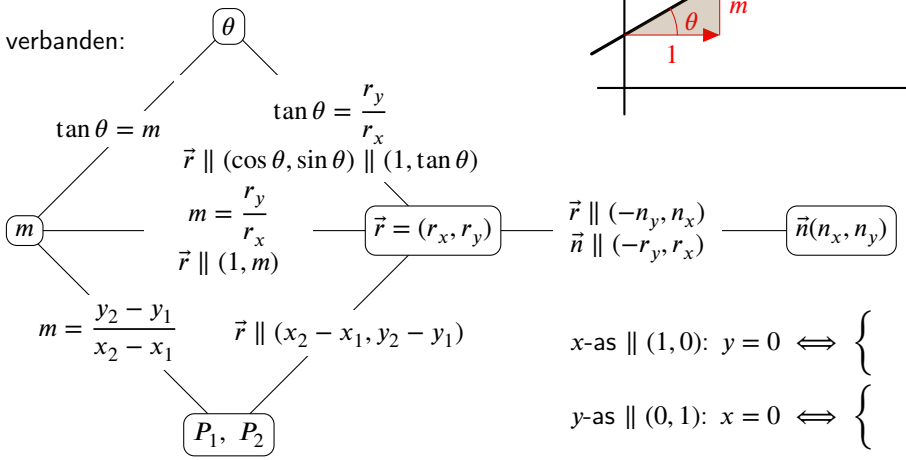
vb: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R} \quad \| \; \vec{r} = (1, 2)$

Richting

De **richting** van een rechte kan gespecifieerd worden op verschillende manieren:
- met de **hoek** θ die de rechte maakt met de x-as
- met de **rico** m van de rechte
- met een **richtingsvector** $\vec{r}(r_x, r_y)$ van de rechte
- met een **normaalvector** $\vec{n}(n_x, n_y)$ op de rechte
- met **twee punten** $P_1(x_1, y_1)$ en $P_2(x_2, y_2)$



verbanden:



x-as $\parallel (1, 0)$: $y = 0 \iff \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$

y-as $\parallel (0, 1)$: $x = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$

Onderlinge ligging van rechten

De **snijpunten** van twee rechten zijn de oplossingen van een stelsel gevormd door de vergelijkingen van beide rechten. De vergelijkingen mogen gemengd worden wat betreft vorm.

Snijdend	één snijpunt	verschillende richting
Evenwijdig en niet samenvallend	geen snijpunten	gelijke richting
Samenvallend	elk punt is snijpunt	gelijke richting

Rechten staan **loodrecht op elkaar** als

hun richtingsvectoren loodrecht op elkaar staan.	$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0$
het product van hun rico's gelijk is aan -1.	$m_1 \cdot m_2 = -1$ (volgt uit $(1, m_1) \cdot (1, m_2) = 0$)
hun normaalvectoren loodrecht op elkaar staan.	$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
een normaalvector van de ene rechte evenwijdig is met een richtingsvector van de andere rechte.	$\vec{n}_1 = k\vec{r}_2 = 0,\ k \in \mathbb{R}$

Rechten zijn **evenwijdig** als

hun richtingsvectoren evenwijdig zijn.	$\vec{r}_1 = k\vec{r}_2,\ k \in \mathbb{R}$
hun rico's gelijk zijn.	$m_1 = m_2$
hun normaalvectoren evenwijdig zijn.	$\vec{n}_1 = k\vec{n}_2\ ,\ k \in \mathbb{R}$
een normaalvector van de ene rechte loodrecht staat op een richtingsvector van de andere rechte.	$\vec{n}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0$

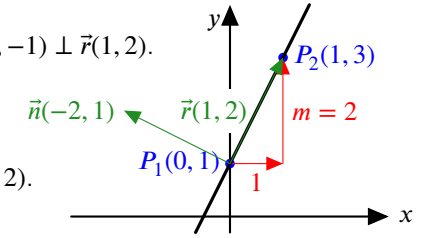
Omzetten van parametervergelijkingen en cartesiaanse vergelijkingen

Meetkundig:
Maak gebruik van de verbanden tussen de rico m, de richtingsvector $\vec{r}$ en de normaalvector $\vec{n}$.

vb: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R},$ gaat door het punt $(1, 3)$ en heeft richtingsvector $\vec{r}(1, 2) \perp \vec{n}(-2, 1)$.
$\iff -2\,(x - 1) + 1\,(y - 3) = 0 \iff -2x + y - 1 = 0$

vb: $2x - y + 1 = 0$ gaat door het punt $(0, 1)$ en heeft normaalvector $\vec{n}(2, -1) \perp \vec{r}(1, 2)$.
$\iff \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$

vb: $y = 2x + 1$ gaat door het punt $(0, 1)$ en heeft richtingsvector $\vec{r}(1, 2)$.
$\iff \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$



Algebraïsch:
- Een parameter $x = t$ invoeren (of $y = t$) schrijft een cartesiaanse vergelijking in parametervorm:

$$y = 3 + 2x \iff \begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R} \overset{\text{of}}{\iff} \begin{cases} x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$$

- De parameter t elimineren maakt van een parametervergelijking een cartesiaanse vergelijking:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R} \overset{t = x - 1}{\iff} y = 3 + 2(x - 1) \iff 2x - y + 1 = 0$$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

Matrices

Definitie

Een reële $m \times n$ **matrix** $\mathbf{A}$ is een rechthoekig rooster van reële getallen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

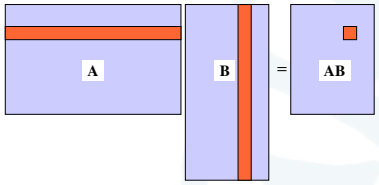
- De **matrixelementen** (of *componenten*) van $\mathbf{A}$ zijn de getallen $a_{11}, \ldots a_{ij}, \ldots, a_{mn}$.
- Men noteert ook $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.
- Een $m \times n$ matrix heeft m rijen en n kolommen.
- Een $n \times n$ matrix (met evenveel rijen als kolommen) noemen we een **vierkante matrix**.
- Een $m \times 1$ **kolommatrix** (of **kolomvector**) is een matrix met één kolom.
- Een $1 \times n$ **rijmatrix** (of **rijvector**) is een matrix met één rij.

Vermenigvuldiging van matrices

Het product van $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is $m \times n$ matrix $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ met element c_{ij} op de i-de rij en de j-de kolom gelijk aan het product van de i-de rij van $\mathbf{A}$ met j-de kolom van $\mathbf{B}$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Het product $\mathbf{AB}$ bestaat enkel als het aantal kolommen van $\mathbf{A}$ gelijk is aan het aantal rijen van $\mathbf{B}$.



De volgorde van de matrices mag in het algemeen niet omgewisseld worden:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 1\cdot -1 + 2\cdot 1 \\ -2\cdot 1 + 0\cdot 3 & -2\cdot -1 + 0\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + -1\cdot -2 & 1\cdot 2 + -1\cdot 0 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot -2 & 3\cdot 2 + 1\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

In het algemeen geldt dus dat $\mathbf{AB}$ *niet gelijk is* aan $\mathbf{BA}$.

Inverse van een vierkante matrix

Twee vierkante matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ zijn elkaars **inverse** als:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

Als voor een gegeven $\mathbf{A}$ dergelijke $\mathbf{B}$ bestaat dan is die uniek, en we noteren die als $\mathbf{A}^{-1}$.
Er geldt dus

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Merk op: niet elke matrix heeft een inverse. Er geldt $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Transponeren van matrices

De **getransponeerde matrix** van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ is de $n \times m$ matrix $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]$.
De *rijen* van de getransponeerde $\mathbf{A}^T$ zijn de *kolommen* van $\mathbf{A}$. Er geldt $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Voorbeeld:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Determinant van een vierkante matrix

De **determinant** van een *vierkante* 2×2 matrix is *een getal* dat belangrijke eigenschappen van die matrix weergeeft, in de eerste plaats of de matrix al dan niet *inverteerbaar* is

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \overset{\text{notatie}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=} ad - bc \in \mathbb{R}.$$

De determinant van een 3×3 matrix is het getal

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2)$$

De coëfficiënten komen telkens uit de eerste rij en de bijhorende 2×2 determinanten worden bekomen door de rij en de kolom van de betreffende coëfficiënt te schrappen.

Voor een vierkante $n \times n$ matrix geldt dat $\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A}$ inverteerbaar

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

Lineaire stelsels met 2 vergelijkingen en 2 onbekenden

Definitie

Een 2×2 **lineair stelsel** in onbekenden x en y is een uitdrukking van de vorm

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases} \qquad \textbf{Voorbeeld:} \begin{cases} x+\ y=\ 5 & (1) \\ x-2y=-4 & (2) \end{cases}$$

Stelsel oplossen: *alle* x en y vinden die aan *beide* vergelijkingen voldoen.

Aantal oplossingen

Het **aantal oplossingen** van een lineair stelsel is nul, één of oneindig, en nooit 2, 3 of 42:

Eén	onafhankelijke vergelijkingen	$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$	of	$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$
Geen	strijdig stelsel	$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$	of	$\begin{cases} x+y=1 \\ \boxed{0=1} \end{cases}$
Oneindig veel	'dubbele' vergelijking	$\begin{cases} x+\ y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$	of	$\begin{cases} x+y=1 \\ \boxed{0=0} \end{cases}$

Oplossen met substitutiemethode

1: **los op** - schrijf met één vergelijking één van de onbekenden in termen van de andere
2: **substitueer** - substitueer die uitdrukking in de andere vergelijking
3: **los op** - los die andere vergelijking op (dat kan nu, want die heeft nog maar één onbekende)
4: **vul in** - en vul die oplossing in in je eerste vergelijking.

Voorbeeld:
$$\begin{cases} x+\ y=\ 5 \\ x-2y=-4 \end{cases} \overset{(1:\text{ los op})}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=5-y \\ x-2y=-4 \end{cases} \overset{(2:\text{ substitueer})}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=5-y \\ (5-y)-2y=-4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=5-y \\ -3y=-9 \end{cases} \overset{(3:\text{ los op})}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=5-y \\ y=3 \end{cases} \overset{(4:\text{ vul in})}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=5-3=2 \\ y=3 \end{cases}$$

De unieke oplossing van het stelsel is het koppel $(x,y)=(2,3)$.

De substitutiemethode is meestal handig bij kleine stelsels, zoals hier bij 2×2.

Oplossen met eliminatiemethode

1: **elimineer** tel bij één van de vergelijkingen een veelvoud van de andere op zodat ofwel x ofwel y verdwijnt
2: **los op** los die vergelijking met enkel x of y op (dat kan nu, want ze heeft nog maar één onbekende)
3: **vul in** en vul die oplossing in in de andere vergelijking.

Voorbeeld:
$$\begin{cases} x+\ y=\ 5 \\ x-2y=-4 \end{cases} \overset{\substack{(1:\text{ elimineer } x \text{ in } (2)) \\ \text{trek vgl (1) af van vgl (2)}}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x+y=5 \\ x-2y-(x+y)=-4-5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ -3y=-9 \end{cases} \overset{(2:\text{ los op})}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=5-y \\ y=3 \end{cases} \overset{(3:\text{ vul in})}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=5-3=2 \\ y=3 \end{cases}$$

Alternatief:
$$\begin{cases} x+\ y=\ 5 \\ x-2y=-4 \end{cases} \overset{\substack{(1:\text{ elimineer } x \text{ in } (1)) \\ \text{trek vgl (2) af van vgl (1)}}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x+y-(x-2y)=5-(-4) \\ x-2y=-4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3y=9 \\ x-2y=-4 \end{cases} \overset{(2:\text{ los op})}{\Longrightarrow} \begin{cases} y=3 \\ x-2y=-4 \end{cases} \overset{(3:\text{ vul in})}{\Longrightarrow} \begin{cases} y=3 \\ x=-4+2\cdot 3=-4+6=2 \end{cases}$$

De unieke oplossing van het stelsel is het koppel $(x,y)=(2,3)$.

De eliminatiemethode veralgemeent naar grotere stelsels, en is handig bij het gebruik van matrices.

Oneindig veel oplossingen: schrijfwijze met parameters

$$\begin{cases} x+\ y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y\ =1 \\ 0=0 \end{cases} \Longrightarrow x+y=1 \Longrightarrow y=1-x \Longrightarrow x=t, y=1-t, t\in\mathbb{R}$$

De oplossingen van het stelsel zijn alle koppels $(x,y)=(t,1-t)$ met $t\in\mathbb{R}$.

Je kan de oplossingen ook schrijven als $(x,y)=(1-t,t), t\in\mathbb{R}$ of als $(x,y)=(s,1-s)$ met $s\in\mathbb{R}$.

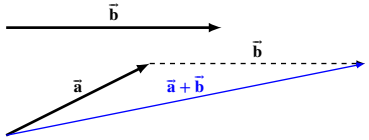
KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

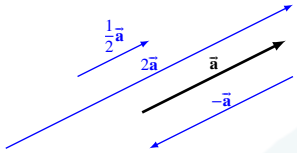
Vectoren

Basisconcepten

Een **(vrije) vector** $\vec{\mathbf{a}}$ is een object met een *grootte*, *richting* en *zin*,
en wordt typisch voorgesteld met een *pijl* (en dus met grootte,richting en zin).

Een **gebonden vector** $\vec{\mathbf{a}}$ is een object met een grootte, richting, zin *en een aangrijpingspunt*.





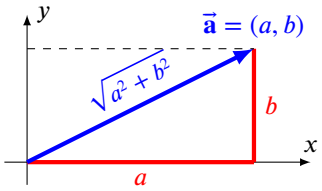
De **som** is de vector $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ die je bekomt door $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$ *achter elkaar te leggen*.
Het **scalair product** van een vector $\vec{\mathbf{a}}$ met een reëel getal r is de *herschaalde* vector $r\vec{\mathbf{a}}$.

Scalair product en norm

Het **scalair product** (ook **inwendig product** of **inproduct** genoemd)
van vectoren $\vec{\mathbf{a}}=(a_1,a_2), \vec{\mathbf{b}}=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$ is het reëel getal

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} = (a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2) \overset{\text{def}}{=} a_1b_1+a_2b_2 \in \mathbb{R}.$$

De *grootte* van een vector $\vec{\mathbf{a}}$ wordt ook zijn **norm** of **lengte** genoemd en genoteerd als $\|\vec{\mathbf{a}}\|$.



Uit Pythagoras volgt dat de norm van
$\vec{\mathbf{a}}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ gegeven is door

$$\|\vec{\mathbf{a}}\| = \|(a,b)\| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Een **eenheidsvector** (soms ook **genormeerde vector**) is een vector met norm of lengte 1.

De norm kan ook uitgedrukt worden in termen van het scalair product: voor $\vec{\mathbf{a}}\in\mathbb{R}^2$ is:

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}} = \|\vec{\mathbf{a}}\|^2 \qquad \text{of} \qquad \|\vec{\mathbf{a}}\| = \sqrt{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}}}$$

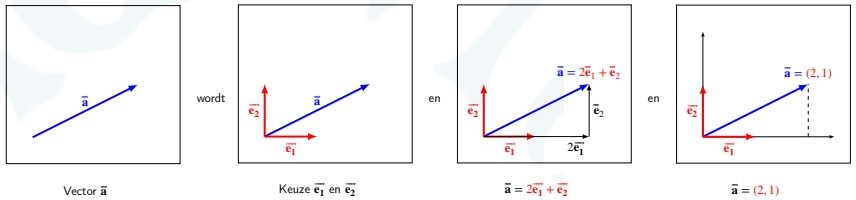
Het scalair product heeft ook een belangrijke meetkundige interpretatie. Voor twee vectoren $\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}\in\mathbb{R}^2$, met θ de hoek tussen de vectoren $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$, geldt:

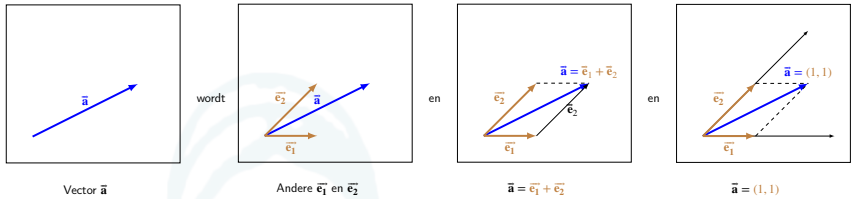
$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} = \|\vec{\mathbf{a}}\|\|\vec{\mathbf{b}}\|\cos\theta$$

Hieruit volgt een criterium voor loodrechte stand: $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=0 \iff \vec{\mathbf{a}}\perp\vec{\mathbf{b}} \iff \cos\theta = 0.$

Assenstelsels, basisvectoren en coördinaten

Twee gebonden vectoren $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$ met hetzelfde beginpunt en die geen veelvoud zijn van elkaar bepalen een **assenstelsel**. Elke vector $\vec{\mathbf{a}}$ van het vlak kan dan op een unieke wijze geschreven worden als $\vec{\mathbf{a}} = a_1\vec{\mathbf{e}}_1 + a_2\vec{\mathbf{e}}_2$. De getallen a_1 en a_2, of ook het koppel (a_1,a_2), zijn de **coördinaten** of de **scalaire componenten** van de vector $\vec{\mathbf{a}}$ ten opzichte van de **basisvectoren** $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$.





Als de basisvectoren $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$ loodrecht op elkaar staan en beide lengte één hebben spreken we van een **orthonormaal**, een **euclidisch** of een **cartesiaans assenstelsel**.

In coördinaten worden som en scalair veelvoud eenvoudig component per component berekend:

$$\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}} = (a_1+b_1)\vec{\mathbf{e}}_1 + (a_2+b_2)\vec{\mathbf{e}}_2 \qquad r\vec{\mathbf{a}} = (ra_1)\vec{\mathbf{e}}_1 + (ra_2)\vec{\mathbf{e}}_2$$

Men gebruikt ook $\vec{\mathbf{e}}_x$ en $\vec{\mathbf{e}}_y$, en dus $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}} = (a_x+b_x)\vec{\mathbf{e}}_x + (a_y+b_y)\vec{\mathbf{e}}_y$.

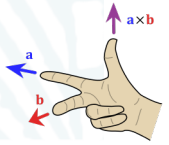
Vectorieel product

Het **vectorieel product** van twee vectoren $\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}$ in $\mathbb{R}^3$ is een nieuwe vector $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}$ in $\mathbb{R}^3$ die loodrecht staat op zowel $\vec{\mathbf{a}}$ als $\vec{\mathbf{b}}$. We definiëren deze bewerking als:

$$\begin{aligned}(a_1,a_2,a_3)\times(b_1,b_2,b_3) &\overset{\text{def}}{=} (\,a_2b_3-a_3b_2,\; a_3b_1-a_1b_3,\; a_1b_2-a_2b_1\,)\\ &= \left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right) \in\mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Als θ de hoek is tussen de vectoren $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$, dan geldt

$$\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}} = \|\vec{\mathbf{a}}\|\cdot\|\vec{\mathbf{b}}\|\cdot\sin\theta\cdot\vec{\mathbf{n}}$$



met $\vec{\mathbf{n}}$ een eenheidsvector loodrecht op $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$ en georiënteerd via de rechterhandregel.

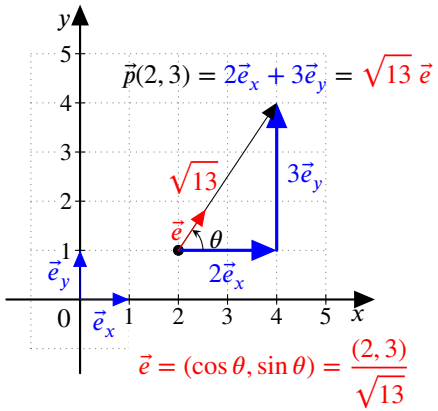
KU Leuven CC BY NC SA 4.0 Laatste 2026/08/04

Vectoren in de 2D ruimte

Definities

cartesiaans (of orthonormaal) assenstelsel:
x- en y-as loodrecht op mekaar
en gelijke eenheden op de assen.

Een **eenheidsvector** $\vec{e}$ is een vector met lengte 1
eenheidsvector $\parallel x$: $\vec{e}_x$
eenheidsvector $\parallel y$: $\vec{e}_y$



Een 2D-vector kan gekarakteriseerd worden door
- OFWEL **cartesiaanse coördinaten**: $\vec{p} = p_x\vec{e}_x + p_y\vec{e}_y = (p_x, p_y)$ met $p_x, p_y \in \mathbb{R}$
- OFWEL **scalaire waarde** ($p \in \mathbb{R}$) en **richting en zin** (eenheidsvector $\vec{e}$): $\vec{p} = p\,\vec{e}$

Een **eenheidsvector** $\vec{e}$ kan bepaald worden op verschillende manieren:
→ via hoek θ die $\vec{e}$ maakt met één van de coördinaatasssen (positieve of negatieve x- of y-as):
als θ hoek met x-as: $\vec{e} = (\pm\cos\theta, \pm\sin\theta)$
als θ hoek met y-as: $\vec{e} = (\pm\sin\theta, \pm\cos\theta)$
De tekens hangen af van de gekozen as en de oriëntatie van de hoek, maak een figuur!

applet: https://www.ijkingstoets.be/ir-ww-applet

→ via een vector $\vec{p}$ met dezelfde richting en zin, $\vec{e} \parallel \vec{p}$: $\vec{e} = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|}$

Het delen van een vector door zijn norm, noemen we het **normeren** van een vector.

→ via de richtingscoëfficiënt m van een rechte met de juiste richting: $\vec{e} = \pm\frac{(1,m)}{\|(1,m)\|}$.

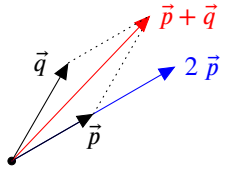
Bewerkingen

norm: $\|\vec{p}\| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$

product van vector $\vec{p}$ met scalar $k \in \mathbb{R}$: $k\vec{p} = (k\,p_x, k\,p_y)$

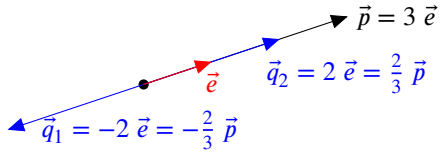
vectorsom: $\vec{p} + \vec{q} = (p_x + q_x, p_y + q_y)$

scalair product: $\vec{p} \cdot \vec{q} = p_x q_x + p_y q_y = \|\vec{p}\|\,\|\vec{q}\|\,\cos\theta$
(met θ de ingesloten hoek tussen $\vec{p}$ en $\vec{q}$)



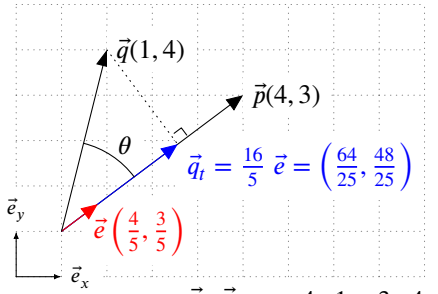
Evenwijdigheid, hoek, loodrechte projectie, loodrechte stand

vector $\vec{q}$ met norm $\|\vec{q}\|$, **evenwijdig** met vector $\vec{p}$:
$\vec{q} = q\,\vec{e}$, met $|q| = \|\vec{q}\|$ en $\vec{e} = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|}$
als $q > 0$: $\vec{q}$ en $\vec{e}$ hebben dezelfde zin
als $q < 0$: $\vec{q}$ en $\vec{e}$ hebben tegengestelde zin



hoek θ tussen de vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$:
$\cos\theta = \frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{\|\vec{p}\|\,\|\vec{q}\|}$

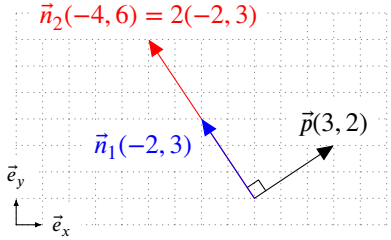
loodrechte projectie van $\vec{q}$ op de as bepaald door de eenheidsvector $\vec{e} \parallel \vec{p}$: $\vec{q}_t = q_t\,\vec{e}$
met $q_t = \vec{q}\cdot\vec{e}$



$\cos\theta = \frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{\|\vec{p}\|\,\|\vec{q}\|} = \frac{4\cdot 1 + 3\cdot 4}{5\cdot\sqrt{17}}$

$q_t = \vec{q}\cdot\vec{e} = 1\cdot\frac{4}{5} + 4\cdot\frac{3}{5} = \frac{16}{5}$

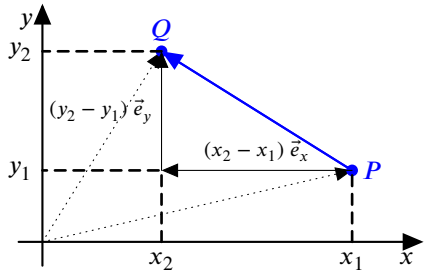
loodrechte stand: $\vec{p} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{p}\cdot\vec{n} = 0$
normaalvector (loodvector) op $\vec{p} = (p_x, p_y)$:
$\vec{n} = k(-p_y, p_x)$, $k \in \mathbb{R}$
$\vec{n} \perp \vec{p}$ want $\vec{n}\cdot\vec{p} = -kp_yp_x + kp_xp_y = 0$.
Slagzin: Wissel de twee coördinaten van $\vec{p}$, verander één coördinaat van teken, en schaal eventueel met een factor k.



Punten in het vlak

Een **punt** in het vlak kan beschreven worden als een vector van de oorsprong van het assenstelsel naar het punt: $P = \overrightarrow{OP}$.

De vector van $P(x_1, y_1)$ naar $Q(x_2, y_2)$ kan geschreven worden als $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = Q - P$
en heeft coördinaten $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.



De **afstand** tussen het punt $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$ kan bijgevolg berekend worden als
$d(P,Q) = |PQ| = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|Q - P\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

Veeltermen, vergelijkingen en ongelijkheden

Definitie veelterm

eerstegraadsveelterm $p(x) = ax + b$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$

tweedegraadsveelterm $p(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$

n-de graadsveelterm $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ $\quad a_i \in \mathbb{R}$ en $a_n \neq 0$

De $a_i x^i$ zijn de **termen** van de veelterm, de a_i zijn de **coëfficiënten**, en n is de **graad**.

Definitie nulpunt – Ontbinden in factoren

Een getal a is een **nulpunt** (ook **nulwaarde** of **wortel**) van veelterm $p(x)$ als $p(a) = 0$.
De nulpunten van een veelterm zijn dus de **oplossingen van de vergelijking** $p(x) = 0$.

Een veelterm $d(x)$ is een **factor** (of **deler**) van een veelterm $p(x)$ als $p(x) = d(x) \cdot q(x)$ voor een zekere veelterm $q(x)$.
Een getal a is een nulpunt van $p(x)$ als en slechts als $x - a$ een factor is van $p(x)$.

Een veelterm $p(x)$ **ontbinden in factoren** betekent $p(x)$ schrijven als een product van zo veel mogelijk niet-constante factoren.

Nulpunten van een tweedegraadsveelterm

Nulpunten van de veelterm $ax^2 + bx + c$ worden berekend met de **discriminant** $D = b^2 - 4ac$:

- $D > 0$: **twee verschillende reële** nulpunten,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{(wortelformule)}$$

- $D = 0$: **twee gelijke** nulpunten: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ (ook: één nulpunt met **multipliciteit** 2),
- $D < 0$: **geen reële** nulpunten.

Gehele nulpunten en delers van de constante term

***Gehele* nulpunten** van veeltermen met **gehele** coëfficiënten **delen de constante term**.

Vb $p(x) = x^2 - 5x + 6$: de gehele nulpunten 2 en 3 delen constante term 6.
Ook $1, 6, -1, -2, -3$ en -6 delen de constante term, maar het zijn *geen* nulpunten.

Vb $p(x) = x^2 - 2$: *geen gehele* nulpunten, wel $\pm\sqrt{2}$. *Geen enkele* deler van 2 is nulpunt.

Rekenschema van Horner voor ontbinden in factoren

Het **algoritme van Horner** berekent voor een veelterm $p(x)$ met nulpunt a de factorisatie

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x)$$

als volgt:

	a_n	a_{n-1}	…	a_1	a_0	(1)
a		$a \cdot a_n$	…	…	…	(2)
	a_n	$a_{n-1} + a \cdot a_n$	…	…	0	(3)

(a) Schrijf alle coëfficiënten van de veelterm $p(x)$ op een rij, achter een verticale lijn.
Schrijf hieronder op rij twee, *voor* de verticale lijn, het nulpunt a.
Kopieer de eerste coëfficiënt naar de eerste plaats achter de verticale lijn van rij drie.

(b) Vermenigvuldig nu telkens het getal in rij (3) met a,
en schrijf het product één kolom verder in rij (2).

(c) Schrijf de som van de twee getallen in deze kolom in rij (3).
Herhaal (b) en (c) voor elke kolom. De som in de laatste kolom *moet* nul zijn.

(d) In rij (3) staan nu de coëfficiënten van $q(x)$ (negeer de laatste nul).

Voorbeeld: voor $p(x) = x^4 - 6x^2 + 8$ en $a = 2$ vinden we $q(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 4$
en dus de ontbinding $x^4 - 6x^2 + 8 = (x - 2)(x^3 + 2x^2 - 2x - 4)$.

	1	0	−6	0	8
2		2	4	−4	−8
	1	2	−2	−4	0

Coëfficiënten van $p(x)$
(telkens 2× *vorige* getal van rij (3))
Coëfficiënten van $q(x)$

Veeltermongelijkheden oplossen via een tekentabel

Een veeltermongelijkheid zoals $x^3 - 12x^2 < -39x + 28$ los je op als volgt:

(a) breng alle termen naar dezelfde kant van het ongelijksheidsteken
(bv. het linkerlid, waar dan een *veelterm* komt te staan).

(b) bepaal de **nulpunten** (want enkel daar kan de veelterm eventueel van teken veranderen).

(c) stel een **tekentabel** op (apart voor elke factor en tekens vermenigvuldigen).

(d) bepaal in die tekentabel de zones voor de gevraagde ongelijkheid ($> 0, \geq 0, < 0, \leq 0$).

x		1		4		7	
$x - 1$	−	0	+	+	+	+	+
$x - 4$	−	−	−	0	+	+	+
$x - 7$	−	−	−	−	−	0	+
$(x-1)(x-4)(x-7)$	$\underbrace{-}_{<0}$	0	+	0	$\underbrace{-}_{<0}$	0	+

De oplossingenverzameling van de ongelijkheid is dus: $]-\infty, 1[\cup]4, 7[$.

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04