KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Xoverzicht: Complexe getallen

(Versie 2026/10/26.13)

Inhoudsopgave

1.1 Complexe getallen

Veeltermvergelijkingen hebben niet altijd reële oplossingen. Zo hebben vierkantsvergelijkingen met een negatieve discriminant geen reële wortels. Een erg eenvoudig voorbeeld is de vergelijking $x^2 + 1 = 0$ of, anders geschreven, $x^2 = -1$. Deze vergelijking heeft geen reële wortels, omdat het kwadraat van een reëel getal nooit negatief kan zijn, en dus nooit gelijk aan -1.

De zogenaamde *complexe getallen* vormen een uitbreiding van de reële getallen. Aan de reële getallen wordt een nieuw 'getal' toegevoegd dat traditioneel i genoemd wordt, en i is *per definitie* een oplossing van de vergelijking $x^2 + 1 = 0$. Er geldt dus per definitie dat $i^2 = -1$. Het is een hoogst merkwaardig feit dat door een oplossing van deze vergelijking $x^2 + 1 = 0$ toe te voegen, ineens *alle* veeltermvergelijkingen met reële coëfficiënten oplossingen blijken te hebben.

Definitie 1.1.1.

Een **complex getal** is een uitdrukking $a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en waarbij $i^2 = -1$. Het symbool i is de **imaginaire eenheid**. De verzameling van alle complexe getallen noemen we $\mathbb{C}$.

Per definitie zijn twee complexe getallen $a + bi$ en $c + di$ enkel aan elkaar gelijk als $a = c$ en $b = d$.

Een willekeurig complex getal wordt dikwijls genoteerd met z. Als $z = a + bi$, dan

- is a het **reëel deel** van z, genoteerd als $\mathrm{Re}(z) \overset{\text{def}}{=} a$.
- is b het **imaginair deel** van z, genoteerd als $\mathrm{Im}(z) \overset{\text{def}}{=} b$.
- Als $b = 0$, dan is $z = a$ een **(zuiver) reëel getal** (en $\mathbb{R}$ is dus een deelverzameling van $\mathbb{C}$).
- Als $a = 0$, dan is $z = bi$ een **(zuiver) imaginair getal**.

Voorbeeld 1.1.1. Volgende uitdrukkingen zijn allemaal complexe getallen:

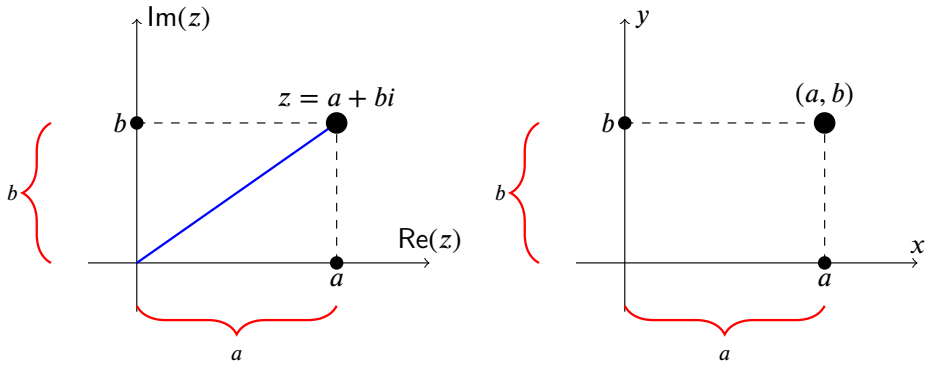
(a) $2 + 3i$ (c) $42i$ (e) $1 + i\sqrt{2}$

(b) 42 (d) $1 + \pi$ (f) $\dfrac{1 - i\sqrt{5}}{2}$

De getallen 42 en $1 + \pi$ zijn zuiver reële getallen, en $42i$ is een zuiver imaginair getal.

1.1.1 Het complexe vlak

We kunnen met elk complex getal $z = a + bi$ een uniek koppel (a, b) associëren. Op die manier kan een complex getal z ook voorgesteld worden als een punt in het vlak, met x-coördinaat a en y-coördinaat b:



CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Complexe getallen

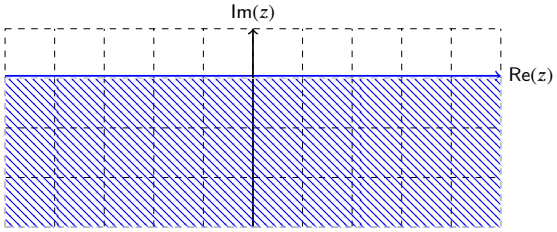
Als we het vlak op deze manier bekijken als de verzameling van de complexe getallen, spreken we van het **complexe vlak**. Het getal i komt daarbij overeen met het koppel $(0,1)$ op de y-as.

YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=Ho_oadFkm1o

Oefening 1.1.1. Schets in het complexe vlak de gebieden omschreven door volgende vergelijkingen:

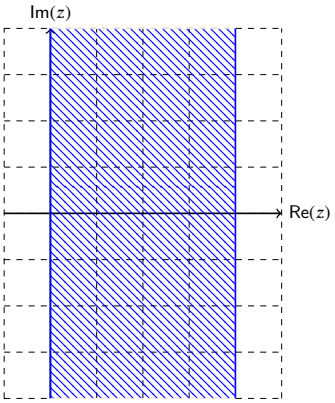
1. $\mathrm{Im}(z) \leq 0$

Uitwerking: Als $z = a + bi$, dan betekent $\mathrm{Im}(z) \leq 0$ dat $b \leq 0$ en dat geeft het halfvlak onder de x-as:



2. $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 4$

Uitwerking: Deze ongelijkheden bepalen een *verticale* strook, aangezien het reële deel van het complex getal in een interval moet liggen. De randen van de strook behoren tot het geschetste domein.



1.1.2 Rekenen met complexe getallen

Voor complexe getallen kan, met de gebruikelijke rekenregels, de optelling en vermenigvuldiging gedefinieerd worden, waarbij steeds i^2 vervangen wordt door -1.

Definitie 1.1.2 (Som en product)**.**

Als $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$, en dus $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ geldt:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) \overset{\text{def}}{=} (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

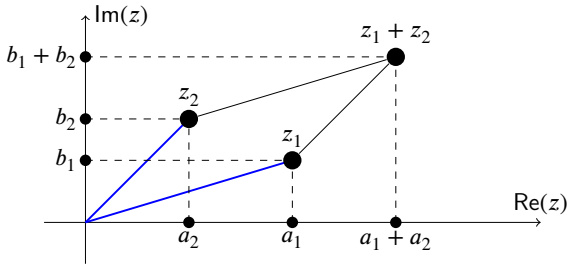
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) \overset{\text{def}}{=} a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{i^2=-1} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Meetkundig is de optelling van complexe getallen hetzelfde als de optelling van vectoren in het vlak: het

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Complexe getallen

komt neer op de parallellogramregel:



Opmerking 1.1.1.

- Een complex getal kan per definitie op een unieke manier geschreven worden als $a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$. Dus $1, i, 1+i, 1+3i$ zijn allemaal complexe getallen die we niet eenvoudiger kunnen schrijven. Maar $2i+3+i, i(1+i)$ en $(1+i)(1-i)$ zijn complexe getallen die we wel eenvoudiger kunnen schrijven als $2i+3+i = 3+3i, \quad i(1+i) = i+i^2 = -1+i, \quad (1+i)(1-i) = 1-i^2 = 1+1 = 2$.
- Als je twee complexe getallen kan optellen, is het ook eenvoudig om ze van elkaar af te trekken: $(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$. Je kan twee complexe getallen ook *delen* door elkaar, dit wordt later uitgelegd.
- Ingenieurs gebruiken meestal de letter j in plaats van i, onder meer om verwarring te voorkomen met de elektrische stroom i. Dan geldt dus $j^2 = -1$, en $z = a + bj \in \mathbb{C}$.
- Men kan aantonen dat de verzameling $\mathbb{C}$ **niet totaal kan geordend worden** zoals $\mathbb{Q}$ of $\mathbb{R}$. Hiermee wordt bedoeld dat het niet mogelijk is om een definitie te vinden voor $a + bi < c + di$ die zou voldoen aan dezelfde eigenschappen als de ongelijkheid $<$ in $\mathbb{R}$ of $\mathbb{Q}$. Je kan van twee complexe getallen dus niet zeggen welk "het kleinsteïs.
  In het bijzonder heeft het geen betekenis om te vragen of $2+3i$ *positief* of *negatief* is. Zo kan je ook niet zeggen dat $1+i$ *positief* is en $-1-i$ *negatief*, maar wel dat ze elkaars *tegengestelde* zijn. Hetzelfde geldt zelfs voor i: het heeft geen betekenis om te beweren dat i positief is, en $-i$ negatief. Het heeft wel betekenis om te zeggen dat i en $-i$ elkaars tegengestelde zijn.

Oefening 1.1.2.

1. $(1 + 2i) + (3 + 4i) = 4 + 6i$

2. $(1 + 2i) \cdot (3 + 4i) = -5 + 10i$

Uitwerking: $(1 + 2i) \cdot (3 + 4i) = 3 + 4i + 2i \cdot 3 + 2i \cdot 4i = -5 + 10i$

3. $(1 + 2i) \cdot (1 - 2i) = 5$

Uitwerking: Haakjes uitwerken, of eenvoudiger via $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ wat ook geldt voor complexe getallen:

$$(1 + 2i) \cdot (1 - 2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 + 4 = 5$$

4. $(1 + 2i) \cdot \dfrac{1 - 2i}{2} = \dfrac{5}{2}$

5. $(1 + 2i) \cdot i = -2 + i$

6. $i^3 = -i$

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Complexe getallen

Uitwerking: $i^3 = i \cdot i^2 = -i$

7. $i^4 = 1$

Uitwerking: $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$ of $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

1.1.3 Modulus en complex toegevoegde

Complexe getallen zijn niet alleen 'samengesteld', maar toch ook net iets 'complexer' dan reële getallen. Om ze te bestuderen beschikken we over twee nieuwe begrippen. Het eerste, de *modulus*, is een veralgemening van de absolute waarde van reële getallen. Het tweede, de zogenaamde *complex toegevoegde*, heeft niet direct een analoog voor de reële getallen:

Definitie 1.1.3 (Modulus en complex toegevoegde)**.**

De **modulus** (of **norm**) van een complex getal $z = a + bi$, genoteerd $|z|$, is het *positief reëel* getal

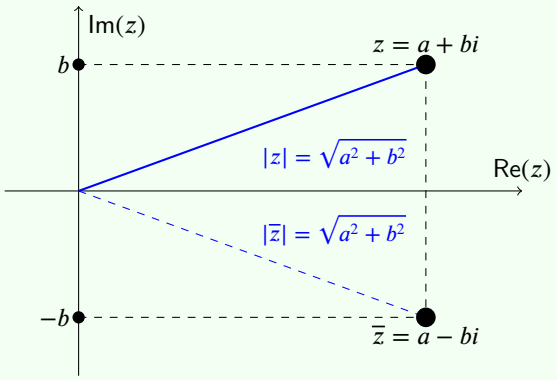
$$|z| \overset{\text{def}}{=} \boxed{|a+bi| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{a^2+b^2}}.$$

De modulus is meetkundig *de afstand tot de oorsprong*.

De **complex toegevoegde** van een complex getal $z = a + bi$, genoteerd als $\overline{z}$, is

$$\overline{z} \overset{\text{def}}{=} \boxed{\overline{a+bi} \overset{\text{def}}{=} a - bi}.$$

We noemen z en $\overline{z}$ **complex toegevoegd** (aan elkaar), en beide zijn elkaars spiegeling over de x-as.



Opmerking 1.1.2. Soms noteert men ook z^* in plaats van $\overline{z}$.

Voorbeeld 1.1.2.

1. $\overline{3-4i} = 3+4i$

2. $|3-4i| = 5$

3. $|i| = 1$

4. $|-i| = 1$

5. $|-2| = 2$

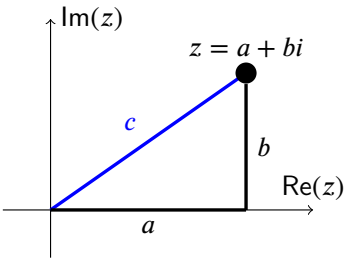
6. $|-1| + |1| = 2$

De modulus $|z|$ is de afstand van z tot de oorsprong in het complexe vlak.

Dit volgt uit de stelling van Pythagoras in onderstaande driehoek, waar $|z|^2 = c^2 = a^2 + b^2$:

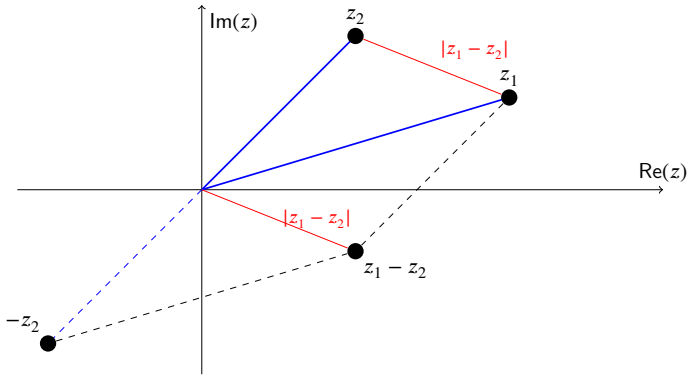
CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Complexe getallen



$|z_1 - z_2|$ is de afstand tussen z_1 en z_2 in het complexe vlak.

Dit volgt uit het feit dat $z_1 - z_2$ wegens de parallellogramregel als vector gelijk is aan de vector tussen z_1 en z_2.



De meetkundige betekenis van de modulus en complex toegevoegde wordt ook uitgelegd in onderstaande video:

YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=uSl9oLBjw1U

Eigenschap 1.1.1 (Eigenschappen modulus)**.** Voor complexe getallen $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ geldt

(a) $|z|$ is de afstand van z tot de oorsprong.

(b) $|z_1 - z_2|$ is de afstand tussen z_1 en z_2.

(c) $|z| = |-z| = |\overline{z}|$.

(d) $|z| = 0 \iff z = 0$.

(e) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

LET OP: in het algemeen geldt niet ~~$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$~~ (want bv. $0 = |1+(-1)| \neq |1|+|-1| = 2$)

Oefening 1.1.3. Bereken voor een complex getal $z = a + bi \in \mathbb{C}$ volgende uitdrukkingen:

1. $z + \overline{z} = 2a$

Uitwerking: $z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$

2. $z - \overline{z} = 2bi$

Uitwerking: $z - \overline{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$

3. $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Complexe getallen

Uitwerking: $z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$

4. $|z|^2 = a^2 + b^2$

Uitwerking: $|z|^2 = (\sqrt{a^2+b^2})^2 = a^2 + b^2$

Hiermee zijn volgende eigenschappen aangetoond die een complex getal combineren met zijn complex toegevoegde:

Eigenschap 1.1.2 (Eigenschappen van complex toevoegen)**.**

Voor een complex getal $z = a + bi$ geldt dat

$$\begin{array}{rclcrcl} z+\overline{z} & = & 2\mathrm{Re}(z) & \text{en} & z-\overline{z} & = & 2i\mathrm{Im}(z) \\ z\overline{z} & = & |z|^2 & & & & \end{array}$$

In het bijzonder zijn zowel de som als het product van een getal en zijn complex toegevoegde steeds *reëel*. Dat $z\overline{z}$ een reëel getal is kunnen we gebruiken om het quotiënt van twee complexe getallen te berekenen. We nemen als voorbeeld

$$\frac{3+2i}{1-5i}.$$

De deling van deze twee complexe getallen is opnieuw een complex getal. De deling uitvoeren wil zeggen $\dfrac{3+2i}{1-5i}$ schrijven in de vorm $a+bi$. Als we teller en noemer vermenigvuldigen met het complex toegevoegde van de noemer verdwijnt de i in de noemer en krijgen we een complex getal van de vorm $a+bi$:

$$\frac{3+2i}{1-5i} = \frac{(3+2i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)} = \frac{3+15i+2i+10i^2}{1+5i-5i-25i^2} = \frac{-7+17i}{26} = -\frac{7}{26} + \frac{17}{26}i$$

Merk op dat dit volledig analoog is met het verdrijven van wortelvormen als $2+3\sqrt{2}$ uit de noemer door teller en noemer te vermenigvuldigen met de zogenaamde *toegevoegde tweeterm* $2-3\sqrt{2}$.

Oefening 1.1.4. Schrijf volgende uitdrukkingen als een complex getal van de vorm $a+bi$:

1. $\dfrac{1}{1+2i} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$

Uitwerking: We vermenigvuldigen teller en noemer met $\overline{1+2i} = 1-2i$. In de noemer komt dan $(1-2i)(1+2i) = 5$:

$$\frac{1}{1+2i} = \frac{1}{1+2i}\frac{1-2i}{1-2i} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

2. $\dfrac{1+2i}{3+4i} = \dfrac{11}{25} + \dfrac{2}{25}i$

Uitwerking: We vermenigvuldigen teller en noemer met $\overline{3+4i} = 3-4i$. In de noemer komt dan $(3+4i)(3-4i) = 25$:

$$\frac{1+2i}{3+4i} = \frac{1+2i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{11+2i}{25} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$$

3. $\dfrac{3+4i}{1+2i} = \dfrac{11}{5} - \dfrac{2}{5}i$

Uitwerking: We vermenigvuldigen teller en noemer met $\overline{1+2i} = 1-2i$. In de noemer komt dan $(1+2i)(1-2i) = 5$:

$$\frac{3+4i}{1+2i} = \frac{3+4i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{11-2i}{5} = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Complexe getallen

Complex toevoegen werkt erg goed samen met de basisbewerkingen $+, -, \cdot$ en $\div$. We vermelden hier nog enkele eigenschappen:

Eigenschap 1.1.3 (Eigenschappen van complex toevoegen)**.**

Voor complexe getallen z_1 en z_2 geldt dat

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{en} \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad \text{en} \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

1.1.4 Vierkantsvergelijkingen

Voorbeeld 1.1.3. Bepaal alle oplossingen van volgende veeltermvergelijkingen.

1. $x^2 = 64$. Antwoord: $x = \pm 8$.

2. $x^2 = -64$. Antwoord: $x = \pm 8i$.

Uitwerking: Schrijf -1 als i^2, dan wordt de vergelijking $x^2 = (i\,8)^2$ met oplossingen $x = 8i$, en $x = -8i$.

3. $x^2 = -3$. Antwoord: $x = \pm i\sqrt{3}$.

Uitwerking: Schrijf -1 als i^2, dan wordt de vergelijking $x^2 = (i\sqrt{3})^2$ met oplossingen $x = i\sqrt{3}$, en $x = -i\sqrt{3}$.

We kunnen dus complexe getallen vinden waarvan het kwadraat een negatief reëel getal is. Stel dat we een vierkantsvergelijking hebben met negatieve disciminant D, bijvoorbeeld

$$z^2 + z + 1 = 0$$

met

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3,$$

dan zijn er geen reële oplossingen, maar kunnen we toch twee complexe oplossingen vinden. We weten dat $D = -3 = (i\sqrt{3})^2$, of ook $i\sqrt{3} = i\sqrt{-D}$ want $-D = 3$. We spreken af om het symbool $\sqrt{\cdot}$ enkel te gebruiken voor positieve reële getallen, niet voor complexe getallen, maar in andere cursussen kunnen andere afspraken gemaakt worden. De oplossingen van de vierkantsvergelijking zijn

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{en} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Inderdaad $z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ is een oplossing van $z^2 + z + 1 = 0$ want

$$\begin{aligned}\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + 1 &= \frac{(-1 + i\sqrt{3})(-1 + i\sqrt{3})}{4} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + 1 \\ &= \frac{1 - i\,2\sqrt{3} - 3}{4} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + 1 \\ &= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{-2}{2} + 1 = 0.\end{aligned}$$

Met een analoge berekening kan je nagaan dat ook z_2 een oplossing is van $z^2 + z + 1 = 0$.

Zo maken de complexe getallen de theorie van het oplossen van vergelijkingen in zekere zin makkelijker. Bij vierkantsvergelijkingen moeten we geen gevalsonderscheid meer maken naargelang de waarde van de

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Complexe getallen

discriminant $D = b^2 - 4ac$. Bij $D < 0$ zijn de oplossingen dan geen reële getallen, maar twee complexe getallen.

Eigenschap 1.1.4 (Oplossen van vierkantsvergelijkingen met negatieve discriminant)**.**

De twee oplossingen z_1 en z_2 van een vierkantsvergelijking $az^2 + bz + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ met discriminant $D = b^2 - 4ac < 0$ zijn

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}$$

Oefening 1.1.5. Los volgende vergelijkingen op over de complexe getallen

1. $x^2 + 4 = 0$. Antwoord: $\pm 2i$

2. $x^2 + 2x + 5 = 0$. Antwoord: $-1 \pm 2i$

Uitwerking: De disciminant is $D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$ en dus zijn de oplossingen

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-2 \pm i\sqrt{16}}{2} = -1 \pm 2i$$

3. $x^2 + 3x + 7 = 0$. Antwoord: $-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2}i$

Uitwerking: De vergelijking is van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$, met $a = 1$, $b = 3$ en $c = 7$. Dan is $D = b^2 - 4ac = 9 - 28 = -19$. Omdat $D < 0$, zijn er twee complexe oplossingen. De oplossingen zijn

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{19}i}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}i, \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{19}i}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}i\,.$$

In de verzameling van de complexe getallen heeft een vierkantsvergelijking dus steeds twee al dan niet samenvallende oplossingen. Of anders geformuleerd: een tweedegraadsveelterm heeft steeds 2 al dan niet samenvallende nulpunten, indien ook complexe getallen als nulpunten toegelaten zijn. Dit kunnen we veralgemenen tot n-de graadsveeltermen, waarbij we ook toelaten dat de coëfficiënten complexe getallen zijn:

Eigenschap 1.1.5 (Hoofdstelling van de algebra)**.** Voor een veelterm $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ met coëfficiënten $a_i \in \mathbb{C}$
bestaan er n complexe getallen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, (niet noodzakelijk allemaal onderling verschillend) zodat

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 + a_0 = a_n(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n)$$

Bijgevolg zijn $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ oplossingen van de vergelijking

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

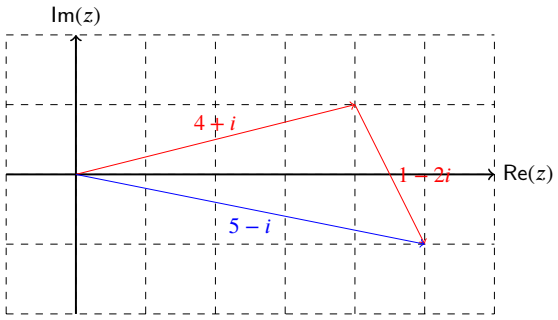
CC BY-NC-SA 4.0

1.1.A Basisoefeningen complexe getallen

Oefening 1.1.6. Bereken volgende uitdrukkingen. Schrijf de complexe getallen in de vorm $a + bi$.

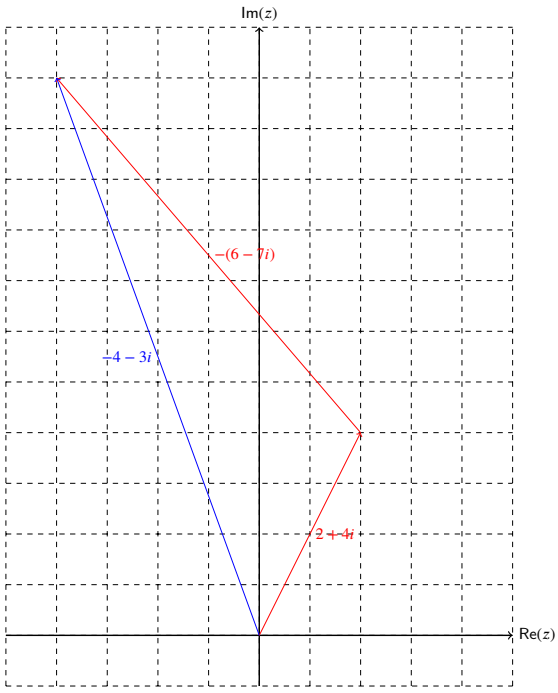
1. $(4 + i) + (1 - 2i) = 5 - i$

Uitwerking: Je kan ofwel reëel en imaginair deel van beide complexe getallen bij elkaar optellen om het antwoord te vinden, ofwel in het complexe vlak de vectorsom maken.



2. $(2 + 4i) - (6 - 7i) = -4 + 11i$

Uitwerking: Je kan ofwel reëel en imaginair deel van beide complexe getallen bij elkaar optellen om het antwoord te vinden, ofwel in het complexe vlak de vectorsom maken.



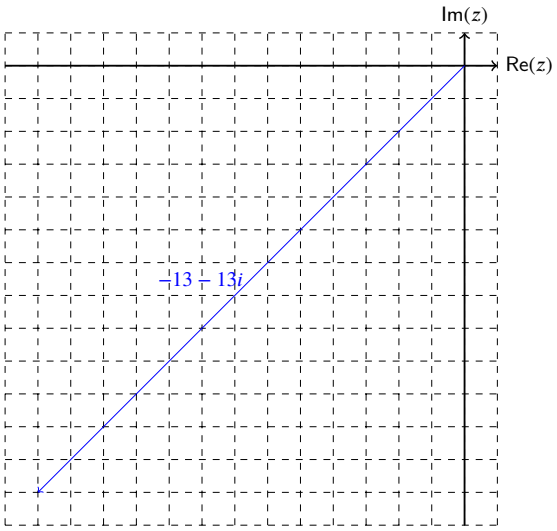
3. $(2 + 3i)(-5 + i) = -13 - 13i$

Uitwerking:

$$(2 + 3i)(-5 + i) = -5 + 2i + 3i \cdot (-5)3i \cdot i = -13 - 13i$$

CC BY-NC-SA 4.0

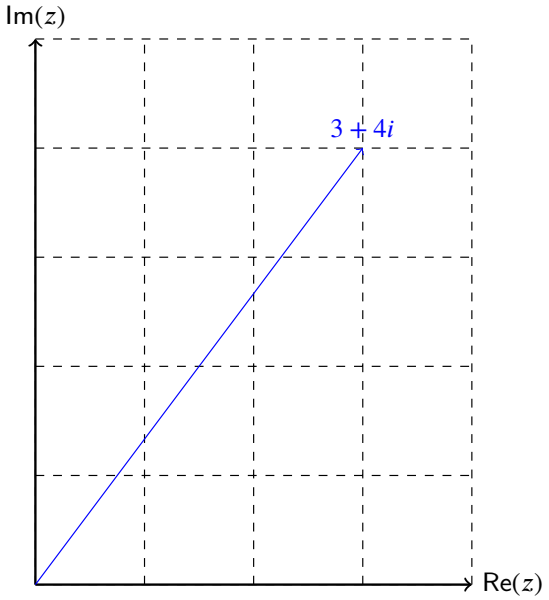
1.1.A Basisoefeningen complexe getallen



4. $(2+i)^2 = 3+4i$

Uitwerking:

$$(2+i)^2 = 4+4i+i^2 = 3+4i$$

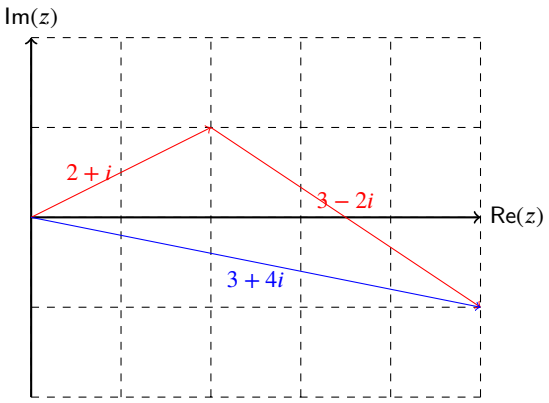


5. $(2+i)+\overline{(3+2i)} = 5-i$

Uitwerking: Merk op dat $\overline{3+2i} = 3-2i$. Dus moeten we de som $(2+i)+(3-2i)$ bepalen. Je kan ofwel reëel en imaginair deel van beide complexe getallen bij elkaar optellen om het antwoord te vinden, ofwel in het complexe vlak de vectorsom maken.

CC BY-NC-SA 4.0

1.1.A Basisoefeningen complexe getallen



6. $(5-6i)(5+6i) = 61$

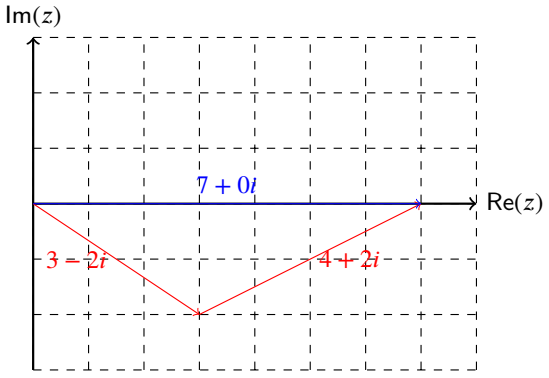
Uitwerking: Je kan de rekenregel $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ gebruiken. Dan is $(5-6i)(5+6i) = 25+36 = 61$.

7. $|3-2i| = \sqrt{13}$

Uitwerking: $|3-2i| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

8. $|3-2i+\overline{4-2i}| = 7$

Uitwerking: Merk eerst op dat $\overline{4-2i} = 4+2i$. Je kan ofwel reëel en imaginair deel van beide complexe getallen bij elkaar optellen om de som van twee complexe getallen te vinden, ofwel in het complexe vlak de vectorsom maken.



9. $|3+4i+4+3i| = 7\sqrt{2}$

Uitwerking: $|3+4i+4+3i| = |7+7i| = \sqrt{49+49} = 7\sqrt{2}$.

10. $|3+4i| + |4+3i| = 10$

Uitwerking: $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$
$|4+3i| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

11. $\left|\dfrac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}\right| = \dfrac{5}{2}$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.13)

1.1.A Basisoefeningen complexe getallen

Oefening 1.1.7. Een complex getal z kunnen we schrijven als $z = a + bi$ met a en b reële getallen en $i^2 = -1$. Dan zijn er onder de lijst van complexe getallen

$$\frac{(1+i)^4}{4}, \quad \frac{(1-i)^4}{4}, \quad \frac{(1+i)^2}{2}, \quad \frac{(1-i)^2}{2}, \quad i^2$$

precies 3 die gelijk zijn aan -1.

Uitwerking: Er is al minstens één van deze complexe getallen gelijk aan -1: de laatste, i^2, per definitie van de imaginaire eenheid.

Je kan best te werk gaan door de derde en vierde uitdrukking te bepalen: de eerste twee complexe getallen zijn hun kwadraten. Hiervoor maken we de volgende berekeningen:

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$$
$$(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$$

en dus vinden we dat

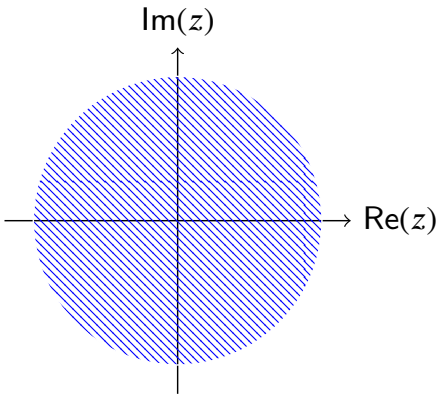
$$\frac{(1+i)^2}{2} = i$$
$$\frac{(1-i)^2}{2} = -i$$

Het derde en vierde complexe getal zijn dus niet gelijk aan -1. Hun kwadraten zijn echter wel gelijk aan -1: drie van de complexe getallen zijn dus gelijk aan -1.

Oefening 1.1.8. Schets in het complexe vlak de gebieden omschreven door volgende vergelijkingen:

1. $|z| < 1$

Uitwerking: $|z|$ is de afstand van z tot de oorsprong. Alle complexe getallen waarvan de afstand tot de oorsprong kleiner is dan 1 liggen *binnen* een cirkel met straal 1, de rand zelf wordt dus niet meegerekend:

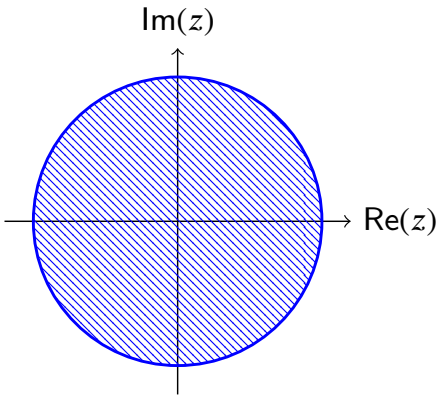


2. $|z| \leq 1$

Uitwerking: $|z|$ is de afstand van z tot de oorsprong. Alle complexe getallen waarvan de afstand tot de oorsprong kleiner is dan of gelijk is aan 1 liggen *binnen* een cirkel met straal 1 waarbij de rand zelf wordt meegerekend:

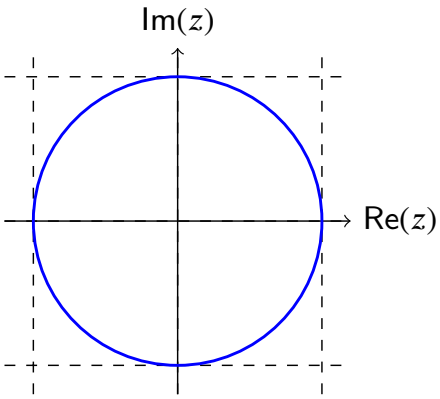
CC BY-NC-SA 4.0

1.1.A Basisoefeningen complexe getallen



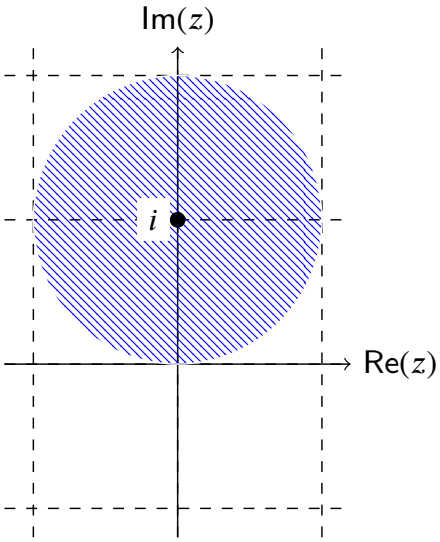
3. $|z| = 1$

Uitwerking: $|z|$ is de afstand van z tot de oorsprong. Alle complexe getallen waarvan de afstand tot de oorsprong gelijk is aan 1 liggen dus op een cirkel met straal 1:



4. $|z - i| < 1$

Uitwerking: Alle complexe getallen waarvoor $|z - i| < 1$ zijn alle complexe getallen z waarvoor de afstand tot i kleiner is dan 1:

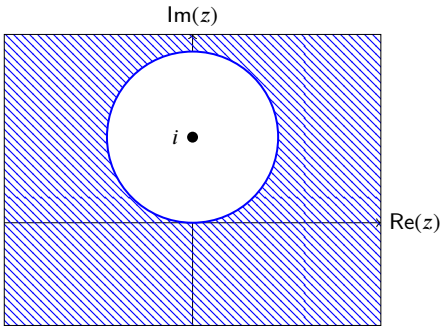


CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.13)

1.1.A Basisoefeningen complexe getallen

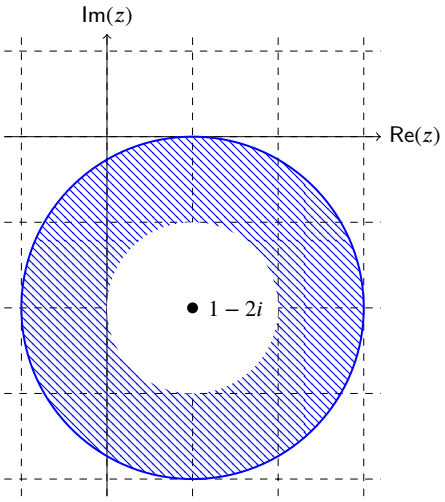
5. $|z-i| \geq 1$

Uitwerking: Alle complexe getallen waarvoor $|z-i| \geq 1$ zijn alle complexe getallen z waarvoor de afstand tot i groter of gelijk is aan 1:



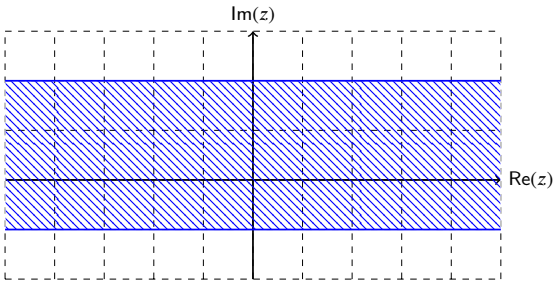
6. $1 < |z+2i-1| \leq 2$

Uitwerking: $1 < |z+2i-1| \leq 2$ kunnen we herschrijven als $1 < |z-(1-2i)| \leq 2$. Alle complexe getallen waarvoor $1 < |z+2i-1| \leq 2$ zijn alle complexe getallen z waarvoor de afstand tot $(1-2i)$ groter is dan 1 en kleiner of gelijk is aan 2:



7. $-1 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 2$

Uitwerking: Deze ongelijkheden bepalen een *horizontale* strook, aangezien het imaginaire deel van het complex getal in een interval moet liggen. De randen van de strook behoren tot het geschetste domein.

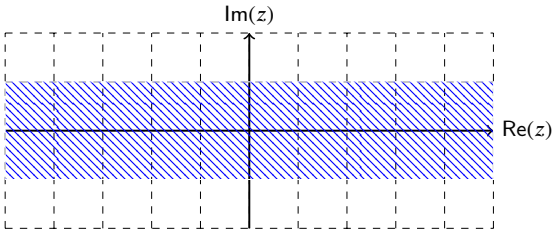


CC BY-NC-SA 4.0

1.1.A Basisoefeningen complexe getallen

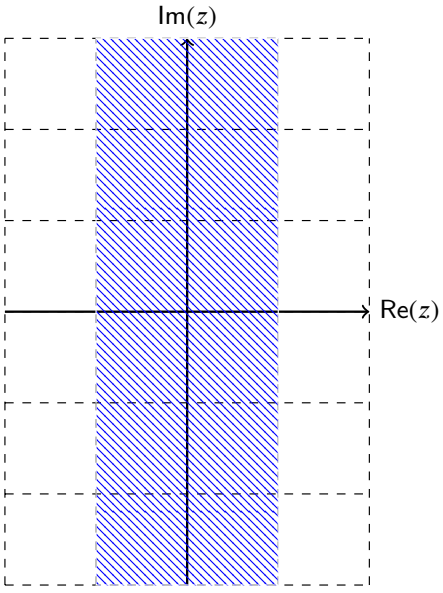
8. $|\mathrm{Im}(z) - i| < \sqrt{2}$

Uitwerking: Als $z = a+bi$, dan betekent $|\mathrm{Im}(z)-i| < \sqrt{2}$ dat $|b-i| < \sqrt{2}$. Wegens de definitie van modulus is $|b-i| = \sqrt{b^2+(-1)^2}$. De ongelijkheid wordt dus $\sqrt{b^2+1} < \sqrt{2}$, en kwadrateren geeft dan de voorwaarde $b^2+1 < 2$ ofwel $b^2 < 1$. Aangezien $b = \mathrm{Im}(z)$, is dit gebied precies de horizontale strook $-1 < \mathrm{Im}(z) < 1$. Merk op dat dit symmetrisch is rond de x-as.



9. $|\mathrm{Re}(z) - i| < \sqrt{2}$

Uitwerking: Als $z = a+bi$, dan betekent $|\mathrm{Re}(z)-i| < \sqrt{2}$ dat $|a-i| < \sqrt{2}$. De berekening van de modulus geeft $\sqrt{a^2+(-1)^2} < \sqrt{2}$. Na kwadrateren geeft dit $a^2+1 < 2$ of dus $-1 < a < 1$. Aangezien $\mathrm{Re}(z) = a$, is dit gebied precies de verticale strook $-1 < \mathrm{Re}(z) < 1$. Merk op dat dit symmetrisch is rond de y-as.

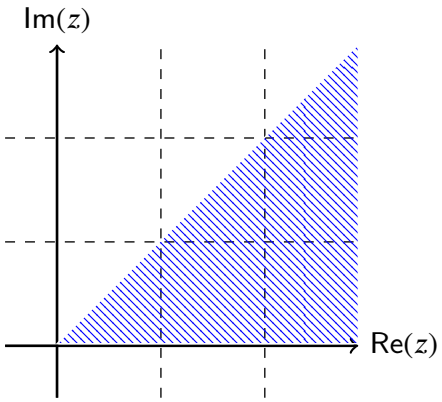


10. $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z) > 0$

Uitwerking: Als $z = a+bi$, dan betekent $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z) > 0$ dat $a > b > 0$. Dit is het gebied onder de rechte $y = x$, (daar is $a > b$), en boven de x-as (daar is $b > 0$):

CC BY-NC-SA 4.0

1.1.A Basisoefeningen complexe getallen



Oefening 1.1.9. Voer volgende delingen uit door de opgave te schrijven in de vorm $a+bi$.

1. $\dfrac{7}{i} = -7i$

Uitwerking: We vermenigvuldigen teller en noemer met $\bar{i} = -i$. In de noemer krijgen we dan $i \cdot (-i) = 1$. Het resultaat is $-7i$. Voor oefeningen kan het handig zijn om te onthouden dat *delen door i hetzelfde is als vermenigvuldigen met $-i$*.

2. $\dfrac{1}{5+2i} = \dfrac{5}{29} - \dfrac{2}{29}i$

Uitwerking: We vermenigvuldigen teller en noemer met $\overline{5+2i} = 5-2i$. In de noemer krijgen we dan $(5+2i)(5-2i) = 29$.

$$\frac{1}{5+2i} = \frac{1}{5+2i}\frac{5-2i}{5-2i} = \frac{5-2i}{25} = \frac{5}{29} - \frac{2}{29}i$$

3. $\dfrac{1+i}{2+3i} = \dfrac{5}{13} - \dfrac{1}{13}i$

Uitwerking: We vermenigvuldigen teller en noemer met $\overline{2+3i} = 2-3i$. In de noemer krijgen we dan $(2+3i)(2-3i) = 13$.

$$\frac{1+i}{2+3i} = \frac{1+i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{5-i}{13} = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}i$$

4. $\dfrac{1+2i}{3-4i} + \dfrac{2-i}{5i} = -\dfrac{2}{5}$

Uitwerking: We berekenen de beide termen apart, en tellen de resultaten vervolgens bij elkaar op.

Voor de eerste term: we vermenigvuldigen teller en noemer met $\overline{3-4i} = 3+4i$. In de noemer krijgen we dan $(3-4i)(3+4i) = 25$. De eerste term kunnen we dus vereenvoudigen tot

$$\frac{1+2i}{3-4i} = \frac{1+2i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{-5+10i}{25} = \frac{-1+2i}{5}$$

Voor de tweede term: we vermenigvuldigen teller en noemer met $\overline{5i} = -5i$. In de noemer krijgen we dan $(5i) \cdot (-5i) = 25$. De tweede term kunnen we dus vereenvoudigen tot

$$\frac{2-i}{5i} = \frac{2-i}{5i} \cdot \frac{-5i}{-5i} = \frac{-1-2i}{5}$$

Een andere mogelijkheid is om te gebruiken dat delen door i hetzelfde is als vermenigvuldigen met $-i$, zodat we meteen bekomen dat

$$\frac{2-i}{5i} = \frac{(2-i)\cdot(-i)}{5} = \frac{-1-2i}{5}$$

Wanneer we deze twee termen bij elkaar optellen, valt het imaginaire deel weg. Het resultaat is $\dfrac{-2}{5}$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.1.A Basisoefeningen complexe getallen

Oefening 1.1.10. Bepaal alle oplossingen van volgende veeltermvergelijkingen.

1. $x^2 + x = 0$

Uitwerking: De oplossingen zijn $x_1 = 0$ en $x_2 = -1$.

We kunnen een x afzonderen in deze vergelijking en vinden dan de equivalente vergelijking $x(x+1) = 0$. Deze heeft als oplossingen $x = 0$ en $x = -1$.

2. $x^3 + 16x = 0$

Uitwerking: De oplossingen zijn $x_1 = 0$, $x_2 = 4i$ en $x_3 = -4i$.

We kunnen een x afzonderen, en vinden dan de equivalente vergelijking $x(x^2 + 16) = 0$. Deze heeft als oplossingen ofwel $x = 0$ ofwel $x^2 + 16 = 0$. De laatste vergelijking heeft als oplossingen $x = 4i$ en $x = -4i$.

3. $x^2 + 5x + 2 = 0$

Uitwerking: De oplossingen zijn $x_1 = \dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}$ en $x_2 = \dfrac{-5-\sqrt{17}}{2}$.

De vergelijking is van de vorm $ax^2+bx+c=0$, met $a=1$, $b=5$ en $c=2$. Dan is $D = b^2-4ac = 25-8 = 17$. Omdat $D>0$, zijn er twee reële oplossingen:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-5+\sqrt{17}}{2}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-5-\sqrt{17}}{2}.$$

4. $x^2 + 4x + 5 = 0$

Uitwerking: De oplossingen zijn $x_1 = -2-i$ en $x_2 = -2+i$.

De vergelijking is van de vorm $ax^2+bx+c=0$, met $a=1$, $b=4$ en $c=5$. Dan is $D = b^2-4ac = 16-20 = -4$. Omdat $D<0$, zijn er twee complexe oplossingen. De oplossingen zijn

$$x_1 = \frac{-b+i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-4+2i}{2} = -2+i, \quad x_2 = \frac{-b-i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-4-2i}{2} = -2-i\,.$$

5. $9x^2 - 14 = 4x$

Uitwerking: De oplossingen zijn $x_1 = \dfrac{2+\sqrt{130}}{9}$ en $x_2 = \dfrac{2-\sqrt{130}}{9}$.

De vergelijking is van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$, met $a = 9$, $b = -4$ en $c = -14$. Dan is $D = b^2 - 4ac = 16 + 504 = 520$. Omdat $D > 0$, zijn er twee verschillende reële oplossingen. Merk op dat $\sqrt{D} = \sqrt{520} = \sqrt{4 \cdot 130} = 2\sqrt{130}$. De oplossingen zijn

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{4+2\sqrt{130}}{18} = \frac{2+\sqrt{130}}{9}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{4-2\sqrt{130}}{18} = \frac{2-\sqrt{130}}{9}.$$

6. $x = 2x^2 + 5$

Uitwerking: De oplossingen zijn $x_1 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{39}}{4}i$ en $x_2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{39}}{4}i$.

De vergelijking is van de vorm $ax^2+bx+c=0$, met $a=2$, $b=-1$ en $c=5$. Dan is $D = b^2-4ac = 1-40 = -39$. Omdat $D<0$, zijn er twee complexe oplossingen. De oplossingen zijn

$$x_1 = \frac{-b+i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{1+\sqrt{39}i}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{39}}{4}i, \quad x_2 = \frac{-b-i\sqrt{-D}i}{2a} = \frac{1-\sqrt{39}i}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{39}}{4}i\,.$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.1.A Basisoefeningen complexe getallen

Oefening 1.1.11. Geef een vierkantsvergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ die

1. enkel het getal -5 als oplossing heeft.

Uitwerking: De enige oplossing moet $x = -5$ zijn. Hieruit halen we $x + 5 = 0$, maar dit is geen tweedegraadsvergelijking: $(x+5)^2 = 0$ is dat wel. Voluit geschreven is dit de vergelijking $x^2 + 10x + 25 = 0$. Je kan eventueel met de discriminantmethode nagaan dat $D = 0$ en $\frac{-b}{2a} = -5$.

(Met deze truc kan je zelfs een veeltermvergelijking van eender welke graad geven met enkel -5 als oplossing: $(x+5)^n = 0$: ze voluit schrijven is wel wat lastiger)

2. $x_1 = 3 - i$ en $x_2 = 3 + i$ als oplossingen heeft.

Uitwerking: $(x-x_1)(x-x_2) = (x-3+i)(x-3-i) = x^2-(3+i)x+(-3+i)x+(-3+i)(-3-i) = x^2-6x+10$

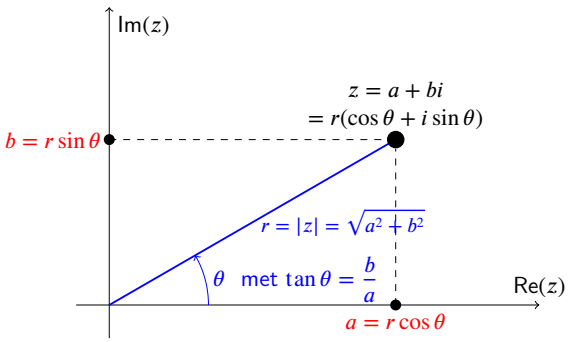
CC BY-NC-SA 4.0

1.2 De goniometrische schrijfwijze van complexe getallen

Een punt z in het vlak kan volledig bepaald worden door zijn projecties op de x-as en de y-as. In het complexe vlak noemen we de x-as ook de *reële* as en de y-as de *imaginaire* as. We schrijven een complex getal als $z = a + bi$. Er is echter een alternatieve manier via zogenaamde poolcoördinaten die gebruik maken van $r = |z|$, de afstand tot de oorsprong, en θ, de hoek die de overeenkomstige vector maakt met de positieve reële as. Het koppel (r, θ) zijn de *poolcoördinaten* van het punt z. In de context van complexe getallen noemen we $r = |z|$ de **modulus** en θ het **argument** (ook wel *fase* genoemd). De hoek θ wordt gemeten in radialen, in tegenwijzerzin, en is slechts op een veelvoud van 2π na bepaald.

Deze schrijfwijze is bijvoorbeeld erg handig bij vermenigvuldigingen en machten van complexe getallen, want die worden veel eenvoudiger.

We tekenen het complexe getal z met cartesische coördinaten en met poolcoördinaten:



Omdat $a = r\cos\theta$ en $b = r\sin\theta$ kunnen we $z = a + bi$ ook schrijven als $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Dit noemen we de **goniometrische** (ook **polaire**) **schrijfwijze** van het complex getal z. We noemen $z = a + bi$ de **cartesische schrijfwijze**.

Opmerking 1.2.1.

- Omdat θ niet uniek bepaald is, heeft elk complex getal $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *oneindig veel goniometrische schrijfwijzes* $z = r\,(\cos(\theta + k2\pi) + i\sin(\theta + k2\pi))$, met $k \in \mathbb{Z}$. Vaak wordt er echter voor gekozen om θ tussen 0 en 2π te geven: we kunnen ons sneller voorstellen waar de hoek $\frac{5\pi}{4}$ ligt dan de hoek $\frac{1093\pi}{4}$.
- Twee complexe getallen in goniometrische schrijfwijze zijn gelijk aan elkaar als ze dezelfde modulus hebben, en hun argument gelijk is op een veelvoud van 2π na.

Oefening 1.2.1.

Geef de goniometrische schrijfwijze van volgende complexe getallen waarvan het argument gemakkelijk grafisch gevonden kan worden:

1. $z = 1$

Uitwerking: Voor $z = 1$ is de modulus 1 en het argument 0, dus de goniometrische schrijfwijze is

$$z = \cos 0 + i\sin 0 \text{ of } z = \cos 2\pi + i\sin 2\pi.$$

2. $z = i$

Uitwerking: Voor $z = i$ is de modulus 1 en het argument $\frac{\pi}{2}$, dus de goniometrische schrijfwijze is

$$z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 De goniometrische schrijfwijze van complexe getallen

3. $z = 1 + i$

Uitwerking: Voor $z = 1 + i$ is de modulus $\sqrt{2}$ en het argument $\frac{\pi}{4}$, dus de goniometrische schrijfwijze is

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

4. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Uitwerking: Voor $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ is de modulus 1 en het argument $\frac{\pi}{4}$, dus de goniometrische schrijfwijze is

$$z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}.$$

Merk op: bij het opschrijven van de goniometrische schrijfwijze met concrete getallen moet je de sin en cos laten staan. Als je die toch zou uitrekenen, krijg je immers terug de cartesische schrijfwijze.

Je kan verder experimenteren met volgende applet: Je kan $z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ verplaatsen en telkens $a = \text{Re}(z)$, $b = \text{Im}(z)$, $r = |z|$ en θ aflezen.

GeoGebra link: https://www.geogebra.org/m/NwzgUCQG

Het blijkt dat sommige berekeningen eenvoudiger zijn in de cartesische schrijfwijze en andere in de goniometrische schrijfwijze. Om te switchen tussen beide schrijfwijzes herhalen we de transformatieformules van poolcoördinaten:

Eigenschap 1.2.1 (Transformatieformules cartesische en goniometrische schrijfwijze)**.**

Een complex getal z met goniometrische schrijfwijze $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ heeft als cartesische schrijfwijze $a + bi$ met:

$$a = r\cos\theta$$
$$b = r\sin\theta$$

Een complex getal z met cartesische schrijfwijze $a + bi$ heeft als goniometrische schrijfwijze $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ met:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Opmerking 1.2.2.

Als $a \neq 0$ kunnen we de tweede vergelijking delen door de eerste (waardoor de vierkantswortel wegvalt) en krijgen we

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \quad \text{als } a \neq 0$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 De goniometrische schrijfwijze van complexe getallen

Als $a > 0$ dan is θ een hoek in het 1ste of het 4de kwadrant en is dus per definitie van de boogtangens

$$\theta = \text{bgtan}\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{als } a > 0$$

Als $a < 0$ dan is θ een hoek in het 2de of het 3de kwadrant en dan geldt

$$\theta = \text{bgtan}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \quad \text{als } a < 0$$

Als $a = 0$, dan ligt $z = a + bi$ op de y-as en geldt

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{als } a = 0, b > 0$$
$$\theta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{als } a = 0, b < 0$$

Samengevat geeft dit voor θ:

$$\theta = \begin{cases} \text{bgtan}\,\dfrac{b}{a} & \text{als } a > 0 \\ \pi + \text{bgtan}\,\dfrac{b}{a} & \text{als } a < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{als } a = 0, b > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{als } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

Dit alles wordt ook uitgelegd in onderstaande video:

YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=_qLKTopxSXc

1.2.1 Vermenigvuldiging van complexe getallen in goniometrische schrijfwijze

In de goniometrische schrijfwijze is het niet eenvoudig om complexe getallen op te tellen: hiervoor is de cartesische schrijfwijze veel makkelijker, omdat we dan gewoon reëel en imaginair deel bij elkaar moeten optellen. Voor de vermenigvuldiging van complexe getallen is het andersom: daarvoor is er de volgende interessante formule voor de goniometrische schrijfwijze:

Als $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ en $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ twee complexe getallen zijn, dan is

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)), \end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap gebruik hebben gemaakt van de som- en verschilformules. Dit betekent dat de moduli r_i moeten worden vermenigvuldigd, en de argumenten θ_i moeten worden opgeteld.

Eigenschap 1.2.2 (Vermenigvuldiging van twee complexe getallen in goniometrische schrijfwijze)**.**

De *modulus* van het product van twee complexe getallen is het *product van de moduli* van die getallen.

Het *argument* van het product van twee complexe getallen is de *som van de argumenten* van die getallen.

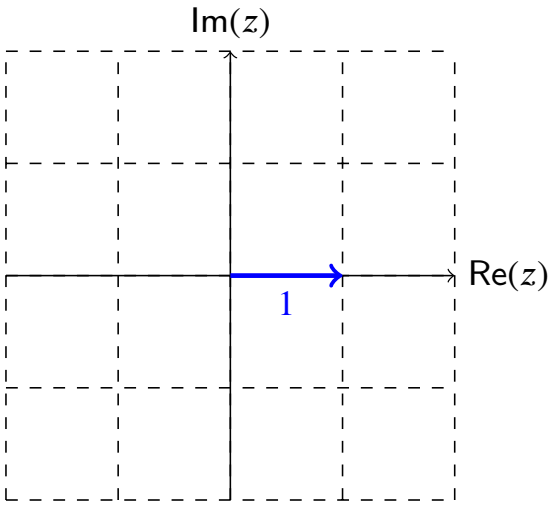
CC BY-NC-SA 4.0

1.2.A Oefeningen goniometrische schrijfwijze van complexe getallen

Oefening 1.2.2. Schrijf onderstaande getallen in goniometrische vorm $r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Zorg er steeds voor dat θ tussen 0 en 2π ligt, dus niet $-\frac{\pi}{2}$ invullen maar $\frac{3\pi}{2}$.

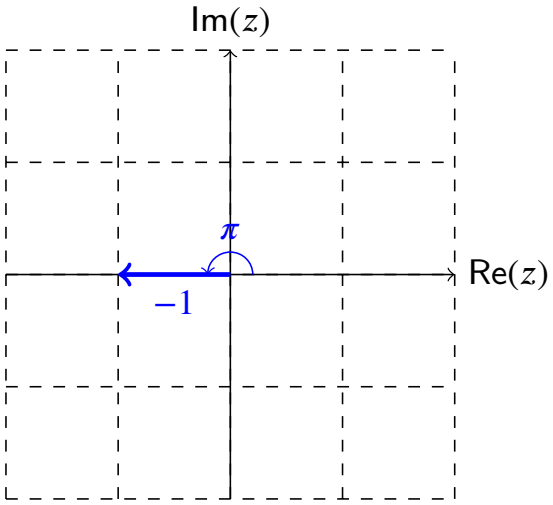
1. Voor $z = 1$ is $r = 1$ en $\theta = 0$.

Uitwerking: Omdat $z = 1 = 1 + 0i$ en dus $a = 0$ en $b = 1$, vinden we $|z| = r = 1$. In het complexe vlak zien we dadelijk dat $\theta = 0$. De goniometrische schrijfwijze van z is dan $z = 1 = \cos 0 + i\sin 0$.



2. Voor $z = -1$ is $r = 1$ en $\theta = \pi$.

Uitwerking: $z = -1 = -1 + 0i$ en dus $a = -1$ en $b = 0$, waaruit we halen dat $|z| = r = 1$. In het complexe vlak zien we dadelijk dat $\theta = \pi$. De goniometrische schrijfwijze van z is dan $z = \cos\pi + i\sin\pi$.



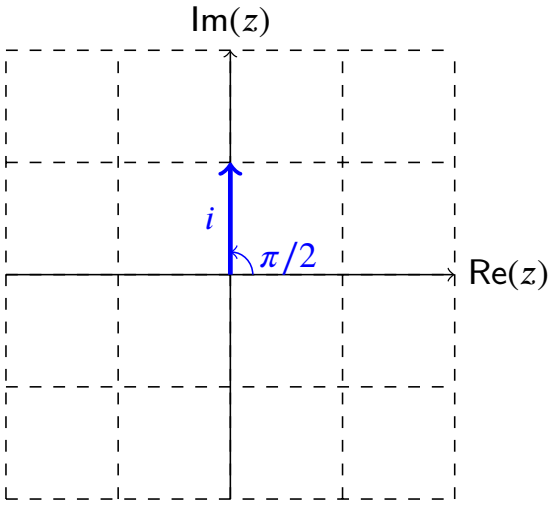
Merk op dat de modules positief moet zijn, en met $r = -1$ en $\theta = 0$ is $-(\cos 0 + i\sin 0)$ dus *geen* goniometrische schrijfwijze van het getal -1.

3. Voor $z = i$ is $r = 1$ en $\theta = \frac{\pi}{2}$.

CC BY-NC-SA 4.0

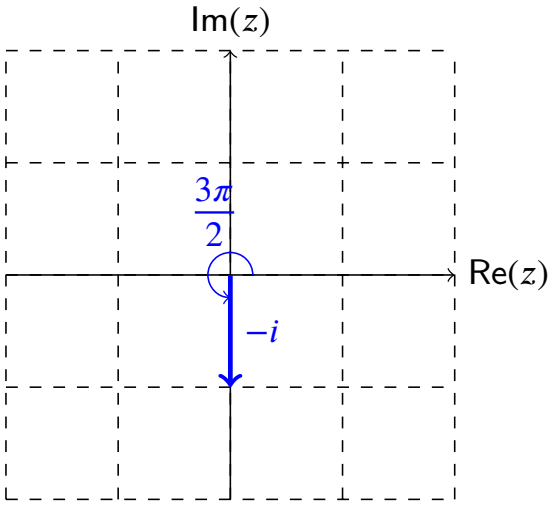
1.2.A Oefeningen goniometrische schrijfwijze van complexe getallen

Uitwerking: Omdat $z = i = 0 + i$, en dus $a = 0$, $b = 1$, zodat $|z| = r = 1$. In het complexe vlak zien we dadelijk dat $\theta = \frac{\pi}{2}$. De goniometrische schrijfwijze van z is dus $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.



4. Voor $z = -i$ is $r = 1$ en $\theta = 3\frac{\pi}{2}$.

Uitwerking: Voor $z = -i$ is $a = 0$ en $b = -1$, dus $|z| = r = 1$. In het complexe vlak zien we dadelijk dat $\theta = \frac{3\pi}{2}$. De goniometrische schrijfwijze van z is dus $z = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.



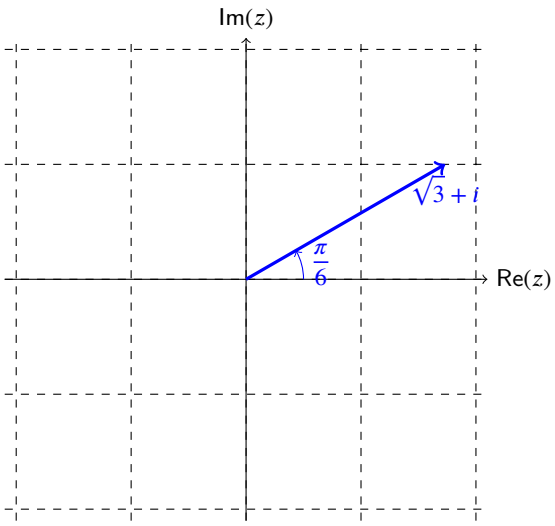
5. Voor $z = \sqrt{3} + i$ is $r = 2$ en $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Uitwerking: Voor $z = \sqrt{3} + i$ geldt $a = \sqrt{3}$ en $b = 1$, dus $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$. Het argument van z voldoet aan $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ en $\sin\theta = \frac{1}{2}$. Dit zijn de goniometrische getallen van de standaardhoek $\pi/6$. De goniometrische schrijfwijze van z is dus

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.2.A Oefeningen goniometrische schrijfwijze van complexe getallen

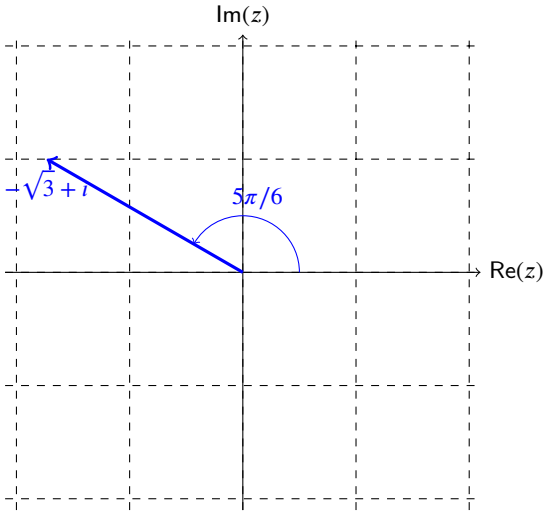


6. Voor $z = -\sqrt{3} + i$ is $r = 2$ en $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$.

Uitwerking: Voor $z = -\sqrt{3} + i$ geldt $a = -\sqrt{3}$ en $b = 1$. Dus geldt $|z| = r = 2$. Voor het argument van z geldt dat $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ en $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$. Dan is $\theta = \dfrac{5\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{6}$: dit kan je afleiden uit de goniometrische getallen voor $\pi/6$ en de rekenregels voor supplementaire hoeken te gebruiken.

De goniometrische schrijfwijze van z is dus

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$



7. Voor $z = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}$ is $r = 1$ en $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

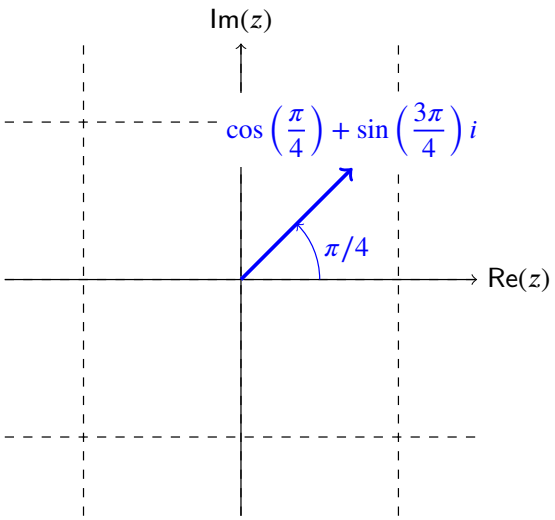
Uitwerking: Door supplementaire hoeken te gebruiken vinden we dat

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

En dus is $z = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}$: dit is reeds de goniometrische schrijfwijze, met $r = 1$ en $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

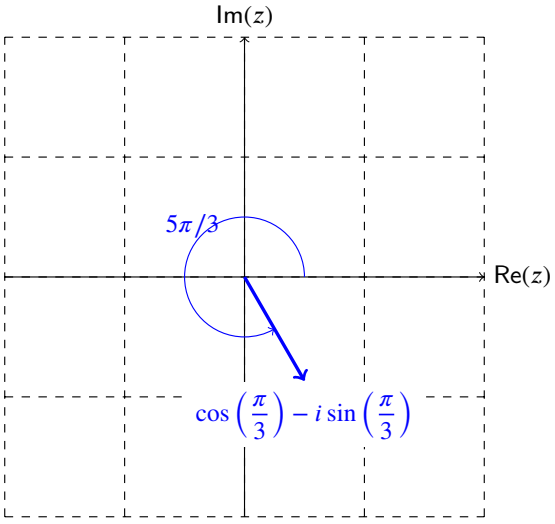
CC BY-NC-SA 4.0

1.2.A Oefeningen goniometrische schrijfwijze van complexe getallen



8. Voor $z = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$ is $r = 1$ en $\theta = \frac{5\pi}{3}$

Uitwerking: Door tegengestelde hoeken te gebruiken vinden we dat $-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ en $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. Dus $z = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. Als we eisen dat $\theta \in [0, 2\pi]$, dan is de goniometrische vorm van z: $z = \cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{3}$.



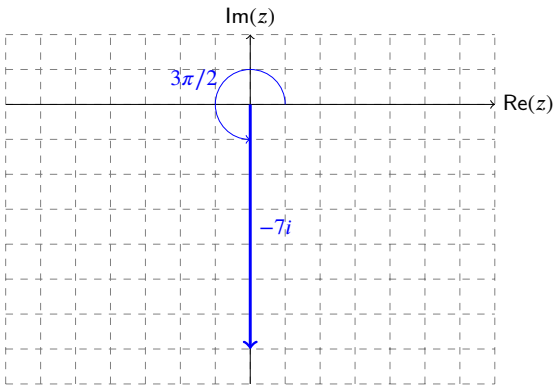
Oefening 1.2.3. Bepaal de modulus $|z|$ en het argument θ van volgende complexe getallen z. Geef de hoek θ in tussen 0 en 2π radialen.

1. Als $z = -7i$, dan is $|z| = 7$ en $\theta = 3\pi/2$.

Uitwerking: $z = a + bi = 0 - 7i$, dus is $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 7$. In het complxe vlak zien we dadelijk dat $\theta = 3\pi/2$. Je kan dit ook berekenen: $\cos\theta = 0/7 = 0$ en $\sin\theta = -7/7 = -1$, en dus is $\theta = 3\pi/2$ (op een veelvoud van 2π na).

CC BY-NC-SA 4.0

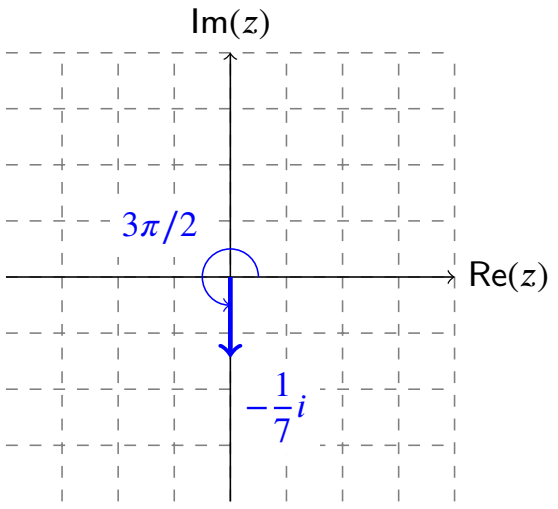
1.2.A Oefeningen goniometrische schrijfwijze van complexe getallen



2. Als $z = (7i)^{-1}$, dan is $|z| = 1/7$ en $\theta = 3\pi/2$.

Uitwerking: Eerst herschrijven we het complex getal z in cartesische vorm: $z = \frac{1}{7i} = -\frac{1}{7}i$ (vermenigvuldig teller en noemer met i).
Een tip voor berekeningen met complexe getallen: *delen door i is hetzelfde als vermenigvuldigen met $-i$.*

Omdat $z = a + bi = 0 - \frac{1}{7}i$ is $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{7}$, en $\theta = 3\pi/2$ (op een veelvoud van 2π na), zoals we kunnen afleiden uit een schets (de ijk op beide assen is nu 0.1 in plaats van 1):



3. Als $z = \overline{1+i}$, dan is $|z| = \sqrt{2}$ en $\theta = 7\pi/4$.

Uitwerking: Eerst herschrijven we het complex getal z: $z = \overline{1+i} = 1 - i$.

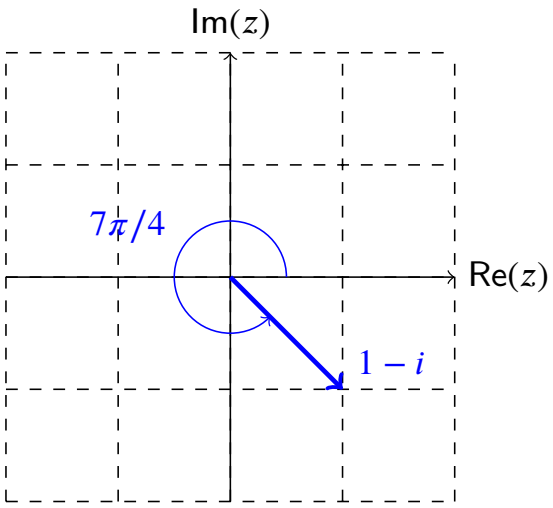
Omdat $z = a + bi = 1 - i$, is $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$, en $\theta = -\pi/4$: dit kan je afleiden uit de tekening of bepaal je uit de vergelijkingen

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin\theta = \frac{b}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

We weten dat de cosinus en sinus van de standaardhoek $\pi/4$ beide gelijk zijn aan $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, en de tegengestelde hoek heeft dezelfde cosinus, maar een tegengestelde sinus. Dus $\theta = -\pi/4$ of $\theta = 7\pi/4$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2.A Oefeningen goniometrische schrijfwijze van complexe getallen

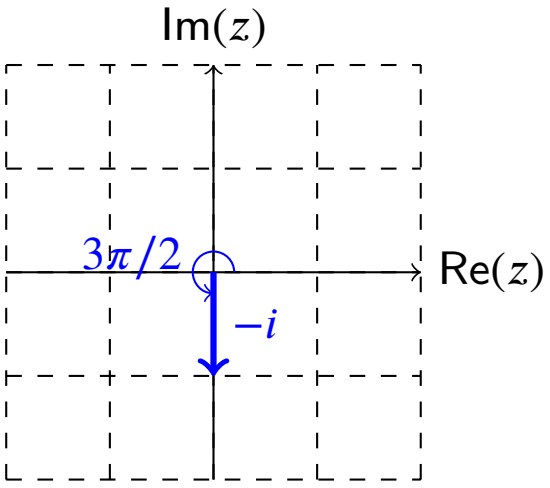


4. Als $z = \dfrac{1-i}{1+i}$, dan is $|z| = 1$ en $\theta = 3\pi/2$.

Uitwerking: Eerst herschrijven we het complex getal z naar de vorm $a + bi$:

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i}\frac{1-i}{1-i} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

Dan is $|z| = 1$, en in het comlexe vlak zien we dadelijk dat $\theta = 3\pi/2$.



1.3 Machten van complexe getallen: formule van De Moivre

Met de formules van het product van complexe getallen kunnen we natuurlijk ook het *kwadraat* van een complex getal berekenen, door eenvoudig twee keer hetzelfde getal in te vullen. In de cartesische schrijfwijze is dat mooi, maar niet spectaculair. In de goniometrische schrijfwijze vinden we iets bijzonder interessants:

Een kwadraat van een complex getal $z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ is

$$z^2 = a^2 - b^2 - 2abi = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

Als we een derde of vierde macht willen berekenen worden de formules met a en b steeds ingewikkelder, maar de formules in r en θ blijven verrassend eenvoudig:

Eigenschap 1.3.1 (Formule van De Moivre)**.**

Voor een complex getal $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ en elk natuurlijk getal n geldt

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Onderstaande applet illustreert de geometrische betekenis van deze formule: $z = 1 + i$ is vast gekozen en weergegeven in het complexe vlak. De modulus van z is $|z| = r = \sqrt{2}$. Je kan met het schuivertje een macht n opgeven en daarna z^n op de figuur laten weergeven. Eerst wordt $r^n = (\sqrt{2})^n$ berekend en weergegeven op de reële as. Daarna wordt θ vermenigvuldigd met n en wordt ook z^n weergegeven.

GeoGebra link: https://www.geogebra.org/m/nglwjJ79

Voorbeeld 1.3.1. We kunnen $(1+i)^8$ op 2 manieren berekenen:

(a) $(1+i)(1+i) = 1+2i-1 = 2i$, dus $(1+i)(1+i)(1+i)(1+i) = (2i)^2 = -4$, dus $(1+i)^8 = (-4)^2 = 16$

(b) $1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, dus $(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8(\cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4}) = 2^4(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 16(1 + i\cdot 0) = 16$

Oefening 1.3.1. Bereken met de formule van De Moivre

1. $(\sqrt{3}+i)^3 = 8i$
2. $(-1-i)^{20} = -1024$
3. $(1+i)^{21} = -1024 - 1024i$
4. $(-\sqrt{3}+i)^5 = 16\sqrt{3} + 16i$

Ook vergelijkingen van de vorm: $z^n = a + bi$ met $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$ zijn met de formule van De Moivre op te lossen. Volgens de Hoofdstelling van de Algebra heeft de vergelijking $z^n = a+bi$ steeds n oplossingen. Het oplossen van de vergelijking $z^n = a + bi$ komt neer op het zoeken van de n-de machtswortels van $a + bi$.

Oefening 1.3.2. Bereken alle oplossingen van $z^2 = 1 - i$, met $z \in \mathbb{C}$.

Uitwerking: We schrijven eerst beide leden van de opgave in de goniometrische schrijfwijze.

De onbekende z schrijven we als $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Het linkerlid van de vergelijking wordt dan volgens de formule van De Moivre

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta).$$

Voor het rechterlid $1 - i$ geldt

$$|1 - i| = \sqrt{2}, \qquad \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4},$$

1.3 Machten van complexe getallen: formule van De Moivre

zodat

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})).$$

De vergelijking $z^2 = 1 - i$ in de onbekende z wordt zo een vergelijking in de onbekenden r en θ:

$$r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})).$$

Twee complexe getallen in goniometrische schrijfwijze zijn gelijk aan elkaar als ze dezelfde modulus hebben, en hun argument gelijk is op een veelvoud van 2π na. Hieruit volgt:

$$r^2 = \sqrt{2} \quad \text{met} \quad r \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{en} \qquad 2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Dus $r = 2^{1/4}$ en $\theta = -\frac{\pi}{8} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. We hebben de onbekenden r en θ dus gevonden.

Voor $k = 0$ is $\theta = -\frac{\pi}{8}$ en voor $k = 1$ is $\theta = -\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{7\pi}{8}$. Voor alle andere waarden van k krijgen we één van beide hoeken op een veelvoud van 2π na. Er zijn dus slechts twee verschillende oplossingen

$$z_1 = 2^{1/4}(\cos(-\frac{\pi}{8}) + i\sin(-\frac{\pi}{8})) \qquad \text{en} \qquad z_2 = 2^{1/4}(\cos(\frac{7\pi}{8}) + i\sin(\frac{7\pi}{8}))$$

Voorbeeld 1.3.2. Zoek alle vierdemachtswortels uit 1.

Uitwerking: We zoeken dus alle oplossingen van de vergelijking $z^4 = 1$.

We stellen $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Het linkerlid van de vergelijking wordt dan volgens de formule van De Moivre

$$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta).$$

Voor het rechterlid 1 geldt

$$|1| = 1, \qquad \arg(1) = 0,$$

zodat

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0).$$

De vergelijking $z^4 = 1$ in de onbekende z wordt zo een vergelijking in de onbekenden r en θ:

$$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

Gelijkheid van complexe getallen leert ons dat

$$r^4 = 1 \quad \text{met } r \in \mathbb{R}^+ \quad \text{en } 4\theta = 0 + 2k\pi \quad \text{met } k \in \mathbb{Z}.$$

Dus $r = 1$, want $r^4 = 1$ heeft slecht 1 reële oplossing, en $\theta = k\pi/2$ met $k \in \mathbb{Z}$.
Dit levert vier verschillende wortels.
$z_1 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1$,
$z_2 = 1(\cos \pi/2 + i\sin \pi/2) = i$,
$z_3 = 1(\cos \pi + i\sin \pi) = -1$,
$z_4 = 1(\cos 3\pi/2 + i\sin 3\pi/2) = -i$.

Dit voorbeeld kan je veel sneller oplossen door $z^4 - 1$ te ontbinden in factoren:

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1)$$

De nulpunten hiervan zijn inderdaad 1,-1,i,-i. Ontbinden in factoren lukt echter niet meer bij bijvoorbeeld $z^5 = 1$, hiervoor moet je bovenstaande methode gebruiken.

Oefening 1.3.3. Bereken alle oplossingen van $z^3 = 8i$, met $z \in \mathbb{C}$.

Uitwerking: We schrijven eerst beide leden van de opgave in de goniometrische schrijfwijze.

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Machten van complexe getallen: formule van De Moivre

De onbekende z schrijven we als $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Het linkerlid van de vergelijking wordt dan volgens de formule van De Moivre

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta).$$

Voor het rechterlid $8i$ geldt

$$|8i| = 8, \qquad \arg(8i) = \frac{\pi}{2},$$

zodat

$$8i = 8(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})).$$

De vergelijking $z^3 = 8i$ wordt:

$$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 8(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})).$$

Twee complexe getallen in goniometrische schrijfwijze zijn gelijk aan elkaar als ze dezelfde modulus hebben, en hun argument gelijk is op een veelvoud van 2π na. Hieruit volgt:

$$r^3 = 8 \quad \text{met} \quad r \in \mathbb{R}^+ \quad \text{en} \quad 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Dus $r = 2$, want $r^3 = 8$ heeft slecht 1 reële oplossing, en $\theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Voor $k = 0$ is $\theta = \frac{\pi}{6}$, voor $k = 1$ is $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ en voor $k = 2$ is $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$. Voor alle andere waarden van k krijgen we één van deze hoeken op een veelvoud van 2π na. Er zijn dus drie verschillende oplossingen

$z_1 = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = \sqrt{3} + i,$

$z_2 = 2(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})) = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = -\sqrt{3} + i,$

$z_3 = 2(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})) = 2(0 + i(-1)) = -2i.$

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 De exponentiële schrijfwijze van complexe getallen

We definiëren een uitbreiding van de exponentiële functie tot de verzameling van de complexe getallen.

Definitie 1.4.1. Als $z = x + iy \in \mathbb{C}$ dan is e^z het complexe getal

$$e^z = e^{x+iy} \stackrel{\text{def}}{=} e^x(\cos y + i \sin y)$$

Dit is inderdaad een uitbreiding want voor $z \in \mathbb{R}$ is e^z de reeds gekende exponentiële functie.

Met behulp van de somformules van sinus en cosinus kan je ook aantonen dat met deze definitie de gekende eigenschap van de reële exponentiële functie $e^{x+y} = e^x e^y$ voor $x, y \in \mathbb{R}$ blijft gelden in $\mathbb{C}$.

Eigenschap 1.4.1. Voor $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ geldt

$$e^{z_1+z_2} = e^{z1} e^{z2}$$

Opmerking 1.4.1. Omdat met $z = x+iy$ en $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ in de vorm $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ staat, geldt voor de modulus en het argument van e^z dat $|e^z| = e^x$ en $\arg e^z = y + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$

Oefening 1.4.1. Geef modulus en argument van e^{iz} met $z = x + iy$.

Uitwerking: Omdat $iz = ix + i^2 y = -y + ix$ is $e^{iz} = e^{-y+ix} = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$.
En $e^{-y}(\cos x + i \sin x)$ is van de vorm $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, dus $|e^{iz}| = e^{-y}$ en $\arg e^{iz} = x + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$.

Een onmiddellijk gevolg van deze definitie is wat dikwijls de mooiste wiskundige formule wordt genoemd: een erg merkwaardig verband tussen de fundamentele grootheden e, π, i en -1.

Eigenschap 1.4.2. $e^{i\pi} = -1$

Vermits $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, voor $y \in \mathbb{R}$, kunnen we een complex getal in goniometrische vorm $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ook schrijven als $z = re^{i\theta}$. We noemen dit de **exponentiële schrijfwijze**.

Opmerking 1.4.2.

Twee complexe getallen in exponentiële schrijfwijze zijn gelijk aan elkaar als ze dezelfde modulus hebben, en hun argument gelijk is op een veelvoud van 2π na.

Oefening 1.4.2. Schrijf $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ in de vorm $x + iy$. $2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$

Omdat $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ voor $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, wordt het vermenigvuldigen van twee complexe getallen nog eenvoudiger in de exponentiële schrijfwijze.

Eigenschap 1.4.3. Als $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ en $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ twee complexe getallen zijn, dan is

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} \\ &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \end{aligned}$$

en als $z = re^{i\theta}$, dan is voor $n \in \mathbb{N}$ (formule van De Moivre)

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 De exponentiële schrijfwijze van complexe getallen

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

Oefening 1.4.3 (Vierkantswortels). Bereken alle oplossingen van $z^2 = 1 - i$, met $z \in \mathbb{C}$.

Uitwerking: We schrijven beide leden in exponentiële vorm. De onbekende z schrijven we als $z = re^{i\theta}$. Het linkerlid van de vergelijking wordt dan volgens de formule van De Moivre

$$z^2 = r^2 e^{i2\theta}.$$

Voor het rechterlid $1 - i$ geldt

$$|1 - i| = \sqrt{2}, \qquad \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4},$$

zodat

$$1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

De vergelijking $z^2 = 1 - i$ in de onbekende z wordt zo een vergelijking in de onbekenden r en θ:

$$r^2 e^{i2\theta} = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

Twee complexe getallen in exponentiële vorm zijn gelijk aan elkaar als ze dezelfde modulus hebben, en hun argument gelijk is op een veelvoud van 2π na. Hieruit volgt:

$$r^2 = \sqrt{2} \quad \text{met} \quad r \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{en} \qquad 2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dus $r = 2^{1/4}$ en $\theta = -\frac{\pi}{8} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. We hebben de onbekenden r en θ dus gevonden.

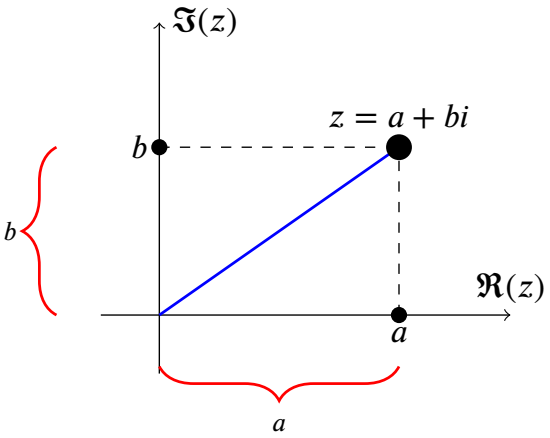
Voor $k = 0$ is $\theta = -\frac{\pi}{8}$ en voor $k = 1$ is $\theta = -\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{7\pi}{8}$. Voor alle andere waarden van k krijgen we één van beide hoeken op een veelvoud van 2π na. Er zijn dus slechts twee verschillende oplossingen

$$z_1 = 2^{1/4}e^{-\frac{\pi}{8}i} \qquad \text{en} \qquad z_2 = 2^{1/4}e^{\frac{7\pi}{8}i}$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.13)

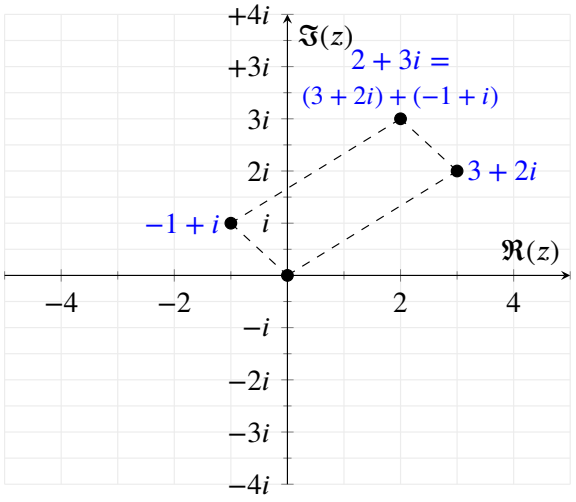
2.1 Het complexe vlak

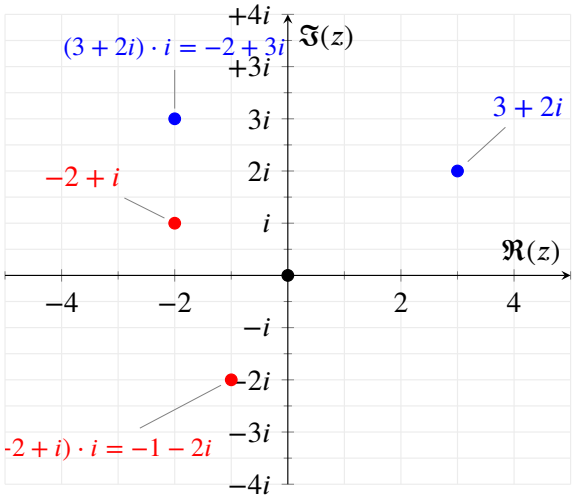
We kunnen elk complex getal $z = a + bi \in \mathbb{C}$ voorstellen als een punt in het reële vlak, namelijk als het punt met cartesische coördinaten (a, b) (met a, b dus reële getallen).



De schrijfwijze $a+bi$ van een complex getal noemt men de **cartesiaanse vorm**. We spreken in deze context ook van **het complexe vlak** of **het vlak van Gauss**.
We vinden dus de *zuiver reële* getallen op de (horizontale) $x-$as, die we dan ook de **reële as** noemen.
We vinden dus de *zuiver imaginaire* getallen op de (vertikale) $y-$as, die we dan ook de **imaginaire as** noemen.

Deze voorstelling van een complex getal in een vlak laat toe om meetkundig te redeneren bij de bewerkingen met complexe getallen. Zo komt de optelling overeen met de optelling van de overeenkomstige vectoren volgens de regel van het parallellogram. Vermenigvuldigen met i is hetzelfde als een rotatie met 90 graden. Daaruit volgt dat het kwadraat van i overeenkomt met een rotatie van 180 graden, en dat is precies hetzelfde als vermenigvuldigen met -1. In die zin is i dus wel degelijk een vierkantswortel uit -1. Het blijkt dadelijk dat ook $-i$ een vierkantswortel is van i





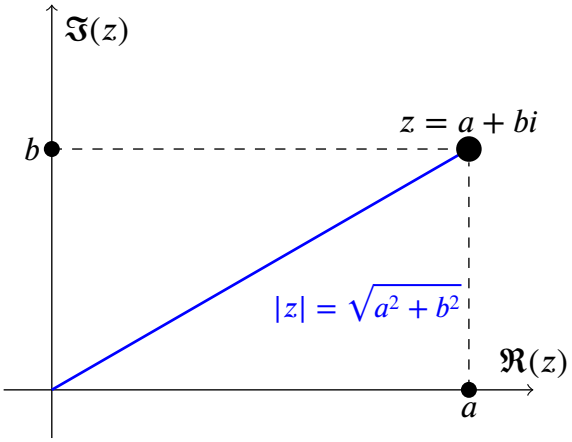
2.2 De modulus en complex toegevoegde

Definitie 2.2.1 (Modulus of absolute waarde van een complex getal)**.**

De *modulus* van een complex getal $z = a + bi$, genoteerd $|z|$, is het *positief reëel* getal

$$|z| \overset{\text{def}}{=} |a + bi| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{a^2 + b^2}$$

De modulus is meetkundig de *de afstand tot de oorsprong* en dus ook de *lengte van de vector* $\vec{z}$.



De modulus van complexe getallen heeft volgende eigenschappen:

Eigenschap 2.2.1 (Eigenschappen modulus)**.** Voor complexe getallen $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ geldt

(a) $|z|$ is de afstand van z tot de oorsprong

(b) $|z_1 - z_2|$ is de afstand tussen z_1 en z_2

(c) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(d) $|z| = 0 \iff z = 0$

(e) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

(f) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(g) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

LET OP: in het algemeen geldt niet ~~$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$~~ (want $0 = |1 + (-1)| \neq |1| + |-1| = 2$)

Definitie 2.2.2 (Complex toegevoegde)**.**

De *complex toegevoegde* een complex getal $z = a + bi$, genoteerd als $\overline{z}$, is

$$\overline{z} \overset{\text{def}}{=} \overline{a + bi} \overset{\text{def}}{=} a - bi$$

We noemen z en $\overline{z}$ **complex toegevoegd** (aan elkaar), en beide zijn elkaars spiegeling over de x-as.

Soms noteert men ook z^* in plaats van $\overline{z}$

Eigenschap 2.2.2 (Eigenschappen complex toegevoegde)**.**

Zij $z = a + bi, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, en $n \in \mathbb{N}$. Dan geldt

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2.2 De modulus en complex toegevoegde

(b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(c) $|z| = |\overline{z}| = |-z|$

(d) $z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$

(e) $\overline{\overline{z}} = z$

(f) $z = \overline{z} \iff z$ is een reëel getal (dus $b = 0$, en $z = a$)

(g) $z + \overline{z} = 2a$ (de som van twee complex toegevoegden is zuiver reëel)

(h) $z - \overline{z} = 2bi$ (het verschil van twee complex toegevoegden is zuiver imaginair)

(i) $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$ (het product van twee complex toegevoegden is zuiver reëel en positief)

(j) $\overline{z^n} = \overline{z}^{\,n}$

(k) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ en dus $\dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$

(l) $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ (en dus geldt ook $\overline{z^{-n}} = (\overline{z})^{-n}$)

(m) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Vergelijkingen over de complexe getallen

Een belangrijke motivatie om de verzameling $\mathbb{C}$ van de complexe getallen in te voeren was het oplossen van de vergelijking $x^2 + 1 = 0$. Dat bleek mogelijk door aan de reële getallen een nieuw 'getal' i toe te voegen dat *per definitie* een oplossing is van de vergelijking $x^2 + 1 = 0$. Er geldt dus *per definitie* dat i een getal is zodat $i^2 = -1$. We onderzoeken hier of we nu ook andere veeltermvergelijkingen kunnen oplossen die dat niet waren in $\mathbb{R}$. Het resultaat is spectaculair, en is bevat in de zogenaamde Hoofdstelling van de algebra:

Stelling 2.3.1 (Hoofdstelling van de algebra (Stelling van Gauss))**.**

Elke veeltermvergelijking (van graad minstens 1) is oplosbaar over de complexe getallen.

Opmerking 2.3.1.

- er moet natuurlijk wel een echte vergelijking zijn: volgens de definitie van veeltermen is 5 immers een veelterm (van graad 0), maar de vergelijking $5 = 0$ heeft toch geen oplossingen. De Hoofdstelling zegt dat de constante veeltermen de enige zijn die geen nulpunten hebben over de complexe getallen.
- je kan de stelling ook formuleren met nulpunten van veeltermen in plaats van oplossingen van vergeljkingen: elke niet-contsante veelterm heeft minstens één nulpunt over de complexe getallen.
- Als we een veelterm $p(x)$ kunnen schrijven als $p(x) = (x - x_1)q(x)$, met $x_i \in \mathbb{C}$, dan is x_1 duidelijk een oplossing van de vergelijking $p(x) = 0$, want $p(x_1) = (x_1 - x_1)q(x_1) \overset{!}{=} 0)$. Men kan via het algoritme van de Euclidische deling aantonen dat ook het omgekeerde geldt: als voor een veelterm $p(x)$ geldt dat $p(a) = 0$, dan bestaat er altijd een veelterm $q(x)$ zodat $p(x) = (x - a)q(x)$. Als $p(x)$ graad n heeft, dan heeft $q(x)$ graad $n - 1$. Als $n - 1 > 0$, dan heeft volgens de Hoofdstelling ook $q(x) = 0$ een oplossing, zeg x_2, en bestaat er dus een veelterm $q_2(x)$ zodat $q(x) = (x - x_2)q_2(x)$. Door deze procedure te herhalen krijgen we:

  Eigenschap 2.3.1. Elke veelterm $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ kan ontbonden worden in lineaire factoren als

  $$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

  Een equivalente formulering is:

  Elke veelterm van graad n heeft precies n (niet noodzakelijk verschillende) nulpunten.

  Elke veelterm kan dus geschreven worden als een *som* van machten in x (per definitie) of als *product* van uitdrukkingen $x - x_1$.
- de stelling niet zegt dat deze n oplossingen onderling verschillend zijn: de vergelijking $x^2 = 0$ heeft als het ware 'twee keer' de oplossing $x = 0$, en $x^2 + -2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$ heeft 'twee keer' de oplossing $x = 1$.
- de stelling geldt niet alleen voor vergelijkingen met reële coëfficiënten, maar ook voor vergelijkingen met complexe coëfficiënten. Er bestaan dus 5 complexe getallen x waarvoor $ix^5 + 2x^3 + 2i = 0$.
- het bewijs van deze stelling is niet eenvoudig, en gebruikt tamelijk geavanceerde eigenschappen van limieten en reële getallen.

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Vergelijkingen over de complexe getallen

- de stelling zegt alleen iets over het *bestaan* van oplossingen. Ze geeft geen methode om de oplossingen ook effectief te berekenen.

We bekijken concreet de vierkantsvergelijkingen, dus de veeltermvergelijkingen van de tweede graad

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{met } a \neq 0$$

De Hoofdstelling van de algebra zegt dat vergelijkingen van graad twee altijd twee oplossingen hebben, waarbij we mogelijk één oplossing 'twee keer moeten tellen'.

De zogenaamde discriminant is per definite het getal $D = b^2 - 4ac$. Over de reële getallen beweerden we dat de vergelijking oplosbaar was in het geval $D > 0$ of $D = 0$, en dat er geen oplossingen waren voor $D < 0$. Over de complexe getallen zijn er echter *altijd* oplossingen:

Eigenschap 2.3.2 (Oplossen van vierkantsvergelijkingen over de complexe getallen)**.**

De twee oplossingen x_1 en x_2 van een vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ zijn

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Opmerking 2.3.2.

- Merk op dat $a \neq 0$ (want als $a = 0$ is dit geen vierkantsvergelijking maar een lineaire vergelijking $bx + c = 0$), en dat er dus geen probleem is met mogelijk 'delen door nul'.
- Afhankelijk van de waarde van de discriminant $D = b^2 - 4ac$ geldt:
  - $D \neq 0$: de vergelijking heeft twee verschillende oplossingen, namelijk
  $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$
  - $D = 0$: de vergelijking heeft één unieke oplossing, namelijk
  $$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$$
- Als a, b, c *reële* getallen zijn, dan is ook de discriminant D reëel en heeft het zin om over het *teken* van D te spreken. Als D dan negatief is, is $\sqrt{D} = i\sqrt{|D|}$ zuiver imaginair, en zijn de wortels x_1 en x_2 complex.

In het voorbeeld $x^2 + 1 = 0$ is $a = 1$, $b = 0$ en $c = 1$. Dus is $D = b^2 - 4ac = -4 < 0$, en de oplossingen zijn volgens de discriminantmethode

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{0 + 2i}{2} = i, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{0 - 2i}{2} = -i\,.$$

Dit komt overeen met de oplossingen die we wisten vanuit de definitie van i.

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 De hoofdstelling van de algebra

Eigenschap 2.4.1 (Hoofdstelling van de algebra (Stelling van Gauss))**.** Een complexe veelterm van de n-de graad heeft steeds precies n complexe nulpunten
(niet noodzakelijk allemaal onderling verschillend).

Dus: voor een veelterm $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ met coëfficiënten $a_i \in \mathbb{C}$ bestaan er $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, zo dat

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 + a_0 = a_n(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n)$$

Of: er bestaan $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ die oplossingen (of wortels) zijn van de vergelijking

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

(dus waarvoor $a_n z_i^n + a_{n-1}z_i^{n-1} + \cdots + a_2 z_i^2 + a_1 x + a_0 = 0$)

Deze stelling is een boeiend resultaat. Kinderen die voor het eerst over getallen leren, werken met natuurlijke (positieve gehele) getallen: $0, 1, 2, 3, \ldots$ Op een bepaald ogenblik blijkt het elegant te zijn om ook negatieve getallen in het plaatje toe te laten: $-1, -2, -3, \ldots$. Hierdoor krijgen bewerkingen als '3 min 7' ook een oplossing. Iets gelijkaardigs gebeurt als we breuken (of rationale getallen) toelaten: ook '3 gedeeld door 7' wordt als getal aanvaard. Over de uitbreiding van rationale getallen naar reële getallen valt veel te zeggen, waar we nu niet op ingaan. De hoofdstelling van de algebra zegt dat er iets strafs gebeurt bij de stap van reële naar complexe getallen. Bij de reële getallen bestaat de vierkantswortel uit -1 niet. Bij de complexe getallen voeren we die vierkantswortel toch in. D.w.z. we geven hem een naam 'i'. Of om preciezer te zijn, eigenlijk zijn er twee vierkantswortels uit -1, namelijk i en $-i$. Of nog anders gezegd, geven we een naam aan de (binnen de reële getallen niet bestaande) oplossingen van de veeltermvergelijking $x^2 + 1 = 0$. De veelterm $x^2 + 1$ kan dan geschreven worden als $(x - i)(x + i)$.

De hoofdstelling van de algebra stelt nu dat door op deze manier i in te voeren niet alleen de veelterm $x^2 + 1$ te schrijven is (men zegt, te 'factoriseren' is) als een product van eerstegraadsveeltermen, maar dat meteen elke n-de graadsveelterm, zelfs met complexe coëfficiënten, te schrijven is als een product van eerste graadsveeltermen.

De gevolgen van deze stelling laten zich voelen tot in heel wat toepassingen. Bij de studie van lineaire differentiaalvergelijkingen en differentievergelijkingen, bij de studie van trillingen of golven of elektrische kringen (We noemen slechts enkele van een hele reeks aan mekaar verwante toepassingen), blijken dit soort veeltermvergelijkingen voor te komen, en blijkt de theorie heel elegant te formuleren als men complexe getallen toelaat. Ook de exponentiële vorm blijkt hier van nut, omdat deze onmiddellijk duidelijk maakt hoe sinusoïdale verschijnselen zoals trillingen, wiskundig heel verwant zijn met exponentiële verschijnselen.

We besluiten met een opmerking over de soms afschrikkende naamgeving van complexe getallen. Complex heeft de bijklank van 'ingewikkeld' maar in oorsprong betekent 'complex getal' gewoon 'samengesteld getal', d.w.z. te beschrijven met twee reële getallen. (We merken wel op dat het vaak nuttig is over een complex getal te denken als 1 wiskundig object). Ook de benaming 'imaginair deel' roept soms vragen op. Maar het bovenstaande zou moeten duidelijk maken dat die 'imaginaire' getallen niet denkbeeldiger of schimmiger zijn dan bijvoorbeeld negatieve getallen.

CC BY-NC-SA 4.0