KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Remediëring Wiskunde voor Burgerlijk Ingenieur, Wiskunde en Fysica: Steekkaarten

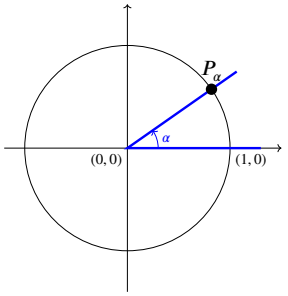
(Versie 2026/10/26.3)

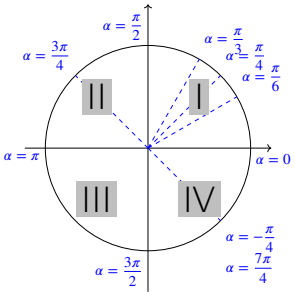
Inhoudsopgave

Goniometrie

Goniometrische cirkel

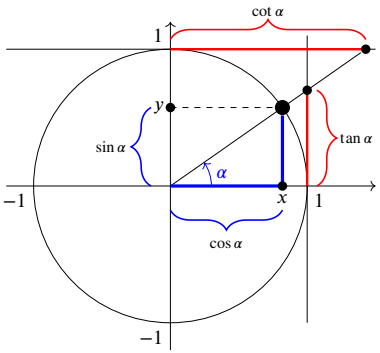
De **goniometrische cirkel** is de cirkel met straal 1 en centrum in de oorsprong, verdeeld in vier **kwadranten**, genummerd van rechtsboven tegen de klok in met Romeinse cijfers I, II, III, IV.
Elke hoek α komt overeen met een uniek **beeldpunt** P_α op deze cirkel (en vice versa).
De booglengte van de boog tussen $(1,0)$ en P_α is de hoek in radialen. Bijgevolg komt een hoek van $180°$ overeen met de booglengte van een halve cirkel: $180° = \pi$.



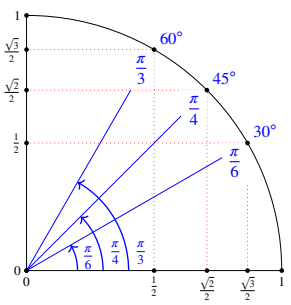


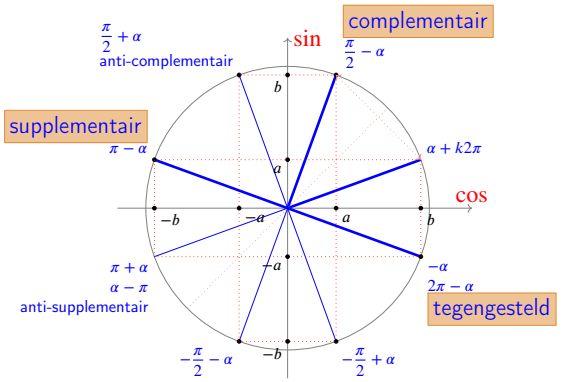
De **cosinus** en **sinus** van α zijn per definitie de coördinaten van P_α: $P_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$
Verder definiëren we

tangens	$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	secans	$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$
cotangens	$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	cosecans	$\csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$



Gekende goniometrische getallen en verwante hoeken





Goniometrische formules

Hoofdformule van de goniometrie:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

en dus $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$

$1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} = \csc^2\alpha$

Som

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

en dus $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

en dus $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

en dus $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

t-Formules:

$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$$

en dus $\tan\alpha = \dfrac{2t}{1-t^2}$ met $t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$

Simpson:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Omgekeerde Simpson:

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$
$$-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26:3)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

Functies

Definities

Een reële **functie** $f : A \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ is een procedure die met elk getal $x \in A \subset \mathbb{R}$ het uniek gedefinieerde getal $f(x)$ associeert.

Een **functievoorschrift** van een functie f is een *formule* die $f(x)$ berekent voor elke $x \in A$.

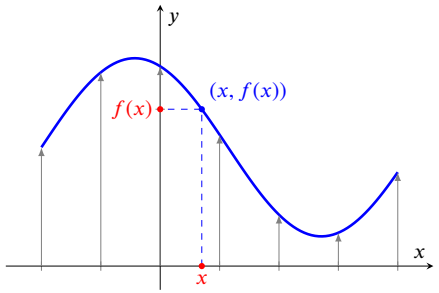
Het **domein** $\operatorname{dom} f$ is de verzameling A van alle mogelijke inputs van de functie.

Het **bereik** $\operatorname{bld} f$ is de verzameling van alle mogelijke outputs van de functie.

De **grafiek** van een functie is de verzameling $\{(x, f(x)) | x \in A)\} \subset \mathbb{R}^2$, en is typisch een kromme in het xy-vlak die elke verticale rechte hoogstens één keer snijdt.

Een **constante functie** is een functie die elke $x \in \mathbb{R}$ afbeeldt op eenzelfde reëel getal c. De grafiek is een horizontale rechte op hoogte $y = c$.

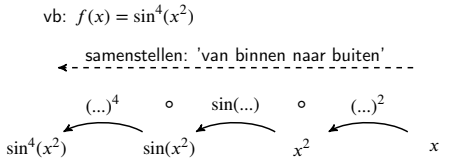
De **nulfunctie** is de constante functie die elke $x \in \mathbb{R}$ afbeeldt op 0.
De graad van de nulfunctie is onbepaald, alle andere constante functies zijn veeltermfuncties van graad 0.



Samenstellen van functies

Bij het **samenstellen van functies** wordt de output van één functie de input van een volgende functie:

$$f \circ g : x \mapsto f(g(x)), \quad \text{waarbij} \quad (f \circ g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(g(x)) \quad \text{(lees als: } f \textit{ na } g \text{ van } x\text{)}.$$



Transformaties van grafieken

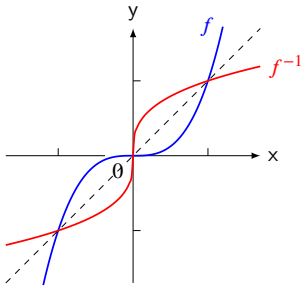
Grafieken verschuiven, schalen of spiegelen kan door samenstelling met enkele eenvoudige functies.
Voor een korte visuele opfrissing over deze transformaties verwijzen we naar de applet.

applet: https://eng.kuleuven.be/media/DSB/applet_transformatie_grafieken

Inverse functies

Soms kan een functie worden 'ongedaan gemaakt' door haar **inverse** f^{-1} die uit de output van f terug de input berekent. Voor elke y in het bereik van f waarvoor een *unieke input* bestaat, geldt: $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$. Dit is equivalent aan de voorwaarden $f^{-1}(f(x)) = x$ en $f(f^{-1}(x)) = x$.

Als de schaal op beide assen van de grafiek identiek is, kan de grafiek van de inverse functie gevonden worden door spiegeling t.o.v. de eerste bissectrice.



Pas op:

de waarde van de inverse functie	$f^{-1}(x)$	is meestal niet gelijk aan
het inverse (of omgekeerde) van de functiewaarde	$(f(x))^{-1} = 1/f(x)$.	

Let dus op de plaats van de exponent.

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

CC BY-NC-SA 4.0 KU Leuven (2026/10/26.3)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

Exponentiële en logaritmische functies

Definities

De **exponentiële functie met grondtal** a (met $a > 0$ en $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$),
is de reële functie $\exp_a : x \mapsto \exp_a(x) = a^x$
De **logaritmische functie met grondtal** a (met $a > 0$ en $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}_0^+$),
is de reële functie $\log_a : x \mapsto \log_a x$ met $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$
Beide functies zijn elkaars inverse:

$$\log_a(\exp_a x) = x \quad \text{of} \quad \log_a a^x = x \quad x \in \mathbb{R}$$
$$\exp_a(\log_a x) = x \quad \text{of} \quad a^{\log_a x} = x \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

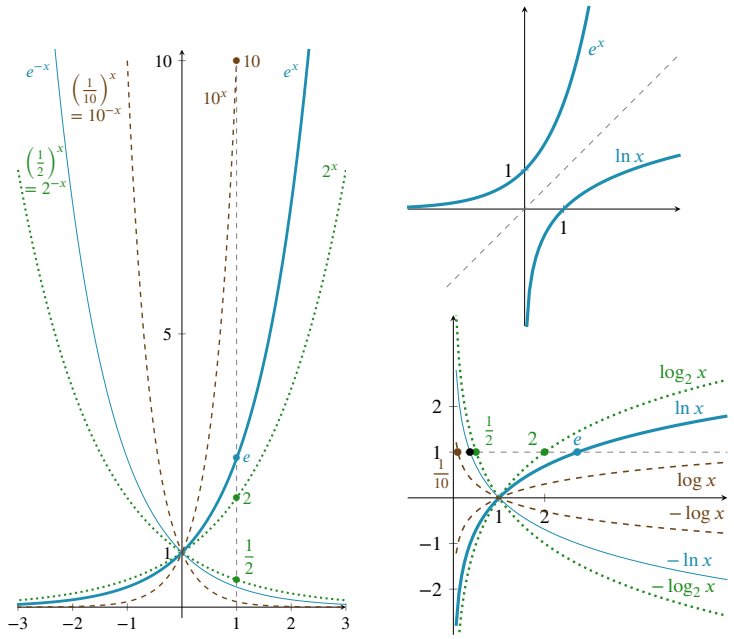
Notatie speciale grondtallen:

$\log x \overset{\text{def}}{=} \log_{10} x$

$\ln x \overset{\text{def}}{=} \log_e x$ met $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.7182$ **(getal van Euler)** .

$\exp x \overset{\text{def}}{=} e^x$

Grafieken van exponentiële en logaritmische functies



Rekenregels

$a^x a^y$	$=$	a^{x+y}	$\log_a(x \cdot y)$	$=$	$\log_a x + \log_a y$
$(a^x)^y$	$=$	a^{xy}	$\log_a(x^y)$	$=$	$y \cdot \log_a x$
$\frac{1}{a}$	$=$	a^{-1}	$\log_a \frac{1}{x}$	$=$	$\log_a x^{-1} = -\log_a x$
$\frac{a^x}{a^y}$	$=$	a^{x-y}	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)$	$=$	$\log_a x - \log_a y$
a^x	$=$	$b^{x \cdot \log_b a}$	$\log_a x$	$=$	$\log_a b \cdot \log_b x$
					het geval $x = a$ geeft $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$
a^x	$=$	$e^{x \cdot \ln a}$	$\log_a x$	$=$	$\frac{\ln x}{\ln a}$
$\frac{de^x}{dx}$	$=$	e^x	$\frac{d \ln x}{dx}$	$=$	$\frac{1}{x}$
$\frac{da^x}{dx}$	$=$	$\ln a \cdot a^x$	$\frac{d \log_a x}{dx}$	$=$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$

Eigenschappen van exponentiële functies

(1) Als $a > 1$ dan is de functie $\exp_a$ **strikt stijgend**: $x < y \iff a^x < a^y$
Hoe *groter* het grondtal, hoe *sneller* de grafiek stijgt.
(2) Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\exp_a$ **strikt dalend**: $x < y \iff a^x > a^y$
Hoe *kleiner* het grondtal, hoe *sneller* de grafiek daalt.

(3) Het **domein** van $\exp_a$ is $\mathbb{R}$: a^x is gedefinieerd voor alle reële getallen x
(4) Het **beeld** van $\exp_a$ is $\mathbb{R}_0^+$: a^x kan alleen strikt positieve waarden aannemen

De grafiek van $\exp_a$

(5)	snijdt **de x-as**	niet:	a^x is nooit gelijk aan 0
(6)	snijdt **de y-as**	in het punt $(0,1)$:	$a^0 = 1$
(7)	snijdt **de rechte $x = 1$**	in het punt $(1,a)$:	$a^1 = a$

Eigenschappen van logaritmische functies

(1) Als $a > 1$ dan is de functie $\log_a$ **strikt stijgend**: $x < y \iff \log_a x < \log_a y$
Hoe *kleiner* het grondtal, hoe *sneller* de grafiek stijgt.
(2) Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\log_a$ **strikt dalend**: $x < y \iff \log_a x > \log_a y$
Hoe *groter* het grondtal, hoe *sneller* de grafiek daalt.

(3) Het **domein** van $\log_a$ is $\mathbb{R}_0^+$: $\log_a x$ is enkel gedefinieerd voor $x > 0$
(4) Het **beeld** van $\log_a$ is $\mathbb{R}$: $\log_a x$ kan alle reële waarden aannemen

De grafiek van $\log_a$

(5)	snijdt **de x-as**	in het punt $(1,0)$:	$\log_a 1 = 0$
(6)	snijdt **de y-as**	niet:	voor $x = 0$ is $\log_a x$ niet gedefinieerd
(7)	snijdt **de rechte $y = 1$**	in het punt $(a,1)$:	$\log_a(a) = 1$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.3)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

Goniometrische en cyclometrische functies

Goniometrische functies

Bij goniometrische functies wordt de hoek steeds in radialen genomen!
Volgende functies zijn goniometrische functies:

$$\begin{array}{lll}
\sin: & \mathbb{R}\to[-1,1] & : x\mapsto \sin(x)\\
\cos: & \mathbb{R}\to[-1,1] & : x\mapsto \cos(x)\\
\tan: & \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\to\mathbb{R} & : x\mapsto \tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad k\in\mathbb{Z}\\
\cot: &]k\pi,(k+1)\pi[\to\mathbb{R} & : x\mapsto \cot(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad k\in\mathbb{Z}\\
\sec: & \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\to]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[& : x\mapsto \sec(x)=\frac{1}{\cos(x)}, \quad k\in\mathbb{Z}\\
\operatorname{cosec}: &]k\pi,(k+1)\pi[\to]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[& : x\mapsto \operatorname{cosec}(x)=\frac{1}{\sin(x)}, \quad k\in\mathbb{Z}
\end{array}$$

Cyclometrische functies

Volgende cyclometrische functies zijn de inversen van de goniometrische functies als we het domein van die goniometrische functies gepast beperken:

$\operatorname{asin}: [-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]: x\mapsto \operatorname{asin}(x)$ is invers van $\sin: \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]: x\mapsto \sin(x)$

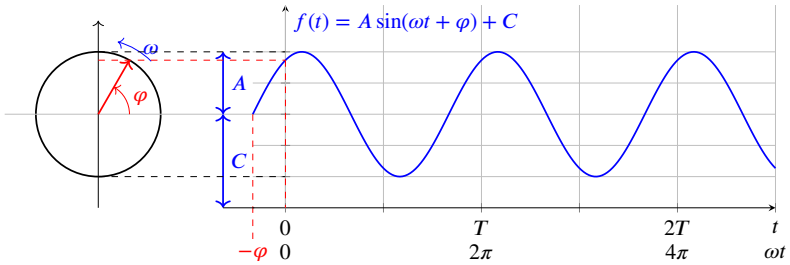
$\operatorname{acos}: [-1,1]\to [0,\pi] : x\mapsto \operatorname{acos}(x)$ $\quad$ $\cos: [0,\pi]\to[-1,1]: x\mapsto \cos(x)$

$\operatorname{atan}: \mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[: x\mapsto \operatorname{atan}(x)$ $\quad$ $\tan: \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R} : x\mapsto \tan(x)$

Cyclometrische functies geven *altijd* de waarde van een hoek uitgedrukt in radialen.
Verschillende notaties zijn in gebruik voor de cyclometrische functies. Zo wordt voor boogsinus zowel bgsin, Bgsin, arcsin als asin gebruikt.

Sinusoïdale functies

Sinusoïdale functies worden gebruikt om periodieke verschijnselen te modelleren. Ze kunnen beschreven worden als $f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+C$,
met A : de amplitude
T : de periode
$\omega=\frac{2\pi}{T}$: de hoekfrequentie of de pulsatie
φ : de fase
C : de offset of de verticale verschuiving.

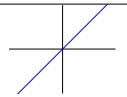
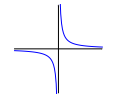
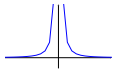
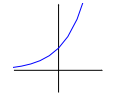
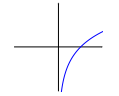


Merk op dat de cosinusfunctie een sinusfunctie is met fase $\frac{\pi}{2}$: $\cos(\omega t)=\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.3)
Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

Limieten en asymptoten

Basislimieten

	$x \to -\infty$	$x \overset{<}{\to} 0$	$x \to 0$	$x \overset{>}{\to} 0$	$x \to +\infty$
$x \mapsto x$ 	$-\infty$	0	0	0	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$ 	0	$-\infty$	\	$+\infty$	0
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$ 	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$x \mapsto e^x$ 	0	1	1	1	$+\infty$
$x \mapsto \ln x$ 	\	\	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Rekenregels voor oneindig $(+\infty, -\infty)$

$$
\begin{array}{rcll}
(+\infty)+(+\infty) & = & +\infty & \\
(-\infty)+(-\infty) & = & -\infty & \\
(+\infty)\cdot(+\infty) & = & +\infty & = (-\infty)\cdot(-\infty) \\
(+\infty)\cdot(-\infty) & = & -\infty & = (-\infty)\cdot(+\infty) \\
(\pm\infty)+a & = & \pm\infty & = a+(\pm\infty) \qquad a \in \mathbb{R} \\
\dfrac{a}{+\infty} & = & 0 & = \dfrac{a}{-\infty} \qquad a \in \mathbb{R} \\
(\pm\infty)\cdot a & = & \pm\infty & = a\cdot(\pm\infty) \qquad a > 0 \\
(+\infty)^a & = & +\infty & \qquad a > 0 \\
(\pm\infty)\cdot a & = & \mp\infty & = a\cdot(\pm\infty) \qquad a < 0 \\
(+\infty)^a & = & 0 & \qquad a < 0 \\
a^{(+\infty)} & = & +\infty & \qquad a > 1 \\
a^{(-\infty)} & = & 0 & \qquad a > 1 \\
a^{(+\infty)} & = & 0 & \qquad 0 < a < 1 \\
a^{(-\infty)} & = & +\infty & \qquad 0 < a < 1
\end{array}
$$

MAAR volgende uitdrukkingen zijn onbepaald:

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0^0 \qquad \infty^0 \qquad 1^\infty$$

Definities en eigenschappen

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ — lees je als: de **limiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
en betekent: als x nadert naar c dan nadert $f(x)$ tot L

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} c} f(x) = L$ — lees je als: de **linkerlimiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
en betekent: als $x \to c$ langs links (dus met $x < c$), dan $f(x) \to L$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} c} f(x) = L$ — lees je als: de **rechterlimiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
en betekent: als x nadert naar c **langs rechts** (dus met $c < x$), dan nadert $f(x)$ tot L

In de uitdrukking $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ zijn zowel c als L een reëel getal of het symbool $+\infty$ of $-\infty$.

Limieten bestaan *niet* voor alle functies f en getallen c, bijvoorbeeld $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x}$ bestaan niet.

Op de grafiek lees je x en c op de x-as (dus links-rechts) en $f(x)$ en L op de y-as (dus hoog-laag).

Eigenschap: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L \iff \lim\limits_{x \overset{<}{\to} c} f(x) = L$ en $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} c} f(x) = L$

Voor een functie f geldt: de functie f is continu $\equiv f(c)$ bestaat en $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

De meeste voorschriften geven functies die continu zijn op hun domein, en dan geldt de regel: als je c kan invullen in $f(x)$ zonder problemen zoals $\frac{a}{0}, \frac{0}{0}$ of $\pm\infty$, dan is $f(c)$ de limiet van f in c.

Rekenregels voor limieten

Voor continue functies f, g waarvoor $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ en $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ bestaan, gelden volgende (reken-)regels:

$$\lim_{x \to c}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) \qquad \lim(\text{som}) = \text{som}(\lim\text{s})$$

$$\lim_{x \to c}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x) \qquad \lim(\text{verschil}) = \text{verschil}(\lim\text{s})$$

$$\lim_{x \to c}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) \qquad \lim(\text{product}) = \text{product}(\lim\text{s})$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)} \quad (\text{voor } \lim_{x \to c} g(x) \neq 0) \qquad \lim(\text{quotiënt}) = \text{quotiënt}(\lim\text{s})$$

Asymptoten

Een **asymptoot** is een rechte waartoe de grafiek van een functie willekeurig dicht nadert.
Men spreekt van **horizontale asymptoot (HA), verticale asymptoot (VA) of schuine asymptoot (SA)** als de rechte respectievelijk horizontaal, verticaal of schuin is.

Rechte $y = a$ is een **horizontale asymptoot** van f asa $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ of $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$.

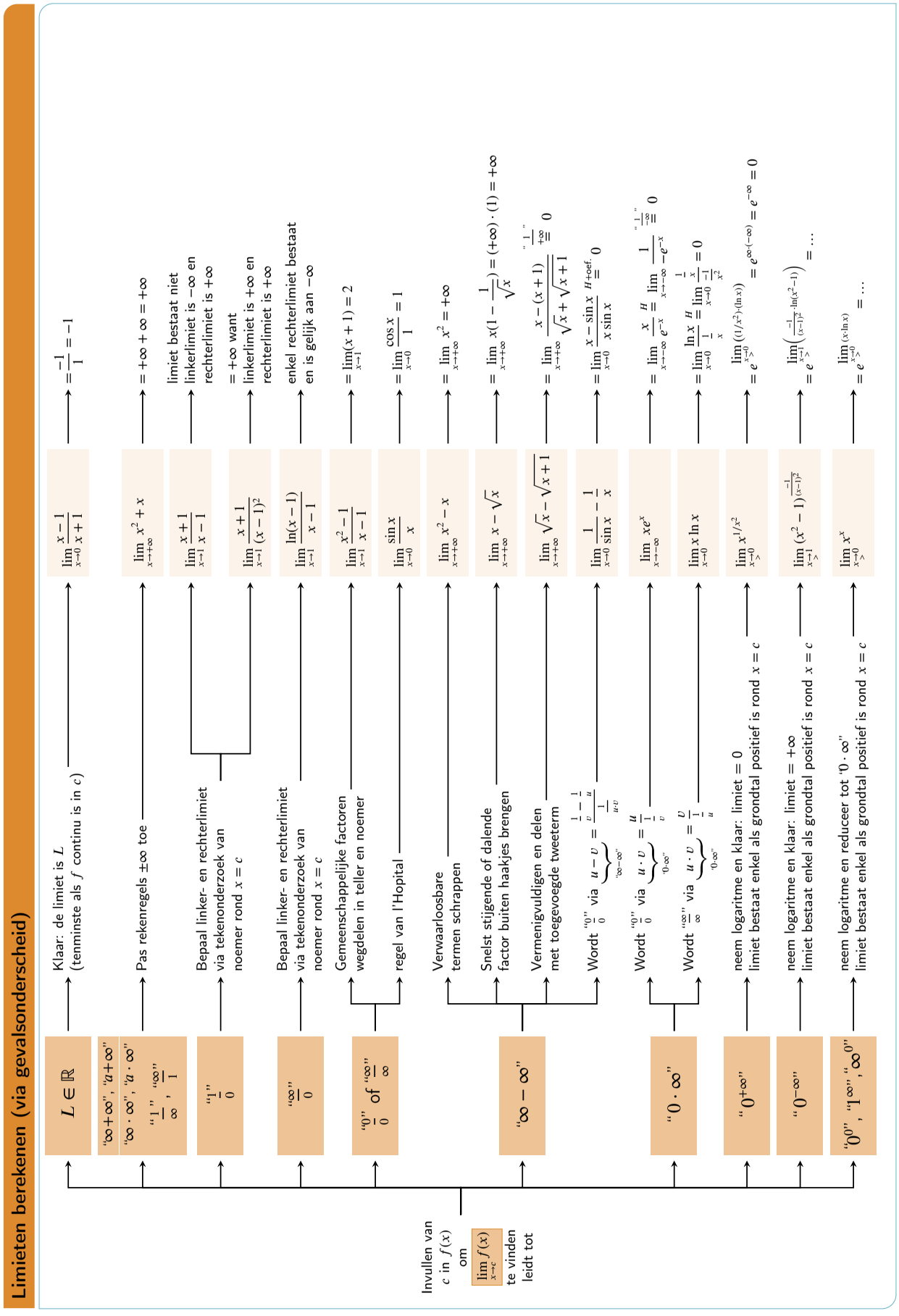
Rechte $x = a$ is een **verticale asymptoot** van f asa $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = \pm\infty$ of $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = \pm\infty$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.3)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

3.2 Overzicht limieten berekenen



KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

Afgeleiden

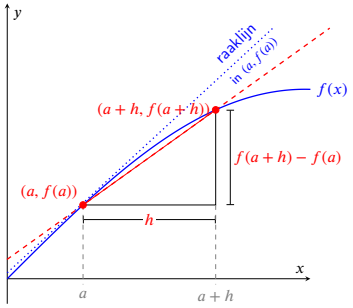
Definitie en grafische betekenis

De **afgeleide** van een reële functie f **in een punt** a van haar domein wordt genoteerd met $f'(a)$ of $Df(a)$ of $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_a$ en is de waarde van de limiet $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, als deze limiet *bestaat* en *eindig* is.

Een functie f is **afleidbaar** of **differentieerbaar** in een gebied als de afgeleide bestaat in dit gebied. De **afgeleide functie** van f wordt genoteerd met f' of Df of $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$: $f' : x \mapsto f'(x)$

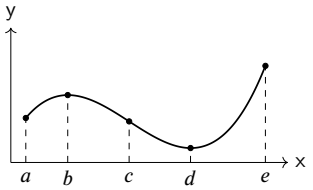
De **afgeleide** in a is de **richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek** in $(a, f(a))$.

De raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ heeft dus als vergelijking $y = f(a) + f'(a)(x-a)$



Functieverloop

x	a		b		c		d		e
$f'(x)$		+	0	−	−	−	0	+	
$f''(x)$		−	−	−	0	+	+	+	
$f(x)$	rel. min.	bol stijgend	rel. max.	bol dalend	buigpunt	hol dalend	abs. min.	hol stijgend	abs. max.



Een **absoluut** minimum/maximum (abs. min./abs. max.): de functiewaarde is minimaal/maximaal over het volledige domein van de functie.
Een **relatief** minimum/maximum (rel. min./ rel. max.): de functiewaarde is minimaal/maximaal in een omgeving rond het punt.
Een **extremum** is een minimum of een maximum.

Afgeleiden van enkele functies

$f(x)$	$f'(x)$
c $(c \in \mathbb{R})$	0
x^q $(q \in \mathbb{Q})$	qx^{q-1}
e^x	e^x
a^x $(a>0,\ a\neq 1)$	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$\sec x$	$\tan x \ \sec x$
$\csc x$	$-\cot x \ \csc x$
$\arcsin x$ $(\lvert x\rvert<1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$ $(\lvert x\rvert<1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcsec} x$ $(\lvert x\rvert>1)$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arccsc} x$ $(\lvert x\rvert>1)$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

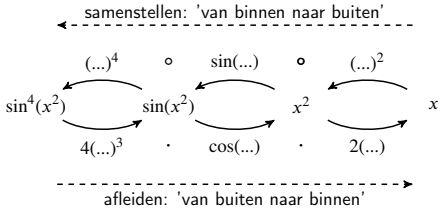
Rekenregels

Voor afleidbare reële functies f en g, en constante $c \in \mathbb{R}$ geldt:

$(cf)'(x) = cf'(x)$	**scalair veelvoud** $(5x)' = 5(x)' = 5$
$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$	**somregel** $(x+x^2)' = 1 + 2x$
$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$	**productregel** $\left((5x+2)\cdot x^2\right)' = 5\cdot x^2 + 2x\cdot(5x+2)$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$	**quotiëntregel** $\left(\frac{x^7+1}{x^2+1}\right)' = \frac{7x^6\cdot(x^2+1) - (x^7+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$
$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$	**kettingregel** $(\sin^4(x^2))' = 4\sin^3(x^2)\ \cos(x^2)\ 2x$
$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$	**inverse** $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

voorbeeld kettingregel

$f(x) = \sin^4(x^2)$



$f'(x) = 4\sin^3(x^2)\ \cos(x^2)\ 2x$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.3)
Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie
KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

5.1 Overzicht integralen

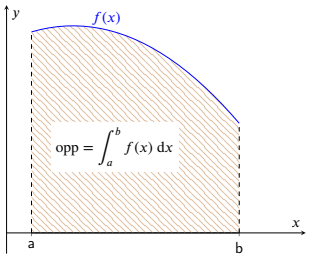
Integralen

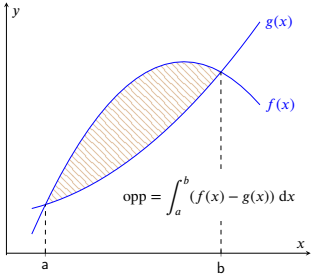
Definities

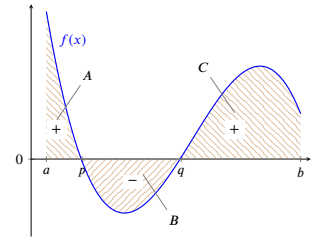
De **onbepaalde integraal** van een functie f is de verzameling van functies F zodat $F' = f$:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \qquad \text{met} \quad F'(x) = f(x).$$

De **bepaalde integraal** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ is de oppervlakte onder de grafiek van f tussen a en b.







Oppervlaktes *onder* de x-as worden *negatief geteld* door de bepaalde integraal:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^p f(x)\,\mathrm{d}x + \int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x + \int_q^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \text{opp}\,A - \text{opp}\,B + \text{opp}\,C\,.$$

Eigenschappen van de bepaalde integraal

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad \text{(Hoofdstelling van de integraalrekenenig)}$$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c \qquad \text{(Gevolg van de Hoofdstelling, } c = -F(a)\text{)}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Omwisselen integratiegrenzen)}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Opsplitsen integratieinterval)}$$

Basisintegralen, som en scalair veelvoud

$$\int 0\,\mathrm{d}x = c \quad \text{met } c \in \mathbb{R} \qquad \int \mathrm{d}x = x + c$$

$$\int x^r\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c \quad (r \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c \qquad \int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c \qquad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + c$$

$$\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int r \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = r \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Substitutiemethode

Voor reële, afleidbare functies f en g waarvoor der samenstelling $f(g(x))$ bestaat, geldt:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \overset{g(x)=u}{=} \int f(u)\,\mathrm{d}u \qquad \textbf{(substitutie } u = g(x)\textbf{)}$$

Of ook: $\int f(u)\mathrm{d}u = \int f(u(x))d(u(x)) = \int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x \quad (\mathrm{d}u = u'(x)\mathrm{d}x \text{ want } \frac{du}{\mathrm{d}x} = u'(x))$

Voorbeeld:

$$\int e^{x^2}\,2x\,\mathrm{d}x \overset{u(x)=x^2}{=} \int e^{u(x)}u'(x)\mathrm{d}x = \int e^u\mathrm{d}u = e^u + c = e^{u(x)} + c = e^{x^2} + c$$

Partiële integratie

Voor reële, afleidbare functies f en g geldt:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \overset{P.I.}{=} f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{(partiële integratie)}$$

Of ook: $\int u\,\mathrm{d}v \overset{P.I.}{=} uv - \int v\,\mathrm{d}u \qquad (\text{want } \mathrm{d}u = u'(x)\mathrm{d}x)$

Voorbeeld:

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\sin x \overset{P.I.}{=} x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c$$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26:3)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

Matrices

Definitie

Een reële $m \times n$ **matrix** $\mathbf{A}$ is een rechthoekig rooster van reële getallen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

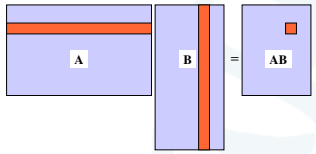
- De **matrixelementen** (of *componenten*) van $\mathbf{A}$ zijn de getallen $a_{11}, \ldots a_{ij}, \ldots, a_{mn}$.
- Men noteert ook $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.
- Een $m \times n$ matrix heeft m rijen en n kolommen.
- Een $n \times n$ matrix (met evenveel rijen als kolommen) noemen we een **vierkante matrix**.
- Een $m \times 1$ **kolommatrix** (of **kolomvector**) is een matrix met één kolom.
- Een $1 \times n$ **rijmatrix** (of **rijvector**) is een matrix met één rij.

Vermenigvuldiging van matrices

Het product van $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is $m \times n$ matrix $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ met element c_{ij} op de i-de rij en de j-de kolom gelijk aan het product van de i-de rij van $\mathbf{A}$ met j-de kolom van $\mathbf{B}$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Het product $\mathbf{AB}$ bestaat enkel als het aantal kolommen van $\mathbf{A}$ gelijk is aan het aantal rijen van $\mathbf{B}$.



De volgorde van de matrices mag in het algemeen niet omgewisseld worden:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 3 & 1\cdot -1+2\cdot 1 \\ -2\cdot 1+0\cdot 3 & -2\cdot -1+0\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+-1\cdot -2 & 1\cdot 2+-1\cdot 0 \\ 3\cdot 1+1\cdot -2 & 3\cdot 2+1\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

In het algemeen geldt dus dat $\mathbf{AB}$ *niet gelijk is* aan $\mathbf{BA}$.

Inverse van een vierkante matrix

Twee vierkante matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ zijn elkaars **inverse** als:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

Als voor een gegeven $\mathbf{A}$ dergelijke $\mathbf{B}$ bestaat dan is die uniek, en we noteren die als $\mathbf{A}^{-1}$.
Er geldt dus

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Merk op: niet elke matrix heeft een inverse. Er geldt $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Transponeren van matrices

De **getransponeerde matrix** van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ is de $n \times m$ matrix $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]$.
De *rijen* van de getransponeerde $\mathbf{A}^T$ zijn de *kolommen* van $\mathbf{A}$. Er geldt $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Voorbeeld:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Determinant van een vierkante matrix

De **determinant** van een *vierkante* 2×2 matrix is *een getal* dat belangrijke eigenschappen van die matrix weergeeft, in de eerste plaats of de matrix al dan niet *inverteerbaar* is

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \overset{\text{notatie}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=} ad - bc \in \mathbb{R}.$$

De determinant van een 3×3 matrix is het getal

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2)$$

De coëfficiënten komen telkens uit de eerste rij en de bijhorende 2×2 determinanten worden bekomen door de rij en de kolom van de betreffende coëfficiënt te schrappen.

Voor een vierkante $n \times n$ matrix geldt dat $\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A}$ inverteerbaar

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26:3)

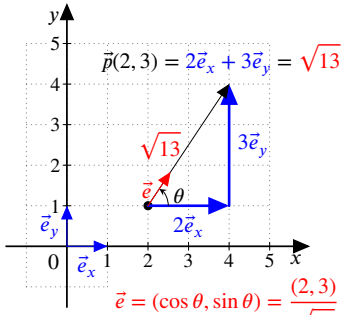
Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

Vectoren in de 2D ruimte

Definities

cartesiaans (of orthonormaal) assenstelsel:
x- en y-as loodrecht op mekaar
en gelijke eenheden op de assen.

Een **eenheidsvector** $\vec{e}$ is een vector met lengte 1
eenheidsvector $\parallel x$: $\vec{e}_x$
eenheidsvector $\parallel y$: $\vec{e}_y$



Een 2D-vector kan gekarakteriseerd worden door
- OFWEL **cartesiaanse coördinaten**: $\vec{p} = p_x\vec{e}_x + p_y\vec{e}_y = (p_x, p_y)$ met $p_x, p_y \in \mathbb{R}$
- OFWEL **scalaire waarde** ($p \in \mathbb{R}$) en **richting en zin** (eenheidsvector $\vec{e}$): $\vec{p} = p\,\vec{e}$

Een **eenheidsvector** $\vec{e}$ kan bepaald worden op verschillende manieren:
→ via hoek θ die $\vec{e}$ maakt met één van de coördinaatasssen (positieve of negatieve x- of y-as):
als θ hoek met x-as: $\vec{e} = (\pm\cos\theta, \pm\sin\theta)$
als θ hoek met y-as: $\vec{e} = (\pm\sin\theta, \pm\cos\theta)$
De tekens hangen af van de gekozen as en de oriëntatie van de hoek, maak een figuur!

applet: https://www.ijkingstoets.be/ir-ww-applet

→ via een vector $\vec{p}$ met dezelfde richting en zin, $\vec{e} \parallel \vec{p}$: $\vec{e} = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|}$

Het delen van een vector door zijn norm, noemen we het **normeren** van een vector.

→ via de richtingscoëfficiënt m van een rechte met de juiste richting: $\vec{e} = \pm\frac{(1,m)}{\|(1,m)\|}$.

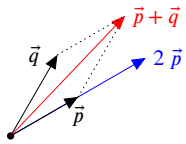
Bewerkingen

norm: $\|\vec{p}\| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$

product van vector $\vec{p}$ met scalar $k \in \mathbb{R}$: $k\vec{p} = (k\,p_x, k\,p_y)$

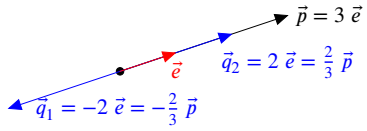
vectorsom: $\vec{p} + \vec{q} = (p_x + q_x, p_y + q_y)$

scalair product: $\vec{p} \cdot \vec{q} = p_x q_x + p_y q_y = \|\vec{p}\|\,\|\vec{q}\|\,\cos\theta$
(met θ de ingesloten hoek tussen $\vec{p}$ en $\vec{q}$)



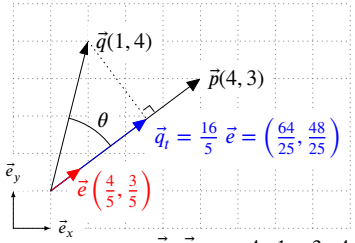
Evenwijdigheid, hoek, loodrechte projectie, loodrechte stand

vector $\vec{q}$ met norm $\|\vec{q}\|$, **evenwijdig** met vector $\vec{p}$:
$\vec{q} = q\,\vec{e}$, met $|q| = \|\vec{q}\|$ en $\vec{e} = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|}$
als $q > 0$: $\vec{q}$ en $\vec{e}$ hebben dezelfde zin
als $q < 0$: $\vec{q}$ en $\vec{e}$ hebben tegengestelde zin



hoek θ tussen de vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$:
$\cos\theta = \frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{\|\vec{p}\|\,\|\vec{q}\|}$

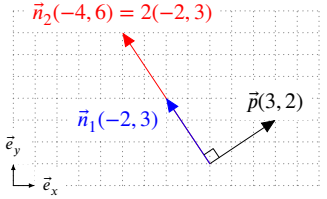
loodrechte projectie van $\vec{q}$ op de as bepaald door de eenheidsvector $\vec{e} \parallel \vec{p}$: $\vec{q}_t = q_t\,\vec{e}$
met $q_t = \vec{q}\cdot\vec{e}$



$\cos\theta = \frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{\|\vec{p}\|\,\|\vec{q}\|} = \frac{4\cdot 1 + 3\cdot 4}{5\cdot\sqrt{17}}$

$q_t = \vec{q}\cdot\vec{e} = 1\cdot\frac{4}{5} + 4\cdot\frac{3}{5} = \frac{16}{5}$

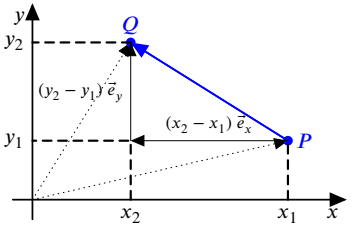
loodrechte stand: $\vec{p} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{p}\cdot\vec{n} = 0$
normaalvector (loodvector) op $\vec{p} = (p_x, p_y)$:
$\vec{n} = k(-p_y, p_x)$, $k \in \mathbb{R}$
$\vec{n} \perp \vec{p}$ want $\vec{n}\cdot\vec{p} = -kp_yp_x + kp_xp_y = 0$.
Slagzin: Wissel de twee coördinaten van $\vec{p}$, verander één coördinaat van teken, en schaal eventueel met een factor k.



Punten in het vlak

Een **punt** in het vlak kan beschreven worden als een vector van de oorsprong van het assenstelsel naar het punt: $P = \overrightarrow{OP}$.

De vector van $P(x_1, y_1)$ naar $Q(x_2, y_2)$ kan geschreven worden als $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = Q - P$
en heeft coördinaten $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.



De **afstand** tussen het punt $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$ kan bijgevolg berekend worden als
$d(P,Q) = |PQ| = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|Q - P\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26 3)
Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

Vergelijkingen van rechten in het vlak (cartesiaans assenstelsel Oxy)

Vormen

Een rechte door het punt $P(x_1, y_1)$ kunnen we beschrijven op verschillende manieren.
Een **cartesiaanse vergelijking** van een rechte is *een nodige en voldoende voorwaarde* opdat punten (x, y) op de rechte zouden liggen.

(A) $y = y_1 + m(x - x_1)$

expliciete vergelijking: y als functie van x
Het getal m is de **richtingscoëfficiënt** (rico) van de rechte.
Door $P = (0, q)$ te kiezen wordt de vergelijking $y = q + mx$.

vb: $y = 1 + 2x$ heeft rico 2.

(B) $n_x(x - x_1) + n_y(y - y_1) = 0$

impliciete vergelijking: verband tussen x en y
De vector $\vec{n}(n_x, n_y)$ is een **normaalvector** op de rechte.
De vergelijking kan ook geschreven worden als
$n_x\, x + n_y\, y + c = 0$ met c een constante.

vb: $2x - y + 1 = 0 \perp \vec{n} = (2, -1)$

Een **parametervergelijking** *genereert* alle punten van de rechte met behulp van een parameter:

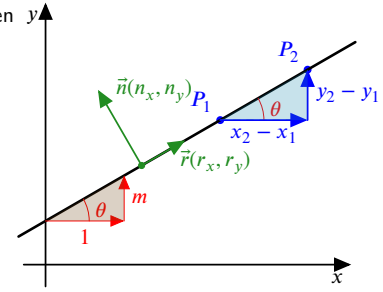
(C) $\begin{cases} x = x_1 + r_x\, t \\ y = y_1 + r_y\, t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

parametervergelijking: elke waarde voor de parameter t genereert een punt van de rechte
$\vec{r}(r_x, r_y)$ is een **richtingsvector** van de rechte.

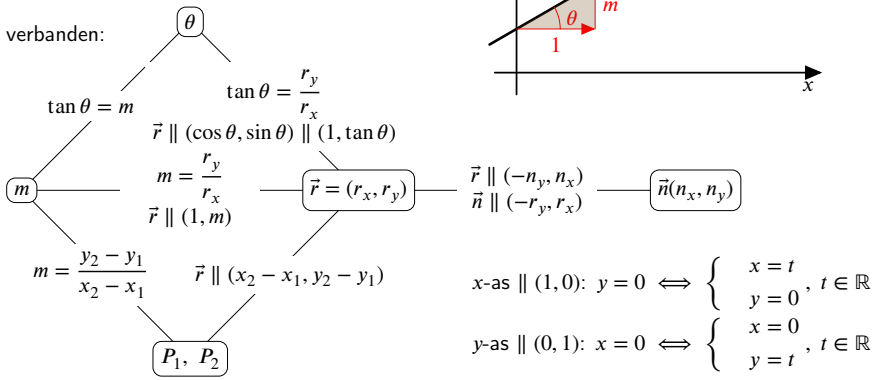
vb: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \| \ \vec{r} = (1, 2)$

Richting

De **richting** van een rechte kan gespecifieerd worden op verschillende manieren:
- met de **hoek** θ die de rechte maakt met de x-as
- met de **rico** m van de rechte
- met een **richtingsvector** $\vec{r}(r_x, r_y)$ van de rechte
- met een **normaalvector** $\vec{n}(n_x, n_y)$ op de rechte
- met **twee punten** $P_1(x_1, y_1)$ en $P_2(x_2, y_2)$



verbanden:



x-as $\| (1, 0)$: $y = 0 \iff \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

y-as $\| (0, 1)$: $x = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

Onderlinge ligging van rechten

De **snijpunten** van twee rechten zijn de oplossingen van een stelsel gevormd door de vergelijkingen van beide rechten. De vergelijkingen mogen gemengd worden wat betreft vorm.

Snijdend	één snijpunt	verschillende richting
Evenwijdig en niet samenvallend	geen snijpunten	gelijke richting
Samenvallend	elk punt is snijpunt	gelijke richting

Rechten staan **loodrecht op elkaar** als

hun richtingsvectoren loodrecht op elkaar staan.	$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0$
het product van hun rico's gelijk is aan -1.	$m_1 \cdot m_2 = -1$ (volgt uit $(1, m_1) \cdot (1, m_2) = 0$)
hun normaalvectoren loodrecht op elkaar staan.	$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
een normaalvector van de ene rechte evenwijdig is met een richtingsvector van de andere rechte.	$\vec{n}_1 = k\vec{r}_2 = 0, \ k \in \mathbb{R}$

Rechten zijn **evenwijdig** als

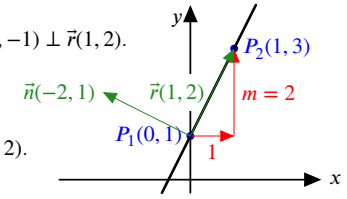
hun richtingsvectoren evenwijdig zijn.	$\vec{r}_1 = k\vec{r}_2, \ k \in \mathbb{R}$
hun rico's gelijk zijn.	$m_1 = m_2$
hun normaalvectoren evenwijdig zijn.	$\vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \ , \ k \in \mathbb{R}$
een normaalvector van de ene rechte loodrecht staat op een richtingsvector van de andere rechte.	$\vec{n}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0$

Omzetten van parametervergelijkingen en cartesiaanse vergelijkingen

Meetkundig:
Maak gebruik van de verbanden tussen de rico m, de richtingsvector $\vec{r}$ en de normaalvector $\vec{n}$.

vb: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R},$ gaat door het punt $(1, 3)$ en heeft richtingsvector $\vec{r}(1, 2) \perp \vec{n}(-2, 1)$.
$\iff -2\,(x - 1) + 1\,(y - 3) = 0 \iff -2x + y - 1 = 0$

vb: $2x - y + 1 = 0$ gaat door het punt $(0, 1)$ en heeft normaalvector $\vec{n}(2, -1) \perp \vec{r}(1, 2)$.
$\iff \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$



vb: $y = 2x + 1$ gaat door het punt $(0, 1)$ en heeft richtingsvector $\vec{r}(1, 2)$.
$\iff \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

Algebraïsch:
- Een parameter $x = t$ invoeren (of $y = t$) schrijft een cartesiaanse vergelijking in parametervorm:

$$y = 3 + 2x \iff \begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \overset{\text{of}}{\iff} \begin{cases} x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

- De parameter t elimineren maakt van een parametervergelijking een cartesiaanse vergelijking:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \overset{t = x-1}{\iff} y = 3 + 2(x - 1) \iff 2x - y + 1 = 0$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.3)
Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie
KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026